

## QUINZAINE N° 12

Lundi 18 - Vendredi 29 mai 2026

## I. Questions de cours

1. L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure.
2. Critère spécial des séries alternées.
3. Toute série réelle absolument convergente est convergente.
4. Formule du changement de base pour la matrice d'une application linéaire.
5. Pour  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , calcul des coordonnées de  $f(x)$  dans la base  $\mathcal{F}$  connaissant  $\text{mat}_{\mathcal{E}, \mathcal{F}}(f)$  et les coordonnées de  $x$  dans  $\mathcal{E}$ . application à la formule du changement de base pour les coordonnées d'un vecteur.

## II. Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants

## 2.1. Développements limités

CONTENUS	COMMENTAIRES
<b>a) Rappel, relations de comparaison : cas des suites</b>	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$ , $u_n = o(v_n)$ , $u_n \sim v_n$ . On définit ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite $(v_n)$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction, à l'aide du symbole $o$ , des croissances comparées des suites usuelles : $\ln^\beta(n)$ , $n^\alpha$ et $e^{\gamma n}$
Liens entre les relations de comparaison.	Équivalence entre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$ .
Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.	
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
<b>b) Rappel, relations de comparaison : cas des fonctions</b>	
Adaptation aux fonctions des définitions et résultats du paragraphe précédent (en un point ou à l'infini).	

**c) Développements limités**

Si  $f$  est définie sur l'intervalle  $I$  et si  $a$  est un point de  $I$  ou une extrémité de  $I$ , développement limité d'ordre  $n$  de  $f$  au voisinage de  $a$ .

Unicité, troncature d'un développement limité.

Forme normalisée d'un développement limité :

$$f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{=} h^p (a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n))$$

avec  $a_0 \neq 0$ .

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, composée, quotient.

Primitivation (intégration) d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre  $n$  au voisinage d'un point  $a$  de  $I$  d'une application de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

Les développements limités à tout ordre au voisinage de 0 de  $x \mapsto \frac{1}{1-x}$ ,  $\exp$ ,  $\sin$ ,  $\cos$ ,  $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ,  $x \mapsto \ln(1+x)$  et de  $\tan$  à l'ordre 3.

Adaptation au cas où  $f$  est définie sur  $I \setminus \{a\}$ .  
Interprétation d'un DL d'ordre un.

Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire.

Équivalence  $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_0 h^p$ , signe de  $f$  au voisinage de  $a$ .

La division selon les puissances croissantes est hors programme.

**d) Applications des développements limités**

Calcul d'équivalents et de limites.

Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente, extremum.

**2.2. Séries numériques****a) Généralités sur les séries numériques**

Série à termes réels ou complexes; sommes partielles; convergence ou divergence; en cas de convergence, somme et restes.

Linéarité de la somme.

Le terme général d'une série convergente tend vers 0.

Séries géométriques : sommes partielles, condition nécessaire et suffisante de convergence, somme en cas de convergence.

La série est notée  $\sum u_n$ . En cas de convergence, sa somme est notée  $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ .

Divergence grossière.

Une suite  $(u_n)$  converge si et seulement si la série  $\sum (u_{n+1} - u_n)$  converge.

### b) Séries à termes positifs

Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée.

Pour  $f$  continue et monotone, encadrement des sommes partielles de la série  $\sum f(n)$  à l'aide de la méthode des rectangles.

Séries de Riemann.

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont positives et si, pour tout  $n$ ,  $u_n \leq v_n$ , alors la convergence de  $\sum v_n$  implique celle de  $\sum u_n$ , et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

Si  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont positives et si  $u_n \sim v_n$ , alors la convergence de  $\sum v_n$  est équivalente à celle de  $\sum u_n$ .

Critère de D'Alembert.

Sur des exemples simples, application à l'étude asymptotique de sommes partielles.

Adaptation au cas où l'inégalité  $u_n \leq v_n$  n'est vérifiée qu'à partir d'un certain rang.

Comparaison à une série géométrique, à une série de Riemann.

### c) Séries absolument convergentes

Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes.

La convergence absolue implique la convergence.

Inégalité triangulaire pour la somme d'une série absolument convergente.

Si  $(u_n)$  est une suite complexe, si  $(v_n)$  est une suite d'éléments de  $\mathbb{R}^+$ , si  $u_n = O(v_n)$  et si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  est absolument convergente donc convergente.

Le critère de Cauchy et la notion de semi-convergence sont hors programme.

### d) Séries semi-convergentes

Critère spécial des séries alternées.