

QUINZAINE N° 2

Lundi 05 - Vendredi 16 octobre 2025

I. Questions de cours

1. Calcul des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}, \quad \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k}, \quad \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1} \text{ et } \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

2. Calcul des sommes $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta)$ (où $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$) et

$$\sum_{k=p}^n \binom{k}{p} \text{ (où } p \leq n).$$

3. Énoncé et démonstration par récurrence de la formule du binôme.

4. Démonstration de la formule de Vandermonde :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

II. Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants

2.1. Applications

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Applications

Application d'un ensemble non vide E dans un ensemble non vide F; graphe d'une application.

Restriction.

Image directe, image réciproque.

Composition.

Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections.

Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.

Le point de vue est intuitif : une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F.

Notations $\mathcal{F}(E, F)$ et F^E pour l'ensemble des applications de E dans F.Notation $f|_A$.Notations $f(A)$ et $f^{-1}(B)$.

2.2. Nombres complexes et équations algébriques

CONTENUS	COMMENTAIRES
a) Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.
Opérations sur les nombres complexes.	
Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point du plan, affixe d'un vecteur du plan.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
b) Module d'un nombre complexe	
Module.	Interprétation géométrique de $ z - z' $, cercles et disques.
Relation $ z ^2 = z \overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient.	
Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	
c) Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Cercle trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}$.
Définition de e^{it} pour t réel.	
Si t et t' sont deux réels, alors : $e^{i(t+t')} = e^{it} e^{it'}$.	Factorisation de $1 \pm e^{it}$. Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$.
Formules exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos(a)\cos(b)$, $\sin(a)\sin(b)$, $\cos(a)\sin(b)$.	
Formules d'Euler :	
$\cos(t) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \sin(t) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$	
Formule de Moivre.	
d) Arguments d'un nombre complexe non nul	
Écriture d'un nombre complexe non nul sous la forme $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.	Argument d'un produit, d'un quotient.
Arguments d'un nombre complexe non nul.	
e) Exponentielle complexe	
Définition de e^z pour $z \in \mathbb{C}$: $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i \operatorname{Im}(z)}$.	Notations $\exp(z)$, e^z .
Exponentielle d'une somme.	
Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$.	
f) Nombres complexes et géométrie plane	
Traduction de l'alignement et de l'orthogonalité au moyen d'affixes.	

CONTENUS

COMMENTAIRES

Transformation $z \mapsto e^{i\theta} z$; rotation plane de centre O et d'angle θ .

Transformation $z \mapsto z + b$; interprétation en termes de translation.

Transformation $z \mapsto kz$, ($k \in \mathbb{R}^*$); homothétie de centre O et de rapport k .

Transformation $z \mapsto \bar{z}$; interprétation en termes de symétrie axiale.

Il s'agit d'une modeste introduction au concept de transformation du plan, dont l'étude ne figure plus aux programmes des classes antérieures.

2.3. Calculs algébriques

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Sommes et produits

Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.

Notations $\sum_{i \in I} a_i$, $\sum_{i=1}^n a_i$, $\prod_{i \in I} a_i$, $\prod_{i=1}^n a_i$.

Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.

Somme d'une progression arithmétique ou géométrique finie de nombres complexes.

Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Sommes doubles. Produit de deux sommes finies. Sommes triangulaires.

Sommes trigonométriques classiques.

b) Coefficients binomiaux et formule du binôme

Factorielle. Coefficients binomiaux.

Notation $\binom{n}{p}$.

L'interprétation combinatoire sera étudiée ultérieurement.

Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$.

Formule et triangle de Pascal.

Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.

Formule de Vandermonde :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$