

QUINZAINE N° 9

Lundi 16 février - Vendredi 13 mars 2026

I. Questions de cours

1. Énoncé et preuve du théorème et de la formule du rang.
2. Énoncé et démonstration de la formule de Grassmann.
3. Énoncé et démonstration de la formule sur la dimension d'une somme directe.
4. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. Démontrer l'équivalence des propositions suivantes :

a. $\text{Ker } f^2 = \text{Ker } f$; b. $\text{Im } f^2 = \text{Im } f$; c. $E = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$; d. $E = \text{Ker } f + \text{Im } f$.

II. Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants

2.1. Espaces vectoriels

CONTENUS	COMMENTAIRES
a) Espaces et sous-espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.	Ex. : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$ (cas des suites) et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs.	
Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, caractérisation.	Exemples : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle linéaire homogène.
Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs.	
Intersection de sous-espaces vectoriels.	
Somme de deux sous-espaces vectoriels.	
Somme directe. Caractérisation par l'intersection	
Sous-espaces supplémentaires.	
b) Familles finies de vecteurs	
Famille libre, famille liée.	Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires. Vecteurs linéairement indépendants.
Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel.	
Base, coordonnées d'un vecteur dans une base.	Matrice colonne des coordonnées.

CONTENUS

COMMENTAIRES

Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Base adaptée à une somme directe.

Si $(e_1, \dots, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E alors $\text{Vect}(e_1, \dots, e_k)$ et $\text{Vect}(e_{k+1}, \dots, e_n)$ sont en somme directe.

2.2. Espaces vectoriels de dimension finie

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Dimension finie

Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel non nul E , on peut extraire une base de E .

Tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base.

Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base.

Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n + 1$ vecteurs est liée.

Dimension.

Droites et plans vectoriels.

Dimensions de $\mathbb{K}^n, \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Si E est dimension n et $\mathcal{F}$ est une famille de n vecteurs de E , alors $\mathcal{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre, si et seulement si $\mathcal{F}$ est génératrice de E .

Rang d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension quelconque.

Caractérisation des familles finies libres par le rang.

b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité.

Supplémentaires d'un sous-espace : existence, dimension commune, caractérisation par l'intersection et les dimensions.

Dimension de la somme de deux sous-espaces.

Formule de Grassmann.

2.3. Applications linéaires

CONTENUS	COMMENTAIRES
a) Généralités	
Applications linéaires, endomorphismes. Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée. Image directe d'un sous-espace vectoriel. Image et noyau.	Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau.
b) Isomorphismes	
Isomorphismes, automorphismes. Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes. Caractérisation des isomorphismes par les bases. Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension. Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	Le groupe linéaire $GL(E)$. Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, détermination d'une base. Cas particulier des endomorphismes.
c) Modes de définition d'une application linéaire	
Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. Une application linéaire définie sur $E = E_1 \oplus E_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à E_1 et E_2 .	
d) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel	
Identité et homothéties. Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires.	Notation $\mathbb{I}_E$ ou id_E . Caractérisations : $p \circ p = p$, $s \circ s = \text{id}_E$.
e) Rang d'une application linéaire	
Applications linéaires de rang fini. Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme. Théorème du rang : $u \in \mathcal{L}(E, F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker}(u)$ sur $\text{Im}(u)$.	Formule du rang : si plus E est de dimension finie, alors u est de rang fini et $\dim(E) = \dim(\text{ker}(u)) + \text{rg}(u).$

CONTENUS	COMMENTAIRES
f) Équations linéaires	
Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.	Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux. La notion de sous-espace affine est hors programme mais a été évoquée dans le cours.