

I. Questions de cours

1. Formule de Taylor avec reste intégral.
2. Inégalité de Cauchy-Schwarz.
3. Première formule de la moyenne et théorème fondamental du calcul intégral.
4. Théorème d'approximation uniforme d'une fonction continue sur un segment $[a, b]$ par des fonctions en escalier. On ne donnera la démonstration que dans le cas où la fonction est lipschitzienne.

II. Exercices

Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants :

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Fonctions en escalier

Subdivision d'un segment.

Fonctions en escalier définies sur un segment à valeurs réelles.

b) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

Intégrale d'une fonction f continue sur un segment $[a, b]$ de $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Aucune construction n'est imposée par le programme. L'approche choisie est la suivante : si f est continue sur $[a, b]$, alors il existe (f_n) suite de fonctions en escalier qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$. On vérifie que la suite $(\int_{[a,b]} f_n)$ converge et que sa limite est indépendante de la suite (f_n) .

Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale.

Inégalité : $\left| \int_{[a,b]} f \right| \leq \int_{[a,b]} |f|$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Relation de Chasles.

L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.

Il convient d'interpréter graphiquement l'intégrale d'une fonction continue à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ en terme d'aire mais tout développement théorique sur ce sujet est hors programme.

Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f$.

Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.

Extension de la notation $\int_a^b f(t) dt$ au cas où $b \leq a$. Propriétés correspondantes.

CONTENUS

COMMENTAIRES

c) Sommes de Riemann

Si f est une fonction continue sur le segment $[a, b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors

$$\frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k \frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation géométrique des sommes de Riemann.
Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathcal{C}^1$.

d) Calcul intégral

Si f est une fonction continue sur l'intervalle I et si x_0 est un point de I , alors $x \mapsto \int_{x_0}^x f(t) dt$ est l'unique primitive de f sur I s'annulant en x_0 .

Toute fonction continue sur I admet des primitives sur I .

Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.

Pour f de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$:

$$\int_a^b f'(t) dt = f(b) - f(a).$$

Intégration par parties. Changement de variable.

Application au calcul de primitives. Tout excès de technicité est exclu. Les méthodes d'intégration des fractions rationnelles en cosinus ou sinus, celles des racines de fonctions homographiques ou de polynômes du second degré sont hors programme.

e) Formule de Taylor avec reste intégral

Pour une fonction f de classe $\mathcal{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n .

f) Brève extension au cas des fonctions à valeurs complexes et continues par morceaux

Très brève extension.

Principales propriétés.