LYCÉE LOUIS LE GRAND **QUINZAINE N° 11** **PCSI 2**

LUNDI 7 MARS - VENDREDI 4 MAI 2025

I. Questions de cours

1. Énoncé et démonstration du lemme d'intégration d'un petit « o ».
2. Énoncé et démonstration de la formule de Taylor-Young.
3. Énoncé et démonstration du critère spécial des séries alternées.
4. Énoncé et démonstration du théorème sur la convergence des séries de Riemann (en commençant par la série harmonique).

II. Exercices

Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants :

CONTENUS	COMMENTAIRES
a) Rappel, relations de comparaison : cas des suites	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = \mathrm{O}(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. On définit ces relations à partir du quotient $\frac{u_n}{v_n}$ en supposant que la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction, à l'aide du symbole o, des croissances comparées des suites usuelles : $\ln^{\beta}(n)$, n^{α} et $e^{\gamma n}$
Liens entre les relations de comparaison.	Équivalence entre $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances.	
Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	
b) Rappel, relations de comparaison : cas des fonctions	
Adaptation aux fonctions des définitions et résultats du paragraphe précédent (en un point ou à l'infini).	
c) Développements limités	
Si f est définie sur l'intervalle I et si a est un point de I ou une extrémité de I, développement limité d'ordre n de f au voisinage de a.	Adaptation au cas où f est définie sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$. Interprétation d'un DL d'ordre un.
Unicité, troncature d'un développement limité.	Développement limité en 0 d'une fonction paire ou impaire.

Contenus	Commentaires
Forme normalisée d'un développement limité : $$f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0+a_1h+\cdots+a_nh^n+o\left(h^n\right)\right)$$ avec $a_0 \neq 0$.	Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0h^p$, signe de f au voisinage de a.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, composée, quotient.	La division selon les puissances croissantes est hors programme.
Primitivation (intégration) d'un développement limité.	
Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n au voisinage d'un point a de I d'une application de classe $\mathscr{C}^n$ sur I.	
Les développements limités à tout ordre au voisinage de 0 de $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, exp, sin, cos, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, $x \mapsto \ln(1+x)$ et de tan à l'ordre 3.	

d) Applications des développements limités

Calcul d'équivalents et de limites.

Étude locale d'une fonction : prolongement par continuité, dérivabilité d'un prolongement par continuité, tangente, position relative de la courbe et de la tangente, extremum.