

I. Questions de cours

1. Énoncé et démonstration de la condition nécessaire d'extremum pour une fonction dérivable en un point intérieur à son intervalle de définition.
2. Énoncé et démonstration des théorèmes de Rolle et des accroissements finis.
3. Énoncé et démonstration de l'inégalité de Jensen pour les fonctions convexes.
4. Deux démonstrations (par les formules trigonométrique et par la dérivation) de la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \arctan x + \arctan \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \times \text{signe de } x$$

II. Programme des exercices

Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants :

2.1. Limites de fonctions

CONTENUS	COMMENTAIRES
a) Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a appartenant à I ou extrémité de I , limite finie ou infinie d'une fonction en a . Limite finie ou infinie d'une fonction en $\pm\infty$.	Notations $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ell$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges. Les étudiants doivent savoir démontrer l'existence d'une limite réelle ℓ en majorant $ f(x) - \ell $.
Unicité de la limite. Si f admet une limite finie en a alors f est bornée au voisinage de a . Limite à droite, limite à gauche.	Notation $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$. Notations $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x)$ ou $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$. Extension de la notion de limite en a lorsque la fonction est définie sur $I \setminus \{a\}$.
Opérations sur les fonctions admettant une limite finie ou infinie en a . Image d'une suite de limite a par une fonction admettant une limite en a . Stabilité des inégalités larges par passage à la limite. Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$) et de majoration (limite $-\infty$).	Adaptation des énoncés relatifs aux suites.

CONTENUS

COMMENTAIRES

Théorème de la limite monotone.

b) Relations de comparaison des fonctions en un point

Négligeabilité, équivalence et domination

Équivalents usuels en 0.

$e^u - 1$, $\ln(1 + u)$, $(1 + u)^\alpha - 1$, $\sin u$, $\tan u$, $\cos u - 1$ et plus généralement $f(u) - f(0)$ avec f dérivable en 0 et $f'(0) \neq 0$.

2.2. Fonctions continues

CONTENUS

COMMENTAIRES

a) Continuité en un point

Continuité de f en un point a de I .

La fonction f est continue en a si et seulement si elle admet une limite finie en a .

Continuité à droite et à gauche.

Prolongement par continuité en un point.

Image d'une suite de limite a par une fonction continue en a .

Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.

b) Continuité sur un intervalle

Opérations : combinaisons linéaires, produit, quotient, composition.

Théorème des valeurs intermédiaires.

Image d'un intervalle par une fonction continue.

Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.

Toute fonction f continue et strictement monotone sur un intervalle I réalise une bijection de I sur l'intervalle $f(I)$, et sa réciproque est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$, et de même monotonie que f .

c) Brève extension aux fonctions à valeurs complexes

Limite de f en a , continuité de f en a , continuité de f sur un intervalle I .

Traduction à l'aide des parties réelle et imaginaire.

Fonctions bornées au voisinage de a .

Toute fonction admettant une limite finie en a est bornée au voisinage de a .

Opérations sur les fonctions admettant une limite finie en a , continues en a ou continues sur un intervalle I : combinaisons linéaires, produit, quotient.