**LYCÉE LOUIS LE GRAND** **QUINZAINE N° 8** **HX 6**

LUNDI 3 - VENDREDI 14 FÉVRIER 2024

# I. Questions de cours

**1.** Énoncé et démonstration de la formule de Grassmann.

**2.** Énoncé et démonstration du théorème et de la formule du rang.

**3.** Énoncé et démonstration de la formule sur la dimension d'une somme directe.

**4.** Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E)$. Démonter l'équivalence des propositions suivantes :

**a.** $\operatorname{Ker} f^2 = \operatorname{Ker} f$ ; **b.** $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f$ ; **c.** $E = \operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$ ; **d.** $E = \operatorname{Ker} f + \operatorname{Im} f$.

# II. Exercices

Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants :

## 2.1. Espaces vectoriels

| CONTENUS | COMMENTAIRES |
|---|---|
| **a) Espaces et sous-espaces vectoriels** | |
| Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. | Ex. : $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\Omega$ (cas des suites) et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. |
| Combinaisons linéaires d'un nombre fini de vecteurs. | |
| Sous-espaces d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, caractérisation. | Exemples : ensemble des solutions d'un système linéaire homogène ou d'une équation différentielle linéaire homogène. |
| Sous-espace engendré par une famille finie de vecteurs. | |
| Intersection de sous-espaces vectoriels. | |
| Somme de deux sous-espaces vectoriels. | |
| Somme directe. Caractérisation par l'intersection | |
| Sous-espaces supplémentaires. | |
| **b) Familles finies de vecteurs** | |
| Famille libre, famille liée. | Cas des vecteurs colinéaires, coplanaires.<br>Vecteurs linéairement indépendants. |
| Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel. | |
| Base, coordonnées d'un vecteur dans une base. | Matrice colonne des coordonnées. |
| Bases canoniques des espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. | |
| Base adaptée à une somme directe. | |

| Contenus | Commentaires |
|---|---|
| Si $(e_1,\dots,e_k,e_{k+1},\dots,e_n)$ est une famille libre d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E alors $\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k)$ et $\mathrm{Vect}(e_{k+1},\dots,e_n)$ sont en somme directe. | |

## 2.2. Espaces vectoriels de dimension finie

| Contenus | Commentaires |
|---|---|
| **a) Dimension finie** | |
| Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie. | |
| Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel non nul E, on peut extraire une base de E. | |
| Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel E non nul de dimension finie admet une base. | |
| Théorème de la base incomplète : toute famille libre de E peut être complétée en une base. | |
| Dans un espace engendré par $n$ vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. | |
| Dimension. | Droites et plans vectoriels. |
| Dimensions de $\mathbb{K}^n, \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. | |
| Si E est dimension $n$ et $\mathscr{F}$ est une famille de $n$ vecteurs de E, alors $\mathscr{F}$ est une base de E si et seulement si $\mathscr{F}$ est libre, si et seulement si $\mathscr{F}$ est génératrice de E. | |
| Rang d'une famille finie de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension quelconque. | |
| Caractérisation des familles finies libres par le rang. | |
| **b) Sous-espaces d'un espace vectoriel de dimension finie** | |
| Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie. Cas d'égalité. | |
| Supplémentaires d'un sous-espace : existence, dimension commune, caractérisation par l'intersection et les dimensions. | |
| Dimension de la somme de deux sous-espaces. | Formule de Grassmann. |

## 2.3. Applications linéaires

| Contenus | Commentaires |
|---|---|
| **a) Généralités** | |
| Applications linéaires, endomorphismes. | |
| Opérations et règles de calcul sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composée. | |
| Image directe d'un sous-espace vectoriel. | |
| Image et noyau. | Caractérisation de l'injectivité d'une application linéaire à l'aide de son noyau. |
| **b) Isomorphismes** | |
| Isomorphismes, automorphismes. | |
| Réciproque d'un isomorphisme, composée d'isomorphismes. | Le groupe linéaire $\mathrm{GL(E)}$. |
| Caractérisation des isomorphismes par les bases. | |
| Espaces isomorphes, caractérisation par la dimension. | Application à la dimension de l'espace des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, détermination d'une base. |
| Si E et F ont même dimension finie alors une application linéaire de E dans F est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. | Cas particulier des endomorphismes. |
| **c) Modes de définition d'une application linéaire** | |
| Une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base. | |
| Une application linéaire définie sur $\mathrm{E} = \mathrm{E}_1 \oplus \mathrm{E}_2$ est entièrement déterminée par ses restrictions à $\mathrm{E}_1$ et $\mathrm{E}_2$. | |
| **d) Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel** | |
| Identité et homothéties. | Notation $\mathbb{I}_{\mathrm{E}}$ ou $\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. |
| Projecteurs et symétries associés à deux sous-espaces supplémentaires. | Caractérisations : $p \circ p = p$, $s \circ s = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$. |
| **e) Rang d'une application linéaire** | |
| Applications linéaires de rang fini. | |
| Invariance du rang par composition à droite ou à gauche par un isomorphisme. | |
| Théorème du rang : $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\mathrm{Ker}(u)$ sur $\mathrm{Im}(u)$. | Formule du rang : si de plus E est de dimension finie, alors $u$ est de rang fini et $$\dim(\mathrm{E}) = \dim(\ker(u)) + \mathrm{rg}(u).$$ |

| Contenus | Commentaires |
|---|---|
| **f) Équations linéaires** | |
| Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire. | Exemples des systèmes linéaires et des équations différentielles linéaires d'ordre un et deux.<br>La notion de sous-espace affine est hors programme mais a été évoquée dans le cours. |