

I. Questions de cours

1. Énoncé et démonstration de la formule de Taylor dans $\mathbb{K}_n[X]$.
2. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les dérivées successives.
3. Les familles de degrés étagés de $\mathbb{K}[X]$ sont libres.

II. Exercices

Les exercices porteront strictement sur les thèmes suivants :

CONTENUS	COMMENTAIRES
a) L'ensemble $\mathbb{K}[X]$	
L'ensemble $\mathbb{K}[X]$. Opérations : somme, produit, composée. Degré d'un élément de $\mathbb{K}[X]$; coefficient dominant et terme de plus haut degré d'un polynôme non nul, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Fonction polynomiale associée à un polynôme.	
On convient que le degré du polynôme nul est $-\infty$. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n .	
b) Divisibilité et division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$; diviseurs et multiples. Division euclidienne d'un élément A de $\mathbb{K}[X]$ par un élément B de $\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.	
c) Dérivation dans $\mathbb{K}[X]$	
Dérivée formelle d'un élément de $\mathbb{K}[X]$. Linéarité de la dérivation, dérivée d'un produit. Dérivée k -ième d'un polynôme. Formule de Leibniz. Formule de Taylor.	
Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale.	
d) Racines	
Racines (ou zéros) d'un polynôme. Caractérisation par la divisibilité.	

CONTENUS

COMMENTAIRES

Le nombre de racines d'un polynôme P non nul est majoré par le degré de P .

Multiplicité d'une racine. Caractérisation par les dérivées successives.

Polynôme scindé sur $\mathbb{K}$.

Injectivité de l'application qui à un polynôme P de $\mathbb{K}[X]$ associe la fonction polynomiale associée.

e) Décomposition en facteurs irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$

Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

Description des polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$.

Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.

f) Relations coefficients-racines

Fonctions symétriques élémentaires. Relations coefficients-racines;

Cas des polynômes du second degré.

Calcul de deux nombres connaissant leur somme et leur produit.
