



On étudie la structure d'espace vectoriel et en particulier les espaces de dimension finie qui généralisent les espaces de coordonnées $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ bien connus.



Broc et violon, Georges Braque

10	Théorie de la dimension	1
1	Géométrie des familles de vecteurs	2
1.1	Familles génératrices	2
1.2	Familles libres	2
1.3	Bases	4
2	Définition de la dimension et formulaire	5
2.1	Espaces vectoriels de dimension finie	5
2.2	Isomorphismes	8
2.3	Définition d'une application linéaire par l'image d'une base	9
2.4	Dimension d'un produit et des espaces d'applications linéaires	10
2.5	Dimension d'une somme	11
2.6	Rang d'une famille de vecteurs	12
3	Applications linéaires de rang fini	13
4	Formes linéaires et hyperplans	14
5	Aspects algorithmiques dans les espaces canoniques $\mathbb{K}^n$	15
5.1	Opérations sur une famille de vecteurs	15
5.2	Utilisation de systèmes linéaires	16
6	Tests	18
7	Solutions	20

1. Géométrie des familles de vecteurs

1.1. Familles génératrices

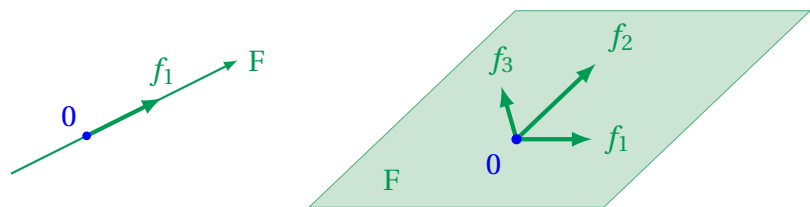
On s'intéresse aux familles permettant de générer par combinaison linéaire tous les autres vecteurs.

Définition 10.0. Familles génératrices (10.1)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Une famille finie $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs est dite génératrice de E si $E = \text{Vect}(u_i)_{i \in I}$.

Comme $\text{Vect } \emptyset = \{0\}$ par convention, la famille vide est génératrice de l'espace nul $\{0\}$.

Ci-contre, des exemples de famille génératrice dans le plan puis l'espace à trois dimensions. Dans le second cas, (f_1, f_2, f_3) est génératrice de F mais (f_1, f_2) , (f_2, f_3) et (f_3, f_1) sont également génératrices de F .



✕ Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $e_i := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$ (le 1 est en position i).

La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$ car $\forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i e_i$

✕ La famille (u, v) , où $u = (1, 1)$ et $v = (2, 1)$, est génératrice de $\mathbb{R}^2$. En effet, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $au + bv = (x, y)$, i.e. $a + 2b = x$ et $a + b = y$.

En effet, la matrice $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible (on a $\det A = -1 \neq 0$)

✕ La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ car $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $M = \sum_{1 \leq i, j \leq n} M_{i,j} E_{i,j}$.

✕ La famille $(f_0, f_1) = (x \mapsto 1, x \mapsto x)$ est génératrice du sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ formé des fonctions affines. En effet, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et $f : x \mapsto ax + b$, on a $f = bf_0 + af_1$.

1.2. Familles libres

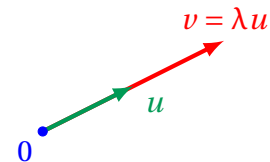
Nous allons généraliser la notion de colinéarité au cas d'un $\mathbb{K}$ -ev quelconque puis étendre cette notion aux familles finies de vecteurs.

Définition 10.1. Colinéarité

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, u et v deux vecteurs de E . On dit que :

$\Rightarrow u$ est colinéaire à v s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$;

$\Rightarrow u$ et v sont colinéaires s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.



Bref, u et v sont colinéaires si et seulement si u est colinéaire à v ou v colinéaire à u . On prendra garde à ce que, pour tout vecteur $u \neq 0$, u n'est pas colinéaire à 0 mais les vecteurs u et 0 sont colinéaires.

Soit u_1, u_2 des vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E . Démontrons que u_1 et u_2 sont colinéaires si et seulement si :

$$\exists (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2 \setminus \{(0, 0)\}, \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$$

- ⇒ Supposons u_1, u_2 colinéaires. Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $u_1 - \lambda u_2 = 0$ ou $\lambda u_1 - u_2 = 0$. Posons $(\lambda_1, \lambda_2) = (1, -\lambda)$ dans le premier cas et $(\lambda_1, \lambda_2) = (\lambda, -1)$ dans le second, on a $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ et $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$.
- ⇒ Réciproquement, supposons l'existence de $(\lambda_1, \lambda_2) \neq (0, 0)$ tel que $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0$. Si $\lambda_1 \neq 0$, alors $u_1 = (-\lambda_2/\lambda_1) u_2$ donc u_1 est colinéaire à u_2 . Et de même, dans le cas où $\lambda_2 \neq 0$.

Cette définition équivalente a l'avantage de ne pas briser la symétrie entre les deux vecteurs et sera donc plus facilement généralisable à plus de trois vecteurs.

Définition 10.2. Familles liées, relation de liaison

Une famille finie $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est liée s'il existe $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I$ *non nulle* telle que

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0$$

Une telle égalité s'appelle une relation de dépendance linéaire (ou encore une relation de liaison).

- ✗ La famille réduite au vecteur nul (0) est toujours liée car $1 \cdot 0 = 0$. Plus généralement, toute famille contenant le vecteur nul est liée.
- ✗ Déterminons les relations de liaison entre les vecteurs u_1, u_2, u_3 et u_4 de $\mathbb{R}^3$ définis par

$$u_1 = (1, 1, 1), \quad u_2 = (1, 2, 3), \quad u_3 = (1, 1, 0), \quad u_4 = (1, 3, 5)$$

$\sum_{i=1}^4 \lambda_i u_i = 0$ équivaut à $(\lambda_1, \dots, \lambda_4)$ est solution du système homogène de matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \sim_L \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ on trouve les solutions } (\lambda_4, -2\lambda_4, 0, \lambda_4) \text{ où } \lambda_4 \in \mathbb{R}$$

- ✗ Soit $f_0 : x \mapsto 1$, $f_1 : x \mapsto \cos 2x$ et $f_2 : x \mapsto \cos^2 x$; (f_0, f_1, f_2) est une famille liée car $f_1 = 2f_2 - f_0$.

Définition 10.3. Familles libres (≠ 10.2)

Une famille finie $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est libre si elle n'est pas liée. Ceci équivaut à :

$$\forall (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, \left(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = 0 \implies \forall i \in I, \lambda_i = 0 \right)$$

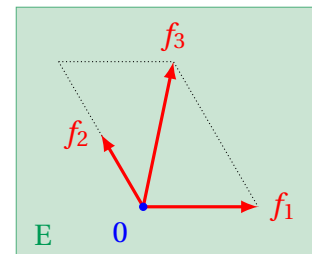
- ✗ La famille vide est libre. Pour tout $u \in E$, la famille (u) est libre *si et seulement si* $u \neq 0$.
- ✗ Pour tous u et v dans E , (u, v) est libre *si et seulement si* u et v ne sont pas colinéaires.

Dans la figure ci-contre, la famille (f_1, f_2, f_3) est liée car on a par exemple

$$f_1 + 2f_2 - f_3 = 0$$

Cette égalité est une relation de liaison entre les vecteurs f_i .

En revanche, les familles (f_1, f_2) , (f_2, f_3) et (f_3, f_1) sont libres car les f_i sont deux à deux non-colinéaires.



- ✗ On reprend les notation du premier exemple donné à la page 2. La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est libre.

- ✗ La famille (u_1, u_2, u_3) est libre où $u_1 = (1, 2, 3)$, $u_2 = (2, 3, 1)$ et $u_3 = (3, 2, 1)$. En effet, $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \in \mathbb{R}^3$ vérifie $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$, i.e. $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ est solution du système homogène de matrice :

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & -5 & -8 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Comme cette matrice est inversible (cf. la dernière matrice triangulaire sans zéro sur la diagonale), la seule solution est le triplet nul, ce qui justifie la liberté de la famille.

- ✗ La famille (f, g, h) est libre dans $\mathbb{R}^{[0, +\infty[}$ où $f : x \mapsto x$, $g : x \mapsto \ln x$ et $h : x \mapsto e^x$. Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que
- $$\forall x > 0, ax + b \ln x + ce^x = 0$$

En particulier, pour $x > 0$, on a $ae^{-x}x + be^{-x} \ln x + c = 0$.

✓ Comme $e^{-x}x$ et $e^{-x} \ln x$ tendent vers 0 quand x tend vers $+\infty$ (par croissances comparées), on en déduit que $c = 0$ par passage à la limite. Ainsi pour tout $x > 0$, $a + b \frac{\ln x}{x} = 0$.

✓ Comme $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, on en déduit que $a = 0$ par passage à la limite.

✓ Finalement, pour tout $x > 0$, $b \ln x = 0$ d'où $b = 0$ (en choisissant par exemple $x = e$).

La famille (f, g, h) est bien libre. Finalement, ce sont les ordres de grandeurs différents en $+\infty$ qui interdisent toute relation de liaison entre les trois vecteurs : $\ln x \ll x \ll e^x$.

- ✗ Le lecteur abordera avec profit le test (✗ 10.3).

La liberté est un principe d'identification. Par exemple, deux fonctions polynomiales qui sont égales ont les mêmes coefficients : pour tout $(a, b, c, a', b', c') \in \mathbb{R}^6$

$$(\forall x \in \mathbb{R}, ax^2 + bx + c = a'x^2 + b'x + c') \implies a = a', b = b' \text{ et } c = c'$$

Cette *identification* est justifiée par la liberté de la famille $(x \mapsto 1, x \mapsto x, x \mapsto x^2)$ dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Famille libre et identification

Soit $(u_i)_{i \in I}$ une famille finie libre d'un $\mathbb{K}$ -ev E , $(\lambda_i)_{i \in I}$ et $(\mu_i)_{i \in I}$ des éléments de $\mathbb{K}^I$. On a

$$\left(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i = \sum_{i \in I} \mu_i u_i \right) \implies \forall i \in I, \lambda_i = \mu_i$$

1.3. Bases

Définition 10.4. Bases d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel (✗ 10.4)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $(b_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E .

⇒ On dit que $(b_i)_{i \in I}$ est une base si elle est libre et génératrice de E , i.e.

$$\forall x \in E, \exists ! (x_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I, x = \sum_{i \in I} x_i b_i$$

⇒ Les x_i sont appelées les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

⇒ Lorsque $I = [1, n]$, $\text{mat}_{\mathcal{B}}(x) := \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ est la matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$.

Le lecteur est renvoyé aux exemples de la page 2 pour les notations qui suivent.

✕ La famille $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée base canonique de $\mathbb{K}^n$.

✕ La famille $(E_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, appelée également base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Le lecteur sait bien que si $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ sont des vecteurs du plan de coordonnées $(1, 2)$ et $(1, 1)$ dans une base, alors $2\mathbf{u}$ et $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ sont de coordonnées $(2, 4)$ et $(2, 3)$ dans la même base. Plus généralement :

Proposition 10.4. Linéarité des coordonnées dans une base

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . L'application de E dans $\mathbb{K}^n$ qui à un vecteur u de E associe ses coordonnées dans $\mathcal{B}$ est un isomorphisme.

Cette proposition, de démonstration très simple, est essentielle car elle permet de ramener des questions d'algèbre linéaire posées dans des espaces quelconques¹ à des calculs dans les espaces canoniques $\mathbb{R}^p$ où l'on dispose d'outils tels que les matrices, les systèmes linéaires, etc.

2. Définition de la dimension et formulaire

La dimension est une formalisation de l'idée de degré(s) de liberté dans le cadre d'espaces vectoriels.

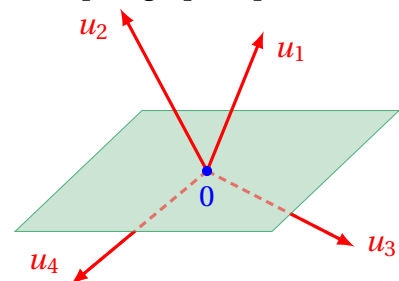
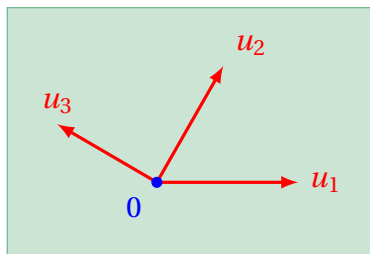
2.1. Espaces vectoriels de dimension finie

Définition 10.5. $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie

Un $\mathbb{K}$ -ev E est dit de dimension finie s'il admet une famille génératrice finie.

Par exemple, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ sont des $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie d'après les paragraphes précédents.

Le lemme suivant est très intuitif d'un point de vue géométrique : trois vecteurs du plan forment toujours une famille liée, de même pour quatre vecteurs dans notre espace ambiant à trois dimension.



Lemme 10.5. Lemme de Steinitz

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de famille génératrice $(g_1, \dots, g_n)$ et $p > n$. Toute famille de p vecteurs de E est liée.

C'est sur le lemme que repose la notion de dimension.

Proposition 10.6. Théorèmes de la base incomplète et de la base extraite

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $\mathcal{G}$ une famille génératrice finie de E .

- On peut compléter toute famille libre $\mathcal{L}$ de E en une base en lui ajoutant des vecteurs de $\mathcal{G}$.
- On peut extraire une base de E de la famille $\mathcal{G}$.

1. Comme par exemple le caractère générateur ou libre d'une famille.

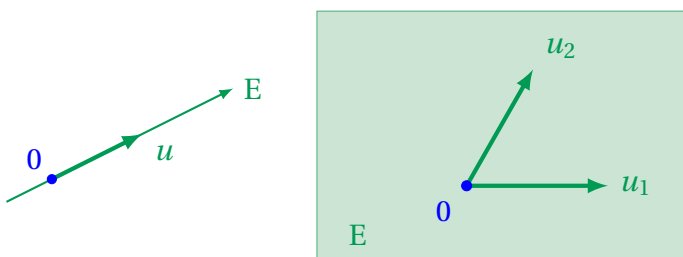
Proposition 10.7. Définition de la dimension (10.5)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie.

- a.** E admet au moins une base. **b.** Toutes les bases de E comportent le même nombre de vecteurs. Le nombre de vecteurs d'une base de E est appelé dimension de E et noté $\dim E$.

On commence par un peu de vocabulaire sur les dimensions $n \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$.

- ✗ Puisque la seule base de l'espace nul $\{0\}$ est par convention la famille vide, on a $\dim \{0\} = 0$.
- ✗ Un espace vectoriel E est de dimension un *si et seulement si* il existe un vecteur $u \neq 0$ tel que $E = \text{Vect } u$. Ces espaces sont appelés des *droites vectorielles*.
- ✗ Un espace vectoriel E est de dimension deux *si et seulement si* il existe des vecteurs u et v non colinéaires tels que $E = \text{Vect}(u, v)$. Ces espaces sont appelés des *plans vectoriels*.

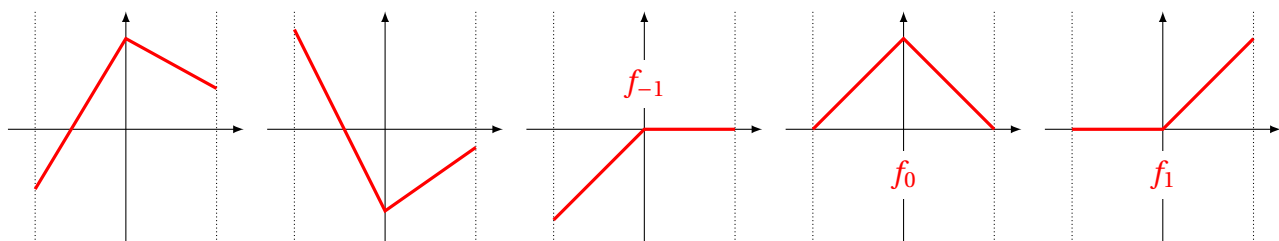


- ✓ Tout vecteur non nul d'une droite vectorielle E est une base de E .
- ✓ Tout couple de vecteurs non colinéaire d'un plan vectoriel E est une base de ce plan.

- ✗ Tout $\mathbb{C}$ -ev E admet une structure de $\mathbb{R}$ -ev obtenue par restriction de l'opération des scalaires sur les vecteurs à $\mathbb{R}$. Si E est de dimension finie sur $\mathbb{C}$, alors il l'est aussi sur $\mathbb{R}$ avec une dimension double :

$$\dim_{\mathbb{R}} E = 2 \dim_{\mathbb{C}} E \quad (\text{les indices permettent de distinguer les deux structures vectorielles})$$

- ✓ La famille (1) est une base du $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$ car elle est libre (une famille à seul vecteur est libre *si et seulement si* ce vecteur est non nul) et elle est génératrice car pour tout z dans $\mathbb{C}$, on a $z = z \cdot 1$.
- ✓ La famille $(1, i)$ est une base du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$ car elle est libre (on a $a + ib = 0 \implies a = b = 0$ pour tous réels a et b) et elle est génératrice car pour tout z dans $\mathbb{C}$, on a $z = \text{Re } z + \text{Im } z \cdot i$.
- ✗ L'espace canonique $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $\dim \mathbb{K}^n = n$, car $(e_1, \dots, e_n)$ (cf. page 2) est une base de $\mathbb{K}^n$.
- ✗ $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension np sur $\mathbb{K}$ car la famille $(E_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$ est une base de cet espace. En particulier, $\dim \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = n^2$.
- ✗ L'ensemble A des suites arithmétiques est un plan vectoriel car $((1)_{n \in \mathbb{N}}, (n)_{n \in \mathbb{N}})$ en est une base.
- ✗ Considérons l'espace vectoriel réel E des fonctions $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que les restrictions $f|_{[-1,0]}$ et $f|_{[0,1]}$ soient affines :



On conjecture que $\dim E = 3$ car un élément de E possède exactement trois degrés de liberté : les ordonnées aux points d'abscisses $-1, 0$ et 1 . En notant a, b et c ces trois ordonnées, un élément f de E est défini par

$$\forall x \in [-1, 0], f(x) = a + (b - a)(x + 1) \text{ et } \forall x \in [0, 1], f(x) = b + (c - b)x$$

Ainsi $f = af_{-1} + bf_0 + cf_1$ où

$$f_{-1} : x \mapsto \begin{cases} -x & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 0 & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}, f_0 : x \mapsto \begin{cases} x + 1 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases} \text{ et } f_1 : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [-1, 0] \\ x & \text{si } x \in [0, 1] \end{cases}$$

La famille (f_{-1}, f_0, f_1) est donc génératrice de E . Elle est libre car si $af_{-1} + bf_0 + cf_1 = 0$, alors en évaluant en $-1, 0$ et 1 , on obtient $a = b = c = 0$.

Une fois la dimension définie, le lemme de Steinitz se reformule ainsi :

Proposition 10.8. Cardinal d'une famille libre, d'une famille liée

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n .

- a. Toute famille libre de E comporte au maximum n vecteurs;
- b. Toute famille génératrice de E comporte au minimum n vecteurs.

Quand la dimension d'un espace vectoriel est connue, il est plus facile de prouver qu'une famille est une base de E : la proposition suivante « divise par deux » les justifications.

Proposition 10.9. Caractérisation des bases dans un espace de dimension n

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et $\mathcal{C} = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E . Alors, il y a équivalence entre les propositions suivantes :

- a. $\mathcal{C}$ est une base de E ;
- b. $\mathcal{C}$ est génératrice de E ;
- c. $\mathcal{C}$ est libre.

Les sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie sont tous de dimension finie et leur dimension est majorée par celle de E .

Proposition 10.10. Dimension d'un sev

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Si F un sev de E , alors F est un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$, avec égalité si et seulement si $F = E$.

Le cas d'égalité a une importante conséquence pratique.

Prouver l'égalité de deux espaces vectoriels de dimension finie

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie. Pour établir que $E = F$, on peut :

- ⇒ Raisonner par double inclusion.
- ⇒ Monter seulement l'inclusion $F \subset E$ puis justifier que $\dim F = \dim E$.

2.2. Isomorphismes

Les isomorphismes sont facilement caractérisés via les bases.

Proposition 10.11. Caractérisation des isomorphismes

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimensions finies et $\mathcal{B}$ une base de E . L'application f est bijective si et seulement si l'image par f de $\mathcal{B}$ est une base de F .

Le théorème suivant est analogue à celui sur les bijections entre ensembles finis de même cardinal.

Proposition 10.12. Isomorphismes entre espaces de même dimension (⚡ 10.7)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de même dimension finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a.** f est un isomorphisme; **b.** f est injective; **c.** f est surjective.

Cette proposition permet de simplifier les preuves de bijectivité dans le cadre des applications linéaires en dimension finie.

- ✕ Soit E de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ inversible à droite, i.e. telle que $\exists g \in \mathcal{L}(E)$, $f \circ g = \text{id}_E$. Comme l'identité est surjective, on en déduit que f l'est aussi : c'est donc un isomorphisme par la proposition précédente. Ainsi $f^{-1} \circ f \circ g = f^{-1} \circ \text{id}_E$, d'où $g = f^{-1}$. On a bien évidemment la même conclusion pour l'inversibilité à gauche.
- ✕ Les équivalences de la proposition précédente sont fausses en dimension infinie. Posons $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
 - ✓ L'opérateur de décalage à droite $\sigma_+ : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas injectif (son noyau est l'ensemble des suites nulles à partir du rang 1) mais surjectif.
 - ✓ L'opérateur de décalage à gauche $\sigma_- : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (0, u_0, u_1, \dots)$ est injectif (son noyau est nul) mais non surjectif (toute suite appartenant à son image a son premier terme nul).

Les isomorphismes permettent de formaliser l'idée que « deux $\mathbb{K}$ -ev ont la même structure ».

Définition 10.13. Espaces isomorphes (⚡ 10.8)

Deux espaces vectoriels E et F sont dits isomorphes s'il existe un isomorphisme $f : E \rightarrow F$.

Il est clair que $\simeq$ est réflexive, symétrique et transitive. L'adjectif « *isomorphe* » vient du grec, de *isos*, même, et *morphê*, forme. Deux espaces isomorphes ont la même forme, dans le sens qu'il n'est pas possible de distinguer un espace d'un autre espace isomorphe par ses propriétés : tout énoncé dans l'un se traduit par un énoncé similaire dans l'autre, où seuls les noms des objets ont changés via un isomorphisme. Deux espaces isomorphes sont donc différents nominalement mais indiscernables intrinsèquement : c'est un « copié-collé le structure de $\mathbb{K}$ -ev ».

Proposition 10.14. Dimension et espaces isomorphes

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev isomorphes. Si E est dimension finie, alors F aussi et $\dim F = \dim E$.

- ✘ Il s'agit en fait d'une équivalence. Tout $\mathbb{K}$ -ev E de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$. En effet, une base $\mathcal{B}$ de E étant choisie, on a un isomorphisme $\phi : E \rightarrow \mathbb{K}^n$, $x \mapsto \text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$. C'est grâce à cet isomorphisme que le choix d'un repère en géométrie du plan ou de l'espace permet de réduire tout problème ne faisant pas intervenir les distances ni les angles à de l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ (parallélisme, intersection de droites, etc).

Cette proposition offre une nouvelle méthode pour calculer la dimension d'un $\mathbb{K}$ -ev.

Calculer la dimension d'un $\mathbb{K}$ -ev

Pour calculer la dimension d'un $\mathbb{K}$ -ev, on peut :

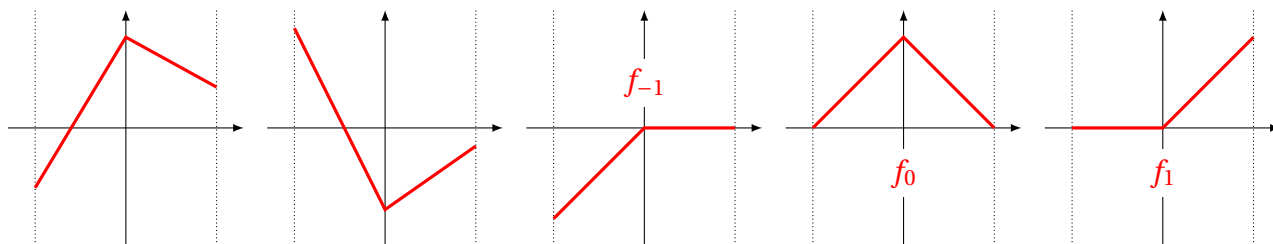
- ⇒ Revenir à la définition en trouvant une base de E ;
- ⇒ Trouver un espace isomorphe à E dont la dimension est connue.

- ✘ Pour $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on note $E := \{(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$. Un élément de E admet exactement « deux degrés de liberté indépendants » : ses deux premiers termes. Ceci nous offre un isomorphisme naturel entre E et $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} &\longmapsto (u_0, u_1) \end{aligned}$$

Ainsi, E est de dimension finie et $\dim E = \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

- ✘ On note E l'ensemble des fonctions $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ continues et telles que les restrictions $f|_{[-1, 0]}$ et $f|_{[0, 1]}$ soient affines. Nous avons déjà trouvé une base (f_{-1}, f_0, f_1) et donc la dimension de E .



L'idée des trois degrés de liberté que sont les ordonnées aux points d'abscisses -1 , 0 et 1 nous met naturellement sur la piste d'un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{R}^3 && \text{(facile à démontrer)} \\ f &\longmapsto (f(-1), f(0), f(1)) \end{aligned}$$

On en déduit à nouveau que E est de dimension finie et $\dim E = \dim \mathbb{R}^3 = 3$.

2.3. Définition d'une application linéaire par l'image d'une base

On suppose ici que E et F sont de dimensions finies n et p ; on note $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Soit $x \in E$. Notons $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$. On a

$$f(x) = f\left(\sum_{k=1}^n x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^n x_k f(e_k) \quad (\star)$$

La connaissance de $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ suffit donc à calculer $f(x)$ pour tout $x \in E$. Plus précisément :

Proposition 10.15. Définition par l'image d'une base (§ 10.9)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n et de base $(e_1, \dots, e_n)$, et F un $\mathbb{K}$ -ev. L'application suivante est un isomorphisme :

$$\begin{aligned} \phi : \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow F^n \\ f &\longmapsto (f(e_1), \dots, f(e_n)) \end{aligned}$$

Supposons de plus que F est dimension finie p et considérons $(f_1, \dots, f_p)$ une base de F . En notant $A := \text{mat}_{\mathcal{C}}(f(e_1), \dots, f(e_n))$, $X = \text{mat}_{\mathcal{B}}(x)$ et $Y = \text{mat}_{\mathcal{C}}(f(x))$, la relation $(\star)$ est équivalente à $Y = AX$. Nous reviendrons dans un chapitre ultérieur sur le lien entre les matrices et les applications linéaires.

✕ À titre d'exemple, considérons un $\mathbb{K}$ -ev E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $x \in E \setminus \{0\}$ et $y \in E$. Démontrons l'existence de $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(x) = y$. Comme x est non nul, on peut compléter la famille libre (x) en une base $\mathcal{B} := (x, x_2, \dots, x_n)$ de E . On sait alors qu'il existe un endomorphisme f de E tel que $f(x) = y$ et $f(x_i) = 0$ pour tout i entre 2 et n . Il faut bien comprendre ici que la difficulté est de trouver une application linéaire vérifiant $f(x) = y$. Par exemple, une construction telle que $f(x) := y$ et $\forall x' \in E \setminus \{x\}, f(x') := 0$ est incorrecte car non linéaire en général (sauf dans le cas où $y = 0$).

Le lecteur est renvoyé au test (§ 10.10) pour s'entraîner.

2.4. Dimension d'un produit et des espaces d'applications linéaires

Nous poursuivons par le cas d'un produit de deux espaces vectoriels E_1 et E_2 de dimensions finies. D'un point de vue intuitif et en ayant en tête le cas particulier des espaces canoniques $\mathbb{K}^n$, un couple (x_1, x_2) de $E_1 \times E_2$ possède $\dim E_1$ degrés de liberté pour x_1 et $\dim E_2$ degrés de liberté pour x_2 , donc au total $\dim E_1 + \dim E_2$ degrés de liberté.

Proposition 10.16. Dimension d'un produit

Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies. L'espace vectoriel produit $E_1 \times E_2$ est de dimension finie et $\dim E_1 \times E_2 = \dim E_1 + \dim E_2$.

On généralise sans peine cette proposition à des $\mathbb{K}$ -ev $E_1, \dots, E_p$ de dimension finie :

$$\dim \prod_{i=1}^p E_i = \sum_{i=1}^p \dim E_i$$

Proposition 10.17. Dimension des espaces d'applications linéaires

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev de dimensions finies. L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

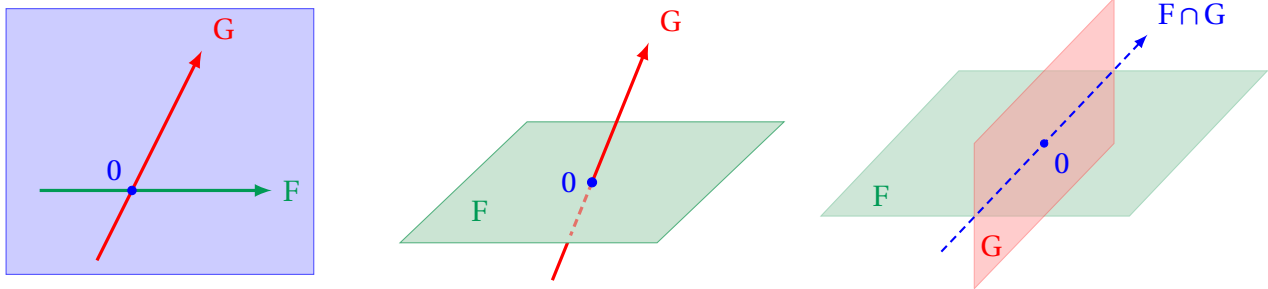
Les deux démonstrations données de cette proposition sont extrêmement importantes et illustrent les constants aller-retours possibles entre les registres géométrique (vecteurs) et numérique (matrices).

2.5. Dimension d'une somme

L'intuition géométrique est claire :

⇒ si deux sev F et G sont en somme directe, alors $\dim F \oplus G = \dim F + \dim G$;

⇒ dans le cas général, $\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$.



Définition 10.18. Base adaptée à une somme directe

Soit F et G deux sev en somme directe d'un $\mathbb{K}$ -ev E . Si $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_m)$ des bases de F et G . La famille $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$ est une base de $F \oplus G$. Cette base est dite adaptée à la somme directe $F \oplus G$.

On en déduit directement le résultat suivant.

Proposition 10.19. Dimension d'une somme directe

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E . Si F et G sont de dimensions finies et en somme directe, alors $F \oplus G$ est de dimension finie et $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$.

Nous allons appliquer ce qui précède aux supplémentaires.

Proposition 10.20. Existence et dimension des supplémentaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie et F un sev de E .

- F admet au moins un supplémentaire dans E ;
- tous les supplémentaires de F dans E sont de dimension $\dim E - \dim F$.

Le cas général est connu sous le nom de *formule de Grassmann*.

Proposition 10.21. Dimension d'une somme, formule de Grassmann

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, F et G deux sev de E . Si F et G sont de dimensions finies, alors $F + G$ aussi et

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim F \cap G$$

La connaissance des dimensions permet de simplifier les démonstrations.

Proposition 10.22. Caractérisation des sev supplémentaires (§ 10.11)

Soit F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a. F et G sont supplémentaires dans E (i.e. $E = F \oplus G$);
- b. $E = F + G$ et $\dim E = \dim F + \dim G$; c) $F \cap G = \{0\}$ et $\dim E = \dim F + \dim G$.

✕ Considérons par exemple $F := \{(x, y, z); x + y + 2z = 0\}$ et $G := \text{Vect } u$ où $u = (1, 1, 1)$. Démontrons que F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. On a $\dim G = 1$ car $u \neq 0$. De plus

$$F = \{(y - 2z, y, z); (y, z) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(v, w) \text{ où } v := (1, 1, 0) \text{ et } w := (-2, 0, 1)$$

Puisque v et w ne sont pas colinéaires, on a $\dim F = 2$. Ainsi $\dim \mathbb{R}^3 = \dim F + \dim G$. Il suffit donc de vérifier que F et G sont en somme directe, i.e. $F \cap G = \{0\}$. Ceci est immédiat car $u \notin F$.

On étend facilement la notion de base adaptée à une somme directe quelconque. Le théorème suivant vient parachever cette section sur les sommes de sev.

Proposition 10.23. Dimension d'une somme directe

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sev d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- a. $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe;
- b. $\dim \sum_{i=1}^p E_i = \sum_{i=1}^p \dim E_i$.

2.6. Rang d'une famille de vecteurs**Définition 10.24. Rang d'une famille de vecteurs**

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $(u_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E . On appelle rang de $(u_i)_{i \in I}$ et l'on note $\text{rg}(u_i)_{i \in I}$ la dimension du sous-espace $\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$.

Comme le nombre de vecteurs d'une famille génératrice d'un sev de dimension finie est minorée par la dimension de ce sev, on a toujours $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) \leq n$. On peut aller plus loin et caractériser les propriétés d'une famille de vecteurs au moyen de son rang.

Proposition 10.24. Rang d'une famille (§ 10.12)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $(u_1, \dots, u_n)$ une famille de vecteurs de E .

- a. $(u_1, \dots, u_n)$ est libre si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = n$;
- b. Si E est dimension finie, $(u_1, \dots, u_n)$ est génératrice de E si et seulement si $\text{rg}(u_1, \dots, u_n) = \dim E$.

Nous verrons dans la dernière section de ce cours comment calculer le rang d'une famille de vecteurs d'un espace canonique $\mathbb{K}^n$ au moyen de l'algorithme du pivot.

3. Applications linéaires de rang fini

La notion de rang d'une application linéaire f donne une précision géométrique sur l'espace vectoriel des valeurs prises par f .

Définition 10.25. Application linéaire de rang fini

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On dit que f est de rang fini si $\text{Im } f$ est de dimension finie. Dans ce cas, on appelle rang de f et l'on note $\text{rg } f$ la dimension de $\text{Im } f$.

Si l'un des deux espaces E ou F est de dimension finie, alors toute application f de $\mathcal{L}(E, F)$ est de rang fini. La proposition suivante fait le lien avec la notion de rang pour les familles de vecteurs.

Proposition 10.26. Rang

Avec les notations précédentes et $E = \text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$, f est de rang fini et $\text{rg } f = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

- ✗ On commence par une inégalité simple mais importante. Le rang de $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est inférieur à $\min(\dim E, \dim F)$. Considérons une base $(e_1, \dots, e_n)$ de E .
- ✓ On a $\text{rg } f = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n)) \leq n = \dim E$ car $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille génératrice de $\text{Vect}(f(e_1), \dots, f(e_n))$;
- ✓ On a $\text{rg } f \leq \dim F$ car $\text{Im } f \subset F$.
- ✗ On vérifie que $\text{rg } f + \dim \text{Ker } f$ est égal à la dimension de l'espace de départ dans les cas suivants :
 - ✓ $f_1: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on a $\text{Ker } f_1 = \{0\}$ et $\text{Im } f_1 = \text{Vect}(u, v)$ où $u := (1, 1, 0)$ et $v := (0, 1, 1)$.
 $(x, y) \mapsto (x, x + y, y)$
 - ✓ $f_2: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, on a $\text{Ker } f_2 = \text{Vect } u$ et $\text{Im } f_2 = \mathbb{R}^2$ où $u := (1, -1, 1)$.
 $(x, y, z) \mapsto (x - z, x + y)$
 - ✓ $f_3: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, on a $\text{Ker } f_3 = \{0\}$ et $\text{Im } f_3 = \mathbb{R}^3$.
 $(x, y, z) \mapsto (z, x + y, y)$

Cette relation est en fait générale et appelée *formule du rang*.

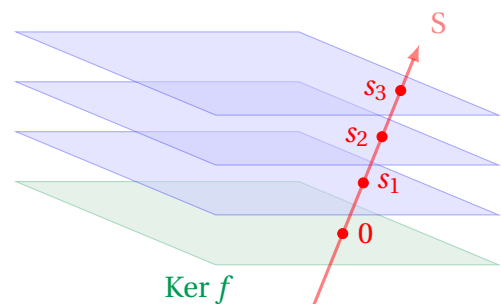
Proposition 10.27. Théorème et formule du rang (§ 10.13)

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$.

- a. f induit un isomorphisme de tout supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E sur son image $\text{Im}(f)$.
- b. Si E est dimension finie, alors f est de rang fini et $\dim E = \text{rg } f + \dim \text{Ker } f$.

L'interprétation géométrique du théorème du rang est claire.

L'application linéaire f est constante sur les espaces affines de direction $\text{Ker } f$ (des plans parallèles dans la figure ci-contre) et chacun de ses espaces affines ne rencontre un supplémentaire S de $\text{Ker } f$ qu'en un seul point : la restriction de f à S réalise une bijection linéaire de S sur $\text{Im } f$.



Le lecteur est renvoyé au test (10.14).

4. Formes linéaires et hyperplans

On s'intéresse dans ce paragraphe aux applications linéaires d'un $\mathbb{K}$ -ev E dans son corps de base $\mathbb{K}$. Elles permettent de définir les équations linéaires les plus simples possibles.

Définition 10.28. Forme linéaire, hyperplan

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

- ⇒ Une forme linéaire sur E est une application linéaire de E dans $\mathbb{K}$.
- ⇒ L'espace vectoriel $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ des formes linéaires sur E est appelé le dual de E .
- ⇒ Un sev de E est appelé hyperplan s'il est noyau d'une forme linéaire non nulle sur E .

✕ Soit $f : E \rightarrow \mathbb{K}$ une forme linéaire. L'ensemble $\text{Im } f$ est un sev de $\mathbb{K}$, ainsi $\text{Im } f = \{0\}$ ou $\text{Im } f = \mathbb{K}$: une forme linéaire est non nulle *si et seulement si* elle est surjective.

✕ *Formes coordonnées.* Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$:

$$\begin{aligned} \phi_i : E &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \text{coordonnée de } x \text{ selon } e_i \text{ dans la base } \mathcal{B} \end{aligned}$$

Les ϕ_i sont des formes linéaires appelées formes coordonnées. Elles sont non nulles car $\phi_j(e_j) = 1$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. De plus, $\text{Ker } \phi_j = \text{Vect}(e_i)_{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{j\}}$.

✕ *Trace :* l'application $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

Proposition 10.29.

Soit $f \in E^*$ et $v \in E$ tel que $f(v) \neq 0$. Alors $E = \text{Ker } f \oplus \text{Vect } v$.

Nous allons comprendre le lien entre les équations scalaires, les formes linéaires et les hyperplans. Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension n et de base $(e_1, \dots, e_n)$. Pour tout $x \in E$, on note $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées de x dans cette base.

✕ Soit $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Alors $F := \{x \in E; a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0\}$ est un hyperplan de E en tant que noyau de la forme linéaire non nulle définie par

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow \mathbb{K} & \text{i.e. } \phi &:= \sum_{i=1}^n a_i \phi_i \text{ (formes coordonnées dans la base } \mathcal{B}) \\ x &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i \end{aligned}$$

✕ Réciproquement, tout hyperplan de E admet une équation de la forme $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{0\}$. Soit H un hyperplan et $\phi \in E^*$ non nulle telle que $H = \text{ker } \phi$. Pour $x \in E$, on a

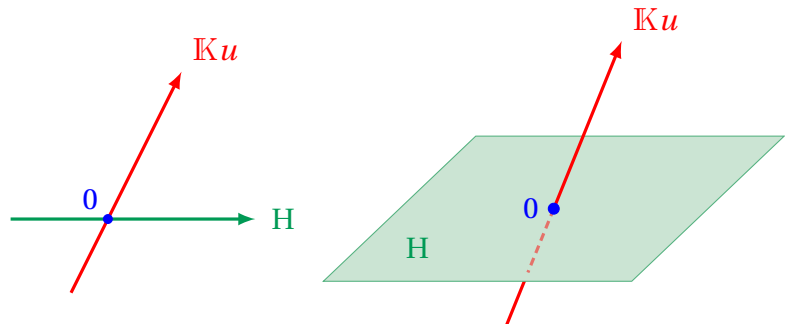
$$x \in H \iff \phi(x) = 0 \iff \phi\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = 0 \iff \sum_{i=1}^n \underbrace{\phi(e_i)}_{=: a_i} x_i = 0$$

On retiendra que l'ensemble des solutions d'une équation linéaire scalaire (i.e. s'écrivant sous la forme $a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = 0$) peut toujours être vue comme le noyau d'une forme linéaire sur E .

Proposition 10.30. Hyperplans en dimension finie (§ 10.15)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et soit H un sous-espace vectoriel de E . Alors H est un hyperplan de E si et seulement si $\dim H = n - 1$.

En particulier, dans un espace de dimension trois, un hyperplan est un plan vectoriel. Dans un espace de dimension deux, un hyperplan est une droite vectorielle. Dans un espace de dimension un, l'unique hyperplan est l'espace nul.



Le dernier résultat de cette partie montre que l'équation linéaire d'un hyperplan est essentiellement unique (à multiplication par un scalaire non nul près).

Proposition 10.31. Équations d'un hyperplan

Soit $f \in E^*$ non nulle et $H = \text{Ker } f$. Pour tout $g \in E^*$,

- a.** $H \subset \text{Ker } g \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \quad g = \lambda f;$ **b.** $H = \text{Ker } g \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad g = \lambda f.$

5. Aspects algorithmiques dans les espaces canoniques $\mathbb{K}^n$

En choisissant une base, les calculs dans un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie n se ramènent à l'espace canonique $\mathbb{K}^n$ des coordonnées. Nous allons dans ce paragraphe exposer quelques méthodes typiques.

5.1. Opérations sur une famille de vecteurs

Les opérations de pivots que nous avons effectués sur des vecteurs lignes ou colonnes s'étendent à une famille quelconque $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E : permuter deux vecteurs u_i et u_j , multiplier u_i par un scalaire λ non nul, ajouter λu_j à u_i (avec $i \neq j$).

On commence par un résultat fondamental qui va justifier la plupart des algorithmes de cette section.

Proposition 10.32. Opérations sur une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $(u_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E .

- a.** Le sev $\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$ est invariant par opérations de pivot sur les vecteurs u_i .
b. La relation $\text{Vect}(u_i)_{i \in I} = \text{Vect}(u_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$ équivaut à $u_{i_0} \in \text{Vect}(u_i)_{i \in I \setminus \{i_0\}}$.
c. Supposons $(u_i)_{i \in I}$ libre. La famille $(u_i)_{i \in I \cup \{i_0\}}$ est libre si et seulement si $u_{i_0} \notin \text{Vect}(u_i)_{i \in I}$.

Les **b.** et **c.** sont des évidences géométriques : dans une famille génératrice, on peut supprimer tout vecteur qui est combinaison linéaire des autres et on peut augmenter une famille libre en lui ajoutant un vecteur qui n'est pas combinaison linéaire des autres.

✘ Posons $u_1 := (1, 1, 2, 1)$, $u_2 := (2, 1, 1, 1)$, $u_3 := (4, 1, -1, 1)$ et $u_4 := (1, 1, 1, 2)$.

✓ Effectuons des opérations de pivot sur les vecteurs de cette famille, écrits en ligne :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{u_1} \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{u_2} \\ 4 & 1 & -1 & 1 & \mathbf{u_3} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{u_4} \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{u_1} \\ 0 & -1 & -3 & -1 & \mathbf{u_2-2u_1} \\ 0 & -3 & -9 & -3 & \mathbf{u_3-4u_1} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{u_4-u_1} \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{u_1} \\ 0 & -1 & -3 & -1 & \mathbf{u_2-2u_1} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \mathbf{u_4-u_1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{u_3-4u_1-3(u_2-2u_1)} \end{array}$$

✓ Ainsi $u_3 - 3u_2 + 2u_1 = 0$ et $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2 - 2u_1, u_4 - u_1)$ par le **a.** du 10.32.

✓ On en déduit que $\text{rg}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{rg}(u_1, u_2 - 2u_1, u_4 - u_1) = 3$. En effet :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{u_1} \\ \mathbf{0} & -1 & -3 & -1 & \mathbf{u_2-2u_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & 1 & \mathbf{u_4-u_1} \end{array}$$

Par le zéro en vert, la famille $(u_2 - 2u_1, u_4 - u_1)$ est libre car le premier vecteur n'est pas colinéaire au second. Par les zéros en rouge, on a directement que $u_1 \notin \text{Vect}(u_2 - 2u_1, u_4 - u_1)$ et donc que la famille $(u_1, u_2 - 2u_1, u_4 - u_1)$ est libre. On a ici appliqué le **c.** du 10.32.

✓ Comme $u_3 = 3u_2 - 2u_1$, on a $\text{Vect}(u_1, u_2, u_3, u_4) = \text{Vect}(u_1, u_2, u_4)$ par le **b.** du 10.32. La famille (u_1, u_2, u_4) est donc libre car de rang 3.

✘ À partir de ce calcul, il est très facile de compléter la famille libre (u_1, u_2, u_4) en une base de $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{u_1} \\ \mathbf{0} & -1 & -3 & -1 & \mathbf{u_2-2u_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -1 & 1 & \mathbf{u_4-u_1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{e_4} \end{array}$$

En ajoutant le vecteur canonique e_4 , on obtient que $\text{Vect}(u_1, u_2, u_4, e_4)$ est de dimension 4 par des arguments analogues à ceux développés ci-dessus. Ainsi (u_1, u_2, u_4, e_4) est une base de $\mathbb{R}^4$.

✘ Déterminons un système d'équations cartésiennes du sev $F := \text{Vect}(u_1, u_2, u_4)$.

✓ Soit $X := (x, y, z, t)$. Reprenons les calculs initiaux :

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \mathbf{u_1} \\ 2 & 1 & 1 & 1 & \mathbf{u_2} \\ 1 & 1 & 1 & 2 & \mathbf{u_4} \\ x & y & z & t & \mathbf{X} \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & -1 & -3 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \\ 0 & y-x & z-2x & t-x & \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & -1 & -3 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & z-2x-3(y-x) & t-x-(y-x) & \end{array} \sim \begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & \\ 0 & -1 & -3 & -1 & \\ 0 & 0 & -1 & 1 & \\ 0 & 0 & 0 & t-y+(x-3y+z) & \end{array}$$

✓ Comme (u_1, u_2, u_4) est libre, $X \in F \iff (u_1, u_2, u_4, X)$ est liée (par le **c.** 10.32). On en déduit que

$$X \in F \iff x - 4y + z + t = 0$$

5.2. Utilisation de systèmes linéaires

Comme nous l'avons entrevu au détour de quelques exemples, les systèmes linéaires apparaissent lorsque l'on étudie les relations de liaison.

✘ Soit $u_1 := (0, 1, 2, 3)$, $u_2 := (3, 2, 1, 0)$, $u_3 := (1, 1, 1, 1)$, $u_4 := (1, -1, -1, 1)$ et $u_5 := (2, 3, 1, 0)$.

✓ Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_5) \in \mathbb{R}^5$. Résolvons $\sum_{i=1}^5 \lambda_i u_i = 0$.

✓ Le vecteur $(\lambda_1, \dots, \lambda_5)$ est solution du système homogène de matrice $A := \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

✓ Par des opérations de pivots que nous ne détaillerons pas :

$$\begin{aligned}
 A &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -2 & 4 & -9 \\ 0 & 3 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \\
 &\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

✓ On en déduit les relations de liaisons : $\forall \lambda \in \mathbb{R}, -\frac{\lambda}{3}u_1 - \frac{\lambda}{3}u_2 + \lambda u_3 = 0$.

✗ On peut conclure de ce calcul de nombreux résultats.

- ✓ Les familles (u_1, u_2, u_3, u_4) et (u_1, u_2, u_4) sont respectivement liée et libre.
- ✓ La famille (u_1, u_2, u_4, u_5) est libre. Puisque que $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, c'est une base de $\mathbb{R}^4$.
- ✓ On en déduit que la famille $(u_1, \dots, u_5)$ est liée et génératrice de $\mathbb{R}^4$.
- ✓ On sait qu'en extrayant un des vecteurs u_1, u_2 ou u_3 de $(u_1, \dots, u_5)$, on obtient une base de $\mathbb{R}^4$.

Aspects algorithmiques

- ⇒ Pour extraire une base d'une famille génératrice, on détermine les relations de liaison.
- ⇒ Pour compléter une famille libre en une base, on *échelonne* la famille par l'algorithme du pivot.
- ⇒ Un sev F admet deux types de description :
 - ☞ *Paramétrique* : $F = \text{Vect}(u_1, \dots, u_p)$.
 - ☞ *Cartésienne* : F vérifie un système d'équations cartésiennes (une base étant choisie).
- ⇒ Pour calculer :
 - ☞ $F \cap G$: la description cartésienne est la plus adaptée, on concatène les équations de F et G .
 - ☞ $F + G$: la description paramétrique est la plus efficace, on concatène les bases de F et G .

6. Tests

10.1.

Donner des familles génératrices des sev $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

10.2.

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et a, b, c trois vecteurs de l'espace E .

- a. Soit $\lambda, \lambda', \mu, \mu'$ quatre scalaires. Critiquer l'implication suivante :

$$\lambda a + \mu b = \lambda' a + \mu' b \implies \lambda = \lambda' \text{ et } \mu = \mu'$$

- b. Critiquer les implications suivantes : (a, b) liée $\implies b \in \text{Vect}(a)$ et (a, b, c) liée $\implies c \in \text{Vect}(a, b)$.

10.3.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ et u, v, w trois vecteurs de E . On pose $u' = v + w$, $v' = u + w$ et $w' = u + v$. Établir que (u', v', w') est libre *si et seulement si* (u, v, w) est libre.

10.4.

Suite du test **10.1.** de la page **2**. Donner des bases des sev suivants de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

10.5.

Suite des tests **10.1.** et **10.4.** des pages **2** et **4**. Calculer les dimensions des sev suivants de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$: $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

10.6.

Espaces de dimension infinie.

- a. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $u_i = (\delta_{i,n})_{n \in \mathbb{N}}$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(u_0, u_1, \dots, u_k)$ est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Que peut-on en déduire quant à la dimension du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?
- b. Pour $i \in \mathbb{N}$, on pose $f_i : x \in \mathbb{R} \mapsto x^i$. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, la famille $(f_0, f_1, \dots, f_k)$ est libre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$. Que peut-on en déduire quant à la dimension de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour $n \in \mathbb{N}$, de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

10.7.

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x - y, -x + y, x - z)$. Prouver que f est un isomorphisme de $\mathbb{R}^3$ et expliciter son isomorphisme réciproque f^{-1} .

10.8.

Soit F et G des sous-espaces de E . Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

- a. $E = F \oplus G \implies E$ est isomorphe à $F \times G$; b. E est isomorphe à $F \times G \implies E = F \oplus G$.

10.9.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie $n \geq 2$, (u_1, u_2) une famille libre de E et $v \in E$. Montrer l'existence de $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f(u_1) = f(u_2) = v$.

10.10.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de base (e_1, e_2, e_3) .

- a. Existe-t-il un endomorphisme f de E tel que $f(e_1) = e_1$, $f(e_1 + e_2) = e_1$ et $f(e_1 + e_2 + e_3) = e_1$?
- b. Même question avec $f(e_2 + e_3) = e_2$, $f(e_1 + e_2) = e_3$ et $f(e_1 - e_3) = e_1$?

10.11.

Soit $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x = y = z\}$ et $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y = z\}$.

- a. Montrer que F et G sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$. Donner une interprétation géométrique. Trouver une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à cette décomposition en somme directe.
- b. Calculer le projeté sur F parallèlement à G d'un vecteur (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$. Même question en permutant F et G .

10.12.

Soit $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$ deux familles de vecteurs. Montrer que $\text{rg}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq \text{rg}(\mathcal{F}_1) + \text{rg}(\mathcal{F}_2)$.

10.13.

Soit $n < m$ deux entiers positifs. Que pensez-vous des assertions suivantes ?

- a. Il n'existe pas d'application linéaire surjective de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^m$.
- b. Il n'existe pas d'application linéaire injective de $\mathbb{K}^m$ dans $\mathbb{K}^n$.

10.14.

Trouver deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels E et F de dimensions infinies et $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang fini non nul.

10.15.

Soit H_1 et H_2 deux hyperplans distincts d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

- a. Prouver que $n \geq 2$.
- b. Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2) = n - 2$.

7. Solutions

10.1.

a. Pour tout $A \in \mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, on a

$$A = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} A_{i,j} E_{i,j}$$

ainsi $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

b. On prouve de même que $(E_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

c. Pour tout $A \in \mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, on a

$$A = \sum_{i=1}^n A_{i,i} E_{i,i}$$

ainsi $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.

d. Pour tout $A \in \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$, on a

$$A = \sum_{i=1}^n \frac{A_{i,i}}{2} 2E_{i,i} + \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j} (E_{i,j} + E_{j,i})$$

ainsi $(E_{i,j} + E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.

e. Pour tout $A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K})$, on a

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} A_{i,j} (E_{i,j} - E_{j,i})$$

ainsi $(E_{i,j} - E_{j,i})_{1 \leq i < j \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

10.2.

a. C'est faux en général. Par exemple pour $a = b = 0$, on a $1 \cdot a + 1 \cdot b = 0$ mais $(1, 1) \neq (0, 0)$!

b. Les deux implications sont fausses.

⇒ Par exemple si $a = 0$, $\forall b \in E$, (a, b) est liée. Mais il est clair que l'implication est vraie si on a de plus l'hypothèse $a \neq 0$.

⇒ Pour la seconde implication : si $a = b = 0$, $\forall c \in E$, alors (a, b, c) est liée.

10.3.

⇒ Supposons (u, v, w) libre. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $au' + bv' + cw' = 0$. On a

$$(b + c)u + (a + c)v + (a + b)w = 0$$

Puisque (u, v, w) est libre, $b + c = a + c = a + b = 0$ et donc $a = b = c = 0$. La famille (u', v', w') est libre.

⇒ Réciproquement, on a $u' + v' + w' = 2(u + v + w)$, donc

$$\begin{cases} 2u = -u' + v' + w' \\ 2v = u' - v' + w' \\ 2w = u' + v' - w' \end{cases}$$

Supposons (u', v', w') libre. Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $au + bv + cw = 0$. on a donc également $2au + 2bv + 2cw = 0$, ie

$$(-a + b + c)u' + (a - b + c)v' + (a + b - c)w' = 0$$

Puisque (u', v', w') est libre, $-a + b + c = a - b + c = a + b - c = 0$ d'où $a = b = c = 0$. La famille (u, v, w) est donc libre.

10.4.

Suite du test 10.1. de la page 2.

a. On a vu que $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est génératrice de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Cette famille est libre car, pour tout $(\lambda_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^{n(n+1)/2}$

$$\sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \lambda_{i,j} E_{i,j} = 0$$

équivalent à

$$\begin{pmatrix} \lambda_{1,1} & \dots & \dots & \lambda_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 0 & \lambda_{n,n} \end{pmatrix} = 0$$

ie $\forall (i, j)$ tel que $1 \leq i \leq j \leq n$, $\lambda_{i,j} = 0$. Ainsi la famille initiale est libre. C'est donc bien une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$.

b. On prouve de même que $(E_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.

- c. La famille $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est clairement une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$.
- d. On prouve comme au a. que la famille $(E_{i,j} + E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$.
- e. Idem : $(E_{i,j} - E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$.

10.5.

Suite des tests 10.1. et 10.4. des pages 2 et 4.

- a. On a vu que $(E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$. Ainsi

$$\dim(\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

- b. La famille $(E_{i,j})_{1 \leq j \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ donc

$$\dim(\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

- c. La famille $(E_{i,i})_{1 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ donc

$$\dim(\mathcal{D}_n(\mathbb{K})) = n$$

- d. La famille $(E_{i,j} + E_{i,j})_{1 \leq i \leq j \leq n}$ est une base de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ donc

$$\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n+1)}{2}$$

- e. La famille $(E_{i,j} - E_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}$ est une base de $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ donc

$$\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \frac{n(n-1)}{2}$$

10.6.

- a. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soit $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i u_i = (0)$$

La suite

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i u_i = (\lambda_0, \dots, \lambda_k, 0, \dots)$$

est nulle donc $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$. Ainsi la famille $(u_0, \dots, u_k)$ est libre. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ ne peut être de dimension finie.

- b. Les f_i sont bien de classe $\mathcal{C}^\infty$. Soit $k \in \mathbb{N}$. Soient $\lambda_0, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que

$$\sum_{i=0}^k \lambda_i f_i = 0$$

En dérivant j fois où $0 \leq j \leq k$ et en évaluant en 0, on trouve $\lambda_j = 0$. Ainsi la famille $(f_0, \dots, f_k)$ est libre. Ceci étant vrai pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ ne peut être de dimension finie. Comme $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, ces espaces vectoriels sont également de dimension infinie.

10.7.

L'application f est clairement linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$. Pour tous $x, y, z, x', y', z' \in \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = (x', y', z')$ si et seulement si

$$\begin{cases} 2x - y &= x' \\ -x + y &= y' \\ x &- z = z' \end{cases}$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss sous sa forme matricielle

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ -1 & 1 & 0 & y' \\ 2 & -1 & 0 & x' \end{array} \right]$$

par les opérations $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ 0 & 1 & -1 & y' + z' \\ 0 & -1 & 2 & x' - 2z' \end{array} \right]$$

puis $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & z' \\ 0 & 1 & -1 & y' + z' \\ 0 & 0 & 1 & x' + y' - z' \end{array} \right]$$

d'où,

$$\begin{cases} x = & x' + y' \\ y = & x' + 2y' \\ z = x' + y' - z' \end{cases}$$

ainsi f est un isomorphisme et f^{-1} est défini sur $\mathbb{R}^3$ par

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, x + 2y, x + y - z).$$

10.8.

a. Vrai : l'application

$$\begin{aligned}\phi : F \times G &\longrightarrow E \\ (f, g) &\longmapsto f + g\end{aligned}$$

est surjective car $F + G = E$ et injective car $F \cap G = \{0\}$.

b. Faux. Contre-exemple : $E = \mathbb{R}^2$, $F = G = \mathbb{R} \times 0$.

10.9.

On applique le théorème de la base incomplète à la famille libre (u_1, u_2) : il existe des vecteurs $e_3, \dots, e_n$ tels que $(u_1, u_2, e_3, \dots, e_n)$ soit une base de E . Il suffit de considérer par exemple f , unique endomorphisme de E tel que

$$\begin{cases} f(u_1) = v \\ f(u_2) = v \\ f(e_k) = 0 \quad \forall k \in \llbracket 3, n \rrbracket \end{cases}$$

10.10.

Rappelons qu'un endomorphisme de E est entièrement défini par l'image d'une base de E .

- a. La famille $(e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$ étant une base de E , un tel endomorphisme f existe.
- b. Puisque $e_1 - e_3 = e_1 + e_2 - (e_2 + e_3)$, la famille $(e_2 + e_3, e_1 + e_2, e_1 - e_3)$ n'est pas une base de E . Comme la famille $(e_2 + e_3, e_1 + e_2)$ est libre (par un pivot élémentaire et puisque (e_1, e_2, e_3) est une base de E), f existe *si et seulement si* la dernière équation est compatible avec les deux premières. Comme $e_3 - e_2 \neq e_1$ (car (e_1, e_2, e_3) est une base de E), la dernière équation est incompatible avec les deux premières : un tel endomorphisme f n'existe pas.

10.11.

- a. On a $F = \{(x, x, x) \in \mathbb{R}^3; x \in \mathbb{R}\}$ donc $F = \text{Vect}(u_1)$ où $u_1 = (1, 1, 1)$. F est un sous-espace vectoriel de E de dimension 1. De même

$$G = \{(x, y, x + y) \in \mathbb{R}^3; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

ainsi $G = \text{Vect}(u_2, u_3)$ où

$$u_2 = (1, 0, 1) \text{ et } u_3 = (0, 1, 1)$$

G est donc un sous-espace vectoriel de E de dimension 2 car la famille (u_2, u_3) est clairement libre. Puisque $\dim(F) + \dim(G) = \dim(E)$, pour établir que F et G sont supplémentaires dans E , il suffit de vérifier que $F \cap G = \{0\}$. Soit $(x, y, z) \in F \cap G$, on a alors $x = y = z$ et $z = x + y$ donc $z = 2z$ c'est-à-dire $z = 0$ puis $(x, y, z) = 0$.

Commentaire

L'interprétation géométrique est claire : F est une droite vectorielle de l'espace qui n'est pas contenue dans le plan vectoriel G ; les deux sous-espaces sont donc supplémentaires.

- b. Soit $(x, y, z) \in E$. D'après la question précédente, il existe un unique triplet de nombres (α, β, γ) tel que

$$(x, y, z) = \alpha u_1 + \beta u_2 + \gamma u_3$$

c'est-à-dire,

$$\begin{cases} \alpha + \beta &= x \\ \alpha &+ \gamma = y \\ \alpha + \beta + \gamma &= z \end{cases}$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss sous sa forme matricielle,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 1 & 0 & 1 & y \\ 1 & 1 & 1 & z \end{array} \right]$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & x \\ 0 & -1 & 1 & y - x \\ 0 & 0 & 1 & z - x \end{array} \right]$$

D'où les solutions,

$$\begin{cases} \alpha = x + y - z \\ \beta = -y + z \\ \gamma = -x \quad \quad z \end{cases}$$

Le projeté de (x, y, z) sur F parallèlement à G vaut donc :

$$\alpha u_1 = (x + y - z, x + y - z, x + y - z)$$

et celui de (x, y, z) sur G parallèlement à F :

$$\beta u_2 + \gamma u_3 = (z - y, z - x, 2z - x - y)$$

10.12. _____

Notons $F_i = \text{Vect}(\mathcal{F}_i)$ pour $i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket$. On a

$$\begin{cases} \text{rg}(\mathcal{F}_1) &= \dim(F_1) \\ \text{rg}(\mathcal{F}_2) &= \dim(F_2) \\ \text{rg}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) &= \dim(F_1 + F_2) \end{cases}$$

Et, d'après la relation de Grassmann, $\dim(F_1 + F_2) \leq \dim(F_1) + \dim(F_2)$.

10.13. _____

On part de la remarque suivante : si $f : E \rightarrow F$ avec $\dim(E)$ et $\dim(F)$ finie, alors $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$ et $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$.

a. Vrai car

$$f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^m \text{ surjective} \iff \text{rg}(f) = m$$

b. Vrai car

$$f : \mathbb{K}^m \rightarrow \mathbb{K}^n \text{ injective} \iff \text{rg}(f) = m$$

10.14. _____

Soit $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow E \\ f &\longmapsto \begin{pmatrix} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto f(0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\text{Im}(\phi)$ est l'ensemble des fonctions constantes donc $\text{rg}(\phi) = 1$ mais E est de dimension infinie.

10.15. _____

a. Puisqu'en dimension 1, le seul hyperplan est l'espace nul, on a $n \geq 2$.

b. Puisque les deux hyperplans sont distincts, il existe $u \in H_1 \setminus H_2$. On a donc

$$E = H_2 \oplus \mathbb{K}u \subset H_2 + H_1 \subset E,$$

ainsi $E = H_1 + H_2$ et d'après la formule de Grassmann,

$$\dim(H_1 \cap H_2) = n - 1 + n - 1 - n = n - 2.$$