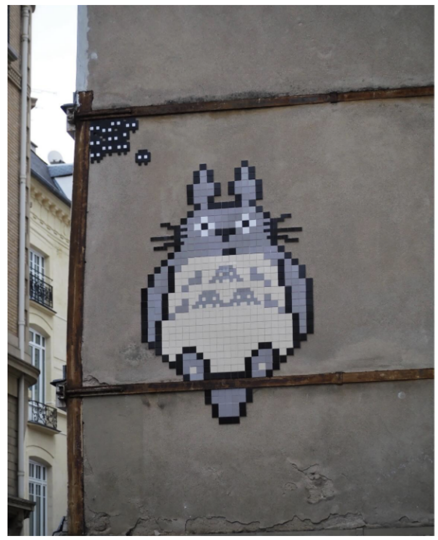
ALG 12 | Matrices et applications linéaires

On établit un pont entre les aspects géométriques (vecteurs, applications linéaires) et numériques (calcul matriciel) de la théorie.



Anonyme

Le calcul matriciel a deux grandes origines : la théorie des sytèmes linéaires et celle des transformations linéaires. Ces dernières sont étudiées sous le nom de substitutions linéaires par **Lagrange** (pour les formes quadratiques à 2 variables) et **Gauss** (pour les formes quadratiques à 3 variables).

Gauss aborde la théorie des formes dites ternaires et pour représenter la substitution linéaire qui remplace (x, y, z) par $(ax + by + cz, a'x + b'y + c'z, a''x + b''y + c''z)$ il utilise pour la première fois une notation en tableau proche de la notation matricielle. Il l'abrège d'ailleurs en une seule lettre S :

$$\mathrm{S} = \begin{matrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{matrix}$$

Il note alors que si l'on fait successivement la substitution S, et la substitution T, le résultat est identique si l'on avait fait la substitution, notée de nos jours $\mathrm{S} \times \mathrm{T}$ mais qu'il ne note pas ainsi [1] mais sous forme explicite. Il évoque donc sans la nommer, la multiplication de deux matrices carrées 3×3.

Arthur Cayley

On considère souvent **Cayley** comme l'inventeur des matrices. Lorsqu'il les introduit, le déterminant existe déjà[2]. **Cayley** et **Sylvester** travaillent en collaboration pendant près de 30 ans. Le terme de matrice est introduit par Sylvester en 1850 pour désigner un tableau rectangulaire de nombres (qu'il ne pouvait pas appeler déterminant). Mais c'est avec la publication par Cayley, en 1858, de l'article *A memoir on the Theory of Matrices*, que la notion de matrice prend tout son sens. Les matrices deviennent alors une entité distincte du déterminant et sont étudiées comme telle. Les résultats de **Hamilton** sur les quaternions incitent **Cayley** à discuter des propriétés caractéristiques des opérations sur les matrices (associativité, addition, condition de commutativité de la multiplication).

Il traite également le cas des matrices rectangulaires et des cas ou leur produit est possible. Il considère qu'une matrice n'est qu'une notation abrégée pour une substitution linéaire (comme pour **Gauss**). Il construit ainsi formellement de nouvelles entités (qui ne sont pas des nombres) et qui ont des propriétés particulières. Il se contente dans un premier temps d'étudier les matrices de tailles $(2,2)$ et $(3,3)$, mais affirme que tout cela s'étend aux matrices rectangulaires d'ordre (p, n). Il définit la somme et le produit de deux matrices, la transposée, donne l'inverse d'une matrice $(3,3)$ à l'aide des cofacteurs et introduit les matrices symétriques et antisymétriques.

1. Matrices et applications linéaires

Nous allons compléter le cours d'algèbre linéaire en établissant un lien entre les deux points de vue complémentaires étudiés jusqu'à présent : *les aspects géométriques* (vecteurs, sev, applications linéaires, etc) et *les aspects numériques* (coordonnées, calcul matriciel).

1. il faudra attendre les travaux d'**Eisenstein** en 1844 pour une première formalisation du produit matriciel.
2. Et il est noté sous forme d'un tableau depuis 1815 à l'initiative de Cauchy.

1.1. Matrice d'une application linéaire dans des bases

Nous avons vu dans le chapitre précédent qu'une application linéaire est entièrement définie par l'image d'une base. Ce résultat théorique a une conséqence pratique importante : en dimension finie, tout problème d'algèbre linéaire est réductible à du calcul matriciel.

Définition 12.0. Matrice d'une application linéaire dans des bases

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev non nuls de bases respectives $\mathscr{E} = (e_1,\dots,e_p)$ et $\mathscr{F} = (f_1,\dots,f_n)$, et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On appelle matrice de u dans les bases $(\mathscr{E},\mathscr{F})$, la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ définie par

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) = \mathrm{mat}_{\mathscr{F}}(u(e_1),\dots,u(e_p))$$

La notation $\mathrm{mat}_{\mathscr{F}}(\mathscr{G})$ désigne la matrice dont les colonnes sont les vecteurs coordonnées des vecteurs de la famille $\mathscr{G}$ dans la base $\mathscr{F}$.
Lorsque $\mathrm{E} = \mathrm{F}$ (ie lorsque u est un endomorphisme de E) et $\mathscr{E} = \mathscr{F}$, on note plus simplement $\mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u)$ au lieu de $\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$.

En résumé : la matrice de u dans les bases $(\mathscr{E},\mathscr{F})$ possède n lignes et p colonnes et son j-ème vecteur colonne est le vecteur colonne des coordonées de $u(e_j)$ dans la base $\mathscr{F} = (f_1,\dots,f_n)$.

On « *remplit* » la matrice $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$ colonne par colonne :

$$\forall j \in [\![1,p]\!],\ u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j} f_i$$

$$\begin{array}{c} \\ f_1 \\ \vdots \\ f_i \\ \vdots \\ f_n \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u(e_1) & \dots & \dots & u(e_j) & \dots & u(e_p) \end{array} \\
\begin{pmatrix} \mathrm{M}_{1,1} & \dots & \dots & \mathrm{M}_{1,j} & \dots & \mathrm{M}_{1,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{M}_{i,1} & \dots & \dots & \mathrm{M}_{i,j} & \dots & \mathrm{M}_{i,p} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \mathrm{M}_{n,1} & \dots & \dots & \mathrm{M}_{n,j} & \dots & \mathrm{M}_{n,p} \end{pmatrix} \end{array}$$

- Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et de base $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$. On a $\forall i \in [\![1,n]\!],\ \mathrm{id}_{\mathrm{E}}(e_i) = e_i$. On peut en conclure que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathrm{id}_{\mathrm{E}}) = \mathrm{I}_n$. De même, $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(0) = 0$.
- On notera $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
  - Pour $u : (x,y) \mapsto (y,x,x-y)$, $v : (x,y,z) \to x-y+2z$ et $w : (x,y,z) \mapsto (x-y, y-z+x)$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_2,\mathscr{B}_3}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_1}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \end{pmatrix},\quad \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_3,\mathscr{B}_2}(u) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

    Pour trouver ces matrices, on applique la définition. Par exemple, pour u, obtient la matrice en choisissant successivement (x,y) égal à $(1,0)$ puis $(0,1)$:

$$u\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

    On peut bien-sûr aussi remplir la matrice ligne par ligne.
  - Plus généralement, pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, l'application $f : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{AX}$ de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ admet A pour matrice dans les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

- Les endomorphismes $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$ et $g : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1) - \mathrm{P}(\mathrm{X})$ de $\mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$ ont pour matrice dans la base canonique :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{cases} f(1) = 0,\ f(\mathrm{X}) = 1,\ f\left(\mathrm{X}^2\right) = 2\mathrm{X} \\ g(1) = 0,\ g(\mathrm{X}) = 1,\ g\left(\mathrm{X}^2\right) = (\mathrm{X}+1)^2 - \mathrm{X}^2 = 1 + 2\mathrm{X} \end{cases}$$

- Soit $u \in \mathscr{L}\left(\mathbb{K}^2\right)$ tel que $u^2 = 0$ et $u \neq 0$. Montrer $\exists \mathscr{B}$ base de $\mathbb{K}^2$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
  - ANALYSE : Supposons l'existence d'une telle base $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$. On a alors $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$, d'où $\mathscr{B} = (u(e_2), e_2)$.
  - SYNTHÈSE. Comme $u \neq 0$, $\exists e_2 \in \mathrm{E}$ tel que $u(e_2) \neq 0$. Posons $e_1 := u(e_2)$. Montrons que (e_1, e_2) est une base de E. Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $ae_1 + be_2 = 0$. En appliquant u, on a $au(e_1) + bu(e_2) = 0$, ie $be_1 = 0$. Ainsi $b = 0$ puis $ae_1 = 0$ d'où $a = 0$. La famille (e_1, e_2) est libre dans $\mathbb{K}^2$ de dimension deux, c'est donc une base de cet espace. Comme $u(e_1) = 0$ et $u(e_2) = e_1$, on a

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- Le lecteur pourra aborder le test **(⚡ 12.1)**.

Des bases des $\mathbb{K}$-ev E et F étant choisies, il est facile de donner un isomorphisme[3] entre $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ où $n := \dim \mathrm{F}$ et $p := \dim \mathrm{E}$.

Proposition 12.1. Isomorphisme applications linéaires-matrices

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions p et n non nulles, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$ des bases de E et F. L'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u) \end{array}$$

est un isomorphisme. En particulier, $\mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F}) = \dim \mathrm{E} \dim \mathrm{F}$.

Il est facile de calculer les coordonnées de l'image $f(x)$ d'un vecteur x connaissant celles de x et la matrice de f dans les bases de départ et d'arrivée.

Proposition 12.2. Calcul des coordonnées d'un vecteur image $u(x)$

Soit E et F des $\mathbb{K}$-ev non nuls de bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})$ et $x \in \mathrm{E}$. Alors $\mathrm{Y} = \mathrm{MX}$ où X et Y sont les vecteurs des coordonnées de x et $u(x)$ dans les bases $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, et $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(u)$.

La proposition suivante permet de calculer la matrice d'une application obtenue par des opérations.

Proposition 12.3. Matrices d'une somme ou d'une composée d'applications linéaires

Pour E, F, G des $\mathbb{K}$-ev non nuls de dimension finie, de bases $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{G}$, $(v, w, u) \in \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathrm{F})^2 \times \mathscr{L}(\mathrm{F}, \mathrm{G})$:

3. Nous avions déjà démontré cette relation dans le cours sur les espaces vectoriels de dimension finie : une application linéaire de E dans F est entièrement définie par l'image d'une base de E.

a. $\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(\lambda w + v) = \lambda\,\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(w) + \mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(v)$ pour tout λ dans $\mathbb{K}$;

b. $\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{G}}(u \circ v) = \mathrm{mat}_{\mathscr{F},\mathscr{G}}(u)\,\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(v)$.

c. v est un isomorphisme si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(v)$ est inversible ;

d. Pour un endomorphisme u de E, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u^n) = (\mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u))^n$. De plus, u est un automorphisme de E si et seulement si $\mathrm{mat}_{\mathscr{E}}(u)$ est inversible.

Le cas échéant, on a $\mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(v)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{F},\mathscr{E}}(v^{-1})$ au c) et $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u)^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u^{-1})$ au d).

On notera en particulier une nouvelle interprétation du produit matriciel et on remarquera que la propriété a) est équivalente à la linéarité de ϕ dans la proposition 1.1

Nous recommandons ici le test (↯ **12.2**).

1.2. Aspects géométriques et numériques en algèbre linéaire

Dans ce court paragraphe, nous allons voir comment ses deux aspects se complètent. Tout problème d'algèbre linéaire *géométrique* (vecteurs, sev, applications linéaires, etc) admet une version *numérique* (matrices) et réciproquement.

Aspects géométriques
vecteurs
$\mathbb{K}$-ev
applications linéaires

→ Choix d'une base →
← Choix d'un $\mathbb{K}$-ev, etc. ←

Aspects numériques
coordonnées
espaces $\mathbb{K}^n$
matrices

Il est parfois plus aisé de résoudre un problème dans un cadre que dans l'autre ; selon le contexte, on choisira une approche plutôt que l'autre.

Arguments numériques pour résoudre un problème géométrique

Voici une illustration dans les espaces de polynômes.

✘ Étudions la bijectivité de $f : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{XP}' + \alpha\mathrm{P}$ sur $\mathbb{K}_n[\mathrm{X}]$ pour $\alpha \in \mathbb{K}$. En notant $\mathscr{B}$ la base canonique :

$$\mathrm{A} := \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1+\alpha & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & n-1+\alpha & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & n+\alpha \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \forall k \in [\![0,n]\!],\ \ f(\mathrm{X}^k) = (k+\alpha)\mathrm{X}^k$$

Ainsi f est bijective *si et seulement si* A est inversible, ce qui équivaut à $\alpha \notin [\![-n, 0]\!]$.

On peut bien-sûr également donner une preuve très simple sans utiliser les matrices.

Arguments géométriques pour résoudre un problème numérique

Dans l'exemple qui suit, on exploite l'équivalence suivante, pour $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$ et $(e_1, \dots, e_n)$ base de E,

$$\underbrace{\mathrm{mat}_{(e_1,\dots,e_n)}(f) \text{ est triangulaire supérieure}}_{\textbf{Propriété numérique}} \iff \underbrace{\forall i \in [\![1,n]\!],\ \ f(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)) \subset \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)}_{\textbf{Propriété géométrique}}$$

✘ Démontrons que 'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est triangulaire supérieure. Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ triangulaire supérieure inversible et f l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$ est A ; f est donc un automorphisme de $\mathbb{K}^n$. On note $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
Comme A est triangulaire supérieure, on a

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \underbrace{f\,(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i))}_{=\,f(\mathrm{E}_i)} \subset \underbrace{\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)}_{=\,\mathrm{E}_i}$$

Comme f est bijective, $\dim f(\mathrm{E}_i) = \dim \mathrm{E}_i = i$ d'où $f(\mathrm{E}_i) = \mathrm{E}_i$. On a donc

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\ \underbrace{f^{-1}\,(\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i))}_{=\,f^{-1}(\mathrm{E}_i)} = \underbrace{\mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_i)}_{=\,\mathrm{E}_i}$$

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i \\ \vdots \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \dots & \dots & f(e_i) & \dots \end{array} \\
\begin{pmatrix}
a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & \dots & a_{1,i} & \dots \\
0 & a_{2,2} & \ddots & & a_{1,i} & \\
\vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\
0 & 0 & & \ddots & a_{i-1,i} & \\
0 & 0 & & & a_{i,i} & \ddots \\
\vdots & \vdots & & & \vdots & \ddots
\end{pmatrix}
\end{array}$$

et $\mathrm{A}^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f^{-1})$ est triangulaire supérieure.

Il est aussi possible de donner une preuve numérique élémentaire de ce résultat. Voici un autre exemple classique : le calcul de l'inverse de la matrice de Pascal.

✘ Démontrons l'inversibilité puis calculons inverse de la matrice de Pascal $\left(\dbinom{i}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$.

Notons $\mathrm{M} = \left(\dbinom{i}{j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$ (on commence la numérotation à 0). Par la formule du binôme :

$$\forall\, j \in [\![0,n]\!]\,,\ (\mathrm{X}+1)^j = \sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} \mathrm{X}^i = \sum_{i=0}^{n} \mathrm{M}_{j,i}\mathrm{X}^i$$

On en déduit que M^T est la matrice de l'endomorphisme $\phi : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ de $\mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ dans sa base canonique $\mathscr{B}$. Comme $\phi^{-1} : \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$, on a

$$\mathrm{M}^{-1} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\phi^{-1})^\mathrm{T}$$

Comme $\forall\, j \in [\![0,n]\!]\,,\ (\mathrm{X}-1)^j = \displaystyle\sum_{i=0}^{j} \binom{j}{i} (-1)^{j-i}\mathrm{X}^i$, on a $\mathrm{M}^{-1} = \left(\dbinom{i}{j}(-1)^{i-j}\right)_{0\leqslant i,j\leqslant n}$.

2. Changements de bases

Le cadre matriciel permet les calculs effectifs de changements de bases.

2.1. Matrice de passage d'une base à une autre

Il faut bien entendu au minimum connaître l'expression de l'une des bases en fonction de l'autre.

Définition 12.4. Matrice de passage d'une base $\mathscr{B}$ à une base $\mathscr{B}'$

Soit $\mathscr{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases d'un même $\mathbb{K}$-ev E. On appelle matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ la matrice P de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les vecteurs de coordonnées de e'_1, …, e'_n dans la base $\mathscr{B}$.

Il est facile de voir que

$$\mathrm{P} \;=\; \mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E})$$

On « *remplit* » donc la matrice de passage P de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ colonne par colonne.

$$\begin{array}{c} \\ e_1 \\ \vdots \\ e_i \\ \vdots \\ e_n \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e'_1 & \cdots & \cdots & e'_j & \cdots & e'_n \end{array} \\
\begin{pmatrix}
\mathrm{P}_{1,1} & \cdots & \cdots & \mathrm{P}_{1,j} & \cdots & \mathrm{P}_{1,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
\mathrm{P}_{i,1} & \cdots & \cdots & \mathrm{P}_{i,j} & \cdots & \mathrm{P}_{i,n} \\
\vdots & & & \vdots & & \vdots \\
\mathrm{P}_{n,1} & \cdots & \cdots & \mathrm{P}_{n,j} & \cdots & \mathrm{P}_{n,n}
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Calculer une matrice de passage

Pour calculer une matrice de passage, il suffit donc d'exprimer les « *nouveaux* » vecteurs comme combinaisons linéaires des « *anciens* »

Voici de quoi se familiariser avec cette notion.

- On note $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. La famille $\mathscr{B}' = \big(1, \mathrm{X}, \mathrm{X}(\mathrm{X}-1), \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2)\big)$ est une base de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$. On note P la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$. On a

$$\mathrm{X}(\mathrm{X}-1) = -\mathrm{X}+\mathrm{X}^2,\ \mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2) = \mathrm{X}^3-3\mathrm{X}^2+2\mathrm{X} \quad \text{d'où}\ \ \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- On note $\mathscr{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Posons $u = (1,0,0)$, $v = (1,1,0)$ et $w = (1,1,1)$, La famille $\mathscr{C}' := (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On note Q la matrice de passage de $\mathscr{C}'$ à $\mathscr{C}$. On a

$$\mathrm{Q} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{car} \quad \begin{cases} (1,0,0) \;=\; u \\ (0,1,0) \;=\; v-u \\ (0,0,1) \;=\; w-v \end{cases}$$

Pour une famille $\mathscr{E}$ quelconque de E, nous savons déjà[4] que $\mathscr{E}$ est une base de E *si et seulement si* $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{E})$ est inversible. Nous allons préciser ce résultat :

Proposition 12.5. Inverse d'une matrice de passage

Avec les notations précédentes, P est inversible et son inverse est la matrice de passage de $\mathscr{B}'$ à $\mathscr{B}$.

Le lecteur poursuivra avec profit par le test (↯ **12.3**).

4. Voir le cours sur les $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

2.2. Les formules de changement de base

Il y a essentiellement deux formules :

- l'expression des coordonnées d'un vecteur dans la nouvelle base en fonction de ses anciennes coordonnées ;
- l'expression de la matrice d'une application linéaire après des changements de base au départ et à l'arrivée en fonction de matrice initiale.

Ces deux formules sont des conséquences directes des formules données aux propositions 1.1 et 1.1 (cf. page 4).

Proposition 12.6. Lien entre anciennes et nouvelles coordonnées

En notant X et X′ les coordonnées d'un même vecteur u d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ de E, on a $X = PX'$ où P est la matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$.

Calculer les nouvelles coordonnées X′ revient donc à inverser P.

- Déterminons les coordonnées de $X^3 - 6x^2 + 7X + 11$ dans la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ de $\mathbb{R}_2[X]$. Notons $\mathscr{B}'$ cette base et $\mathscr{B}$ la base canonique. On a vu à l'exemple 2.1 (cf. page 7) que

$$P = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{on trouve que} \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{ainsi} \quad P^{-1}\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -6 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que

$$X^3 - 6X^2 + 7X + 11 = 11 + 2X - 3X(X-1) + X(X-1)(X-2)$$

Cette formule tient dans un seul diagramme.

Pour retrouver la formule rapidement...

...voici deux pistes :

▷ *Refaire la preuve* : comme $x = \mathrm{id}_E(x)$, on déduit de la proposition 1.1 (cf. page 4) que

$$X = \underbrace{\operatorname{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_E)}_{P} X'$$

$$E, \mathscr{B}' \xrightarrow[P]{\mathrm{id}_E} E, \mathscr{B}$$

▷ *On peut aussi s'appuyer sur des notations intelligentes* : si X_1 et X_2 sont les coordonnées dans $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ et si $P_{1,2}$ est la matrice de passage de $\mathscr{B}_1$ à $\mathscr{B}_2$, alors $X_1 = P_{1,2}X_2$.

Précisons qu'il n'existe aucune notation standard pour les matrices de passage.

Proposition 12.7. Lien entre ancienne et nouvelle matrice

Soit $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies.

a. En notant $\mathscr{E}$ et $\mathscr{E}'$ deux bases de E, $\mathscr{F}$ et $\mathscr{F}'$ deux bases de F, P la matrice de passage de $\mathscr{E}$ à $\mathscr{E}'$, Q la matrice de passage de $\mathscr{F}$ à $\mathscr{F}'$, $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(f)$ et $\mathrm{M}' = \mathrm{mat}_{\mathscr{E}',\mathscr{F}'}(f)$, on a $\mathrm{M}' = \mathrm{Q}^{-1}\mathrm{MP}$.

b. Si E = F et $\mathscr{B},\mathscr{B}'$ sont des bases de E, alors $\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP}$ où $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{M}' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$.

Illustrons cette formule par de l'algèbre linéaire dans $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$.

✘ Soit $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[\mathrm{X}]$, $\mathscr{B}' = (1,\mathrm{X},\mathrm{X}(\mathrm{X}-1),\mathrm{X}(\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}-2))$ et $f : \mathrm{P} \mapsto (\mathrm{X}-1)\mathrm{P}'(\mathrm{X}) - 2\mathrm{P}(\mathrm{X})$. Pour déterminer $\mathrm{M}' = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)$, on calcule $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et P matrice de passage de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$:

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{et par un calcul facile} \quad \mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit que $\mathrm{M}' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{MP} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Cette formule est essentielle, il faut la connaître ou savoir la retrouver rapidement.

Pour retrouver la formule rapidement

$$\begin{tikzcd} \mathrm{E},\mathscr{B} \arrow[r, "f", "\mathrm{M}"'] & \mathrm{E},\mathscr{B} \arrow[d, "\mathrm{id}_\mathrm{E}", "\mathrm{P}^{-1}"'] \\ \mathrm{E},\mathscr{B}' \arrow[u, "\mathrm{id}_\mathrm{E}", "\mathrm{P}"'] \arrow[r, "\mathrm{M}'", "f"'] & \mathrm{E},\mathscr{B}' \end{tikzcd}$$

Comme $f = \mathrm{id}_\mathrm{E} \circ f \circ \mathrm{id}_\mathrm{E}$, on déduit de la proposition 1.1 (cf. page 4) que

$$\underbrace{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}'}(f)}_{\mathrm{M}'} = \underbrace{\mathrm{mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(\mathrm{id}_\mathrm{E})}_{\mathrm{P}^{-1}}\ \underbrace{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(f)}_{\mathrm{M}}\ \underbrace{\mathrm{mat}_{\mathscr{B}',\mathscr{B}}(\mathrm{id}_\mathrm{E})}_{\mathrm{P}}$$

3. Image, noyau et rang d'une matrice

Nous allons étendre aux matrices le vocabulaire usuel des applications linéaires.

Définition 12.8. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application canoniquement associée à A l'unique application linéaire f de $\mathbb{K}^p$ dans $\mathbb{K}^n$ telle que $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_p,\mathscr{B}_n}(f) = \mathrm{A}$ où $\mathscr{B}_p$ et $\mathscr{B}_n$ désigne les bases canoniques de $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^n$.

Voici le point fondamental : si on note f l'application canoniquement associée à $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors

$$\forall \mathrm{X} \in \mathbb{K}^p,\ f(\mathrm{X}) = \mathrm{AX}$$

En effet, notons $(e_1,\dots,e_p)$ la base canonique de $\mathbb{K}^p$ et $X=[x_1,\dots,x_p]^T$. On a

$$f(X) = f\left(\sum_{i=1}^{p} x_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{p} x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i A_i = AX$$

où $A_1,\dots, A_p$ sont les colonnes de A. Il faut bien comprendre que l'on a $f(e_i)=A_i$ car tout vecteur de $\mathbb{K}^n$ est égal au vecteur de ses coordonnées dans la base canonique (c'est évidemment particulier à la base canonique).

3.1. Image et noyau

Définition 12.9. Image et noyau d'une matrice

Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et f canoniquement associée à f.

⇛ On appelle noyau de A l'ensemble $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} f = \left\{X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\,;\, AX=0\right\}$.

⇛ On appelle image de A l'ensemble $\operatorname{Im} A = \operatorname{Im} f = \left\{AX\in\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})\,;\, X\in\mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\right\}$.

✗ Calculons des bases de l'image et du noyau des matrices suivantes :

- ✔ $A_1 = \begin{pmatrix} 2&6&3\\0&1&8\\0&0&7\end{pmatrix}$. Comme A_1 est inversible, on a $\operatorname{Im} A_1=\mathbb{R}^3$ et $\operatorname{Ker} A_1=\{0\}$.
- ✔ $A_2 = \begin{pmatrix} -2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}$. On a $\operatorname{Im} A_2=\operatorname{Vect}(C_1,C_2)$ et $\operatorname{Ker} A_2=\operatorname{Vect}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.
- ✔ $A_3 = \begin{pmatrix} 1&-3&-2\\1&-3&-2\\1&-3&-2\end{pmatrix}$. On a $\operatorname{Im} A_3=\operatorname{Vect}(C_1)$ et $\operatorname{Ker} A_3=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}\right)$.

Calcul de Ker A et Im A

Soit $A\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On note $C_1, \dots, C_p$ les colonnes de A.

⇛ *Noyau.*

- ➰ Ker A est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène de matrice A.
- ➰ Trouver le noyau de Ker A est équivalent à déterminer les relations de liaisons entre $C_1, \dots, C_p$. En effet,

$$\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}\in\operatorname{Ker} A \iff \sum_{i=1}^{p} x_i C_i = 0$$

⇛ *Image.* On a $\operatorname{Im} A=\operatorname{Vect}(C_1,\dots,C_p)$.

- ➰ Pour calculer une base de Im A, on peut extraire une famille libre de $(C_1,\dots,C_p)$.
- ➰ On peut aussi effectuer des pivots par colonnes.

L'isomorphisme $u\mapsto \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(u)$ qui à un vecteur associe ses coordonnées permet des allers-retours incessants entre les registres numériques et géométriques.

Dictionnaire géométrique / numérique

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimensions finies p et n non nulles, de bases respectives $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$, f dans $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. On note $\mathrm{M} = \mathrm{mat}_{\mathscr{E},\mathscr{F}}(f)$, et pour $(x,y) \in \mathrm{E}\times\mathrm{F}$, on note X et Y leurs coordonnées de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{F}$.

- $x \in \mathrm{Ker}\, f$ *si et seulement si* $\mathrm{X} \in \mathrm{Ker}\,\mathrm{A}$;
- $y \in \mathrm{Im}\, f$ *si et seulement si* $\mathrm{Y} \in \mathrm{Im}\,\mathrm{A}$.
- f est injective $\iff$ $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \{0\}$;
- f est surjective $\iff$ $\mathrm{Im}\,\mathrm{A} = \mathbb{K}^n$.

f est un isomorphisme $\iff$ A est inversible.

Les caractérisations de l'inversibilité au moyen des systèmes linéaires peuvent être reformulées en termes de noyau et d'image ;

Proposition 12.9. Inversibilité, noyau et image

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

a. A est inversible ; **b.** $\mathrm{Ker}\,\mathrm{A} = \{0\}$; **c.** $\mathrm{Im}\,\mathrm{A} = \mathbb{K}^n$.

On continuera par le test (↯ **12.4**).

3.2. Rang d'une matrice

Nous continuons en définissant le rang d'une matrice.

Définition 12.10. Rang d'une matrice

On appelle rang de A l'entier $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\, f =$ rang des colonnes $\mathrm{C}_1, \ldots, \mathrm{C}_p$ de la matrice A où f est canoniquement associée à A.

Dans certains cas, le rang est facile à calculer et *se voit directement sur les colonnes* sans qu'il soit indispensable d'effectuer des opérations de pivot.

- Voici quelques calculs dans l'espace canonique $\mathbb{R}^3$.
  - $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Comme $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ est libre, $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}_1 \geqslant 2$. Comme $\mathrm{C}_3 \notin \mathrm{Vect}(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2)$, $(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2,\mathrm{C}_3)$ est libre. Ainsi $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}_1 = 3$.
  - $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Comme $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ est libre, $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}_2 \geqslant 2$. Puisque $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0$, on a $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}_2 \leqslant 2$. Ainsi, $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}_2 = 2$.
  - $\mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{C}_1 = (1/3)\mathrm{C}_2 = (1/7)\mathrm{C}_3$, $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}_3 = 1$.
  - $\mathrm{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 = 4\mathrm{C}_3$, $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}_4 \leqslant 2$. Comme $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ est libre, on a $\mathrm{rg}(\mathrm{C}_1,\mathrm{C}_2) \geqslant 2$. Ainsi, $\mathrm{rg}\,\mathrm{A}_4 = 2$.
- Nous recommandons ici le test (↯ **12.5**).

Le rang d'une matrice carrée permet de caractériser son inversibilité.

Proposition 12.11. Inversibilité et rang

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$; A est inversible si et seulement si $\operatorname{rg} A = n$.

Plus généralement, on déduit du théorème du rang (pour les applications linéaires) un résultat analogue pour les matrices.

Proposition 12.12. Théorème du rang pour une matrice

Pour tout $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $p =$ nombre de colonne(s) de $A = \operatorname{rg} A + \dim \operatorname{Ker} A$.

On peut utiliser cette proposition pour calculer des images et des noyaux :

- Trouvons des bases du noyau et de l'image des matrices suivantes :
  - $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Le rang de A_1 vaut 1 donc $\operatorname{Ker} A_1$ est de dimension deux.

    On a $\operatorname{Ker}(A_1) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ car ces deux vecteurs non colinéaires appartiennent au noyau (en effet $C_1 + C_2 = 2C_1 + C_3 = 0$).
  - $A_2 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Comme (C_1, C_2) est libre, $\operatorname{rg} A_2 \geqslant 2$. On a $C_1 + C_2 + C_3 = 0$, donc $\operatorname{rg} A_2 \leqslant 2$ d'où $\operatorname{rg} A_2 = 2$ et $\operatorname{Ker} A_2$ est de dimension un. Ainsi $\operatorname{Ker}(A_2) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ car $C_1 + C_2 + C_3 = 0$.
  - $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Comme $C_1 + C_2 = 4C_3$, on a $\operatorname{rg} A_3 \leqslant 2$. Et puisque (C_1, C_2) est libre, $\operatorname{rg}(C_1, C_2) \geqslant 2$. Ainsi, $\operatorname{rg} A_3 = 2$ et $\operatorname{Ker} A_3$ est de dimension un. Ainsi $\operatorname{Ker}(A_3) = \operatorname{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ car $C_1 + C_2 - 4C_3 = 0$.
- Le lecteur poursuivra par le test (12.6).

Proposition 12.13. (12.7)

Pour toute application linéaire de matrice A dans des bases, on a $\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} f$.

Le rang est invariant par multiplication par des matrices inversibles.

Proposition 12.14. Invariance du rang par multiplication par une matrice inversible

Pour tout $(P, Q, A) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\operatorname{rg} PA = \operatorname{rg} AQ = \operatorname{rg} PAQ = \operatorname{rg} A$.

Cette proposition peut être « précisée » de la façon suivante :

Proposition 12.15. Caractérisation du rang

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $r \in \mathbb{N}$.

$$\operatorname{rg} A = r \iff \exists (P, Q) \in GL_n(\mathbb{K}) \times GL_p(\mathbb{K}),\ A = PJ_rQ \quad \text{où} \quad J_r = \left[\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Nous pouvons en déduire que le rang des lignes est égal à celui des colonnes.

Proposition 12.16.

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

a. On a $\operatorname{rg} \mathrm{A} = \operatorname{rg} \mathrm{A}^\top$.

b. Le rang d'une matrice est égal au rang de ses colonnes mais aussi au rang de ses lignes.

Le lecteur poursuivra avec le test (↯ **12.8**).

4. Équivalence et similitude

4.1. Matrices équivalentes

Nous avons déjà étudié la relation d'équivalence par lignes et par colonne dans les cours précédents. Nous allons la généraliser à des opérations sur les lignes *et* sur les colonnes.

Définition 12.17. Matrices équivalentes

Deux matrices M et N de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont dites équivalentes sur $\mathbb{K}$ s'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PNQ}$. On note $\sim$ cette relation.

Il est clair qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. De plus, $\mathrm{M} \sim \mathrm{N}$ *si et seulement si* on passe de M à N par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes.

Proposition 12.18. Rang et équivalence matricielle

Deux matrices de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles ont le même rang.

On dit que le rang est un *invariant* pour la relation d'équivalence $\sim$. On déduit de cette proposition qu'il y a exactement $\min(p,n)$ classes d'équivalence pour cette relation. La classe des matrices de rang r admet un représentant simple, la matrice[5] J_r (cf. ci-contre).

$$\mathrm{J}_r = \left[\begin{array}{c|c} \mathrm{I}_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$$

Proposition 12.19. Caractérisation du rang

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

a. La seule matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang $r = 0$ est la matrice nulle.

b. Une matrice M de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang $r \geqslant 1$ si et seulement s'il existe $\mathrm{P} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\mathrm{Q} \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que $\mathrm{M} = \mathrm{PJ}_r\mathrm{Q}$.

Le lecteur terminera par le test (↯ **12.9**).

4.2. Matrices semblables

Nous allons définir une nouvelle relation sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

5. Cette notation est courante mais abusive car J_r ne dépend pas que de r, mais aussi de (n,p). Il faudrait noter $\mathrm{J}_{n,p,r}$ pour être correct.

Définition 12.20. Matrices semblables

Deux matrices M et N de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables sur $\mathbb{K}$ si $\exists P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $M = P^{-1}NP$.

Voici quelques exemples élémentaires.

- Matrice(s) semblable(s) à une matrice d'homothétie. On se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. La seule matrice semblable à 0 est 0. Plus généralement, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la seule matrice semblable à λI_n est λI_n.

Il est clair qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car, pour toutes matrices A, B et C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et toutes matrices inversibles P et Q, on a

$$\begin{cases} A = I_n^{-1} A I_n \\ A = P^{-1}BP \iff B = \left(P^{-1}\right)^{-1} AP^{-1} \\ (A = P^{-1}BP \text{ et } B = Q^{-1}CQ) \implies A = (PQ)^{-1}CPQ \end{cases}$$

Les classes d'équivalence de cette relation sont appelées *classes de similitude*. Elles sont reliées aux classes de la relation d'équivalence $\sim$.

Proposition 12.21. Équivalence et similitude

Des semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont équivalentes.

La réciproque est fausse comme nous le verrons un peu plus loin.

Proposition 12.22. Similitude et trace

Deux matrices semblables sur $\mathbb{K}$ ont même trace.

La trace est un invariant de similitude mais, contrairement au rang pour la relation $\sim$, il ne permet pas de caractériser une classe d'équivalence : deux matrices de même trace ne sont pas nécessairement semblables.

- Exemples et contre-exemples sur les classes de similitude. On se place sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ pour $n \geqslant 2$.
  - Les matrices $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ sont équivalentes sur $\mathbb{R}$ mais pas semblables sur $\mathbb{R}$ (cf. leurs traces).
  - Les matrices $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ ont la même trace mais ne sont pas semblables (la seule matrice semblable à 0 est 0).

- Similitude et opérations de pivot. Attention, les opérations de pivot transforment une matrice en une autre matrice qui n'est en général pas *semblable* mais *équivalente*. Il est cependant possible d'obtenir une matrice semblable mais il faut pour cela respecter la règle suivante : *après chaque opération effectuée sur les colonnes, on effectue l'opération inverse sur les lignes et vice-versa*. Par exemple,

Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 \\ 7 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 5 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $L_1 \leftrightarrow L_2$, $C_1 \leftrightarrow C_2$

Dilatation *Transvection*

$$\begin{pmatrix}1&5&-1\\7&5&1\\4&3&2\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}1&-5&1\\-7&5&1\\-4&3&2\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&5&-1\\7&5&1\\4&3&2\end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix}-6&-6&-2\\7&12&1\\4&7&2\end{pmatrix}$$

$$L_1 \leftarrow -L_1\ ,\ C_1 \leftarrow -C_1 \qquad C_2 \leftrightarrow C_2 + C_1\ ,\ L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2$$

Attention, si on effectue la transvection $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$, il faut la faire suivre de $C_j \leftarrow C_j - \lambda C_i$.

✘ On abordera le test (↯ **12.10**).

Nous avons déjà vu que cette relation apparaît dans le cadre des changements de base.

Proposition 12.23. Similitude et endomorphismes

Soit $n \in \mathbb{N}$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $(A_1, A_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

a. A_1 et A_2 sont semblables sur $\mathbb{K}$;

b. il existe des bases $\mathscr{B}_1$ et $\mathscr{B}_2$ de E et $f \in \mathscr{L}(E)$ tels que $A_1 = \text{mat}_{\mathscr{B}_1}(f)$ et $A_2 = \text{mat}_{\mathscr{B}_2}(f)$.

Ainsi, des matrices semblables sur $\mathbb{K}$ *représentent* le même endomorphisme dans des bases différentes.

✘ Un cas d'école dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Les matrices $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\0&2\end{smallmatrix}\right]$ et $\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&2\end{smallmatrix}\right]$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

✘ Détermination d'un représentant « simple » dans une classe de similitude. Nous avons vu que, pour la relation ∼, chaque classe contient un représentant simple, une matrice J_r. Qu'en-est-il pour la relation de similitude ?

- ✔ Expliquons d'abord l'intérêt que cela pourrait avoir dans le domaine numérique : si $M = P^{-1}RP$ avec R simple, alors $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = P^{-1}R^kP$. Le calcul de M^k serait donc simplifié.

- ✔ Dans le cadre géométrique, la connaissance d'un représentant simple d'une classe de similitude reviendrait à connaître une base dans laquelle l'action de l'endomorphisme est simple.

- ✔ Et maintenant, voici une réponse : c'est possible, cela relève de la théorie de la *réduction* et plus particulièrement de la *réduction de Jordan*. Ces aspects dépassent de loin le cadre de ce cours. Il faut savoir que *certaines* classes de similitudes admettent un représentant diagonal, mais pas toutes. Une matrice est dite diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si sa classe de similitude contient une matrice diagonale, ie si elle est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice diagonale. La diagonalisabilité sera étudiée l'an prochain.

5. Matrices définies par blocs

Il est souvent commode de travailler avec des sous-matrices plutôt que coefficient par coefficient.

Définition 12.24. Matrice par blocs

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ et $D \in \mathscr{M}_{m,q}(\mathbb{K})$. On note

$$M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$$

l'unique matrice de $\mathscr{M}_{n+m,p+q}(\mathbb{K})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [\![1, n+m]\!] \times [\![1, p+q]\!]$,

$$M_{i,j} = \begin{cases} A_{i,j} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant p \\ B_{i,j-p} & \text{si } 1 \leqslant i \leqslant n \text{ et } p+1 \leqslant j \leqslant p+q \\ C_{i-n,j} & \text{si } n+1 \leqslant i \leqslant n+m \text{ et } 1 \leqslant j \leqslant p \\ D_{i-n,j-p} & \text{si } n+1 \leqslant i \leqslant n+m \text{ et } p+1 \leqslant j \leqslant p+q \end{cases}$$

✘ Construction d'une matrice carrée d'ordre trois par blocs.

Pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = [4]$$

on a

$$\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

On généralise bien-sûr à plus de quatre blocs. Les opérations usuelles se généralisent très naturellement au cadre des matrices par blocs.

Proposition 12.25. Opérations par blocs

a. Lorsque toutes les sommes sont définies, $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) + \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A+A' & B+B' \\ \hline C+C' & D+D' \end{array}\right)$;

b. Lorsque tous les produits sont définis, $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} A' & B' \\ \hline C' & D' \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AA'+BC' & AB'+BD' \\ \hline CA'+DC' & CB'+DD' \end{array}\right)$.

c. En particulier, pour des blocs carrés et tout $n \in \mathbb{N}$, $\left(\begin{array}{c|c} D_1 & 0 \\ \hline 0 & D_2 \end{array}\right)^n = \left(\begin{array}{c|c} D_1^n & 0 \\ \hline 0 & D_2^n \end{array}\right)$.

✘ Un exercice classique. Soit $A \in \mathscr{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $AB = \left[\begin{array}{c|c} I_2 & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right]$. Calculer BA.

- ✔ On écrit $A = \left(\begin{array}{c} A_1 \\ \hline L \end{array}\right)$, $B = \left(\begin{array}{c|c} B_1 & C \end{array}\right)$ avec $(A_1, B_1, L, C) \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})^2 \times \mathscr{M}_{1,2}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R})$.
- ✔ On a $AB = \left(\begin{array}{c|c} A_1B_1 & A_1C \\ \hline LB_1 & LC \end{array}\right)$ d'où $A_1B_1 = I_2$, $A_1C = 0$, $LB_1 = 0$ et $LC = 0$.
- ✔ On déduit de $A_1B_1 = I_2$ que A_1 et B_1 sont inversibles avec $B_1 = A_1^{-1}$. On en conclut que $C = B_1 0 = 0$ et $L = 0A_1 = 0$. Puis on en déduit que $BA = B_1A_1 = I_2$. Ici, les calculs par blocs sont assez efficaces (par rapport à l'utilisation de 12 inconnues, coefficients de A et B).

L'inversibilité d'une matrice triangulaire par blocs est facilement caractérisée par ses blocs diagonaux.

Proposition 12.26. Inversibilité d'une matrice triangulaire par bloc

Soit P et Q deux matrices carrées.

⇛ $\left(\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right)$ est inversible si et seulement si P et Q sont inversibles ;

⇛ En cas d'inversibilité, $\left[\begin{smallmatrix} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{smallmatrix}\right]^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} P^{-1} & 0 \\ \hline 0 & Q^{-1} \end{smallmatrix}\right)$.

⇛ Plus généralement, $\left(\begin{smallmatrix} P & R \\ \hline 0 & Q \end{smallmatrix}\right)$ est inversible si et seulement si P et Q sont inversibles ;

On peut aussi justifier le premier point de cette proposition en remarquant que $\operatorname{rg}\left[\begin{array}{c|c} P & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array}\right] = \operatorname{rg} P + \operatorname{rg} Q$.

Ces résultats se généralisent (par exemple par récurrence) à un nombre quelconque de blocs.

Le calcul par blocs est adapté aux décompositions en somme directe

Par exemple, si $E = E_1 \oplus E_2$, si $f \in \mathscr{L}(E)$, et si $\mathscr{E}_1$, $\mathscr{E}_2$ sont des bases de E_1 et E_2, alors la matrice de f dans la base $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ de E est de la forme

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f) = \left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \hline C & D \end{smallmatrix}\right)$$

en notant $\mathscr{B} = (\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$.

En particulier,

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{E}_1,\mathscr{B}}(f|_{E_1}) = \left(\begin{smallmatrix} A \\ \hline C \end{smallmatrix}\right), \quad \operatorname{mat}_{\mathscr{E}_2,\mathscr{B}}(f|_{E_2}) = \left(\begin{smallmatrix} B \\ \hline D \end{smallmatrix}\right)$$

- ✔ Le sev E_1 (resp. E_2) est stable par f *si et seulement si* $C = 0$ (resp. $B = 0$).
- ✔ Si E_1 est stable par f, alors $\operatorname{mat}_{\mathscr{E}_1}(f|_{E_1}^{E_1}) = A$.

Voici une application classique et spectaculaire du calcul matriciel par blocs.

✘ Calcul d'une dimension. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et F un sev de E de dimension p. On note

$$\mathscr{S} = \left\{\phi \in \mathscr{L}(E)\,;\, \phi(F) \subset F\right\}$$

Montrer que $\mathscr{S}$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$ et calculer sa dimension.

- ✔ L'application nulle appartient clairement à $\mathscr{S}$. Soit $(\phi_1, \phi_2; \lambda) \in \mathscr{S}^2 \times \mathbb{K}$. Pour tout $x \in F$, on a

$$(\phi_1 + \lambda\phi_2)(x) = \phi_1(x) + \lambda\phi_2(x) \in F$$

car $\phi_1(x)$ et $\phi_2(x)$ appartiennent au sev F. Ainsi $\mathscr{S}$ est un sev de $\mathscr{L}(E)$.

- ✔ Si $p = 0$, alors $\mathscr{S} = \mathscr{L}(E)$.
- ✔ Supposons $p > 0$ et considérons une base $(e_1, \ldots, e_p)$ de F que l'on complète en $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ base de E. Notons $\phi : \mathscr{L}(E) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $\phi(f) = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$. On a clairement

$$\phi(\mathscr{S}) = \left\{\left(\begin{smallmatrix} A & B \\ \hline 0 & D \end{smallmatrix}\right) ; (A, B, D) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,n-p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{n-p}(\mathbb{K})\right\}$$

Puisque ϕ est un isomorphisme, on en déduit que $\dim \mathscr{S} = \dim \phi(\mathscr{S}) = n^2 - p(n-p)$.

Signalons qu'il est possible d'effectuer des opérations de pivot par blocs :

$$\left(\begin{smallmatrix} A & C \\ \hline A & B \end{smallmatrix}\right) \sim \left(\begin{smallmatrix} A & C \\ \hline 0 & B-C \end{smallmatrix}\right) \quad L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

6. Polynômes de matrices et d'endomophismes

Nous avons brièvement évoqué ce sujet dans le chapitre sur les polynômes et en particulier celui consacré à *la substitution*.

Définition 12.27. Polynômes de matrices

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour $P = \sum_{k=0}^{m} p_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on pose $P(A) := \sum_{k=0}^{m} p_k A^k$.

Nous avons déjà démontré les propriétés de la substitution polynomiale : pour tous polynômes P et Q à coefficients dans $\mathbb{K}$, on a

$$(PQ)(A) = P(A)Q(A), \quad (P+\lambda Q)(A) = P(A) + Q(A) \quad P(Q(A)) = (P \circ Q)(A)$$

Définition 12.28. Polynômes annulateurs d'une matrice carrée

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme annulateur de A, tout $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(A) = 0$.

L'existence de polynômes annulateurs *non nuls* est toujours assurée.

- Pour $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$, $A^2 = 2A$ donc $P = X^2 - 2X$ est annulateur de A.
- Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Cette matrice est la matrice d'un projecteur *si et seulement si* $X^2 - X$ est annulateur de A, d'une symétrie *si et seulement si* $X^2 - 1$ est annulateur de A.
- Une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente *si et seulement si* elle admet un polynôme annulateur de la forme X^p, $p \in \mathbb{N}^*$.
- Plus généralement, soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Comme $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie égale à n^2, la famille $\left(I_n, A, \ldots, A^{n^2}\right)$ est liée : il existe $m \in \mathbb{N}$, $(\lambda_0, \ldots, \lambda_{n^2}) \in \mathbb{K}^{n^2+1} \setminus \{0\}$ tel que

$$\sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k A^k = 0, \quad \text{ie} \quad P(A) = 0 \text{ avec } \quad P(X) = \sum_{k=0}^{n^2} \lambda_k X^k$$

Sur le degré d'un polynôme annulateur

On peut en fait démontrer que $(I_n, \ldots, A^n)$ est toujours liée (mais ce n'est pas aussi facile) : il existe toujours un polynôme annulateur de dégré égal à la taille de la matrice. Par exemple, pour $n = 2$:

$$\forall M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K}), \quad M^2 - \operatorname{tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$$

L'existence et la connaissance d'un polynôme annulateur de faible degré peut aider au calcul de l'inverse d'une matrice inversible.

- Application des polynômes annulateurs à l'inversion. Soit $A := \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.
  - ✔ Comme $(A + I_3)^2 = 3(A + I_3)$, le polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$ est annulateur de A.
  - ✔ Ainsi $A\left(\frac{A - I_3}{2}\right) = I_3$ donc A est inversible et $A^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

✘ Application des polynômes annulateurs au calcul des puissances. On pose $A = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 1 \\ -6 & -1 \end{smallmatrix}\right]$.

- ✔ Le polynôme $P(X) = X^2 - \mathrm{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X-2)$ est annulateur de A.

- ✔ Soit X^n. Effectuons la division euclidienne de X^n par $P(X)$: il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^n = Q(X)P(X) + aX + b$. Comme 1 et 2 sont racines de $P(X)$, on obtient après substitution de X par 1 puis par 2 dans l'égalité de la division euclidienne précédente :

$$\begin{cases} 1 & = a + b \\ 2^n & = 2a + b \end{cases}$$

ainsi $(a,b) = (2^n - 1, 2 - 2^n)$. Et finalement, après substitution de X par A dans l'égalité de la division euclidienne :

$$A^n = (2^n - 1)A + (2 - 2^n)I_2$$

En résumé, on retiendra les méthodes suivantes :

Utilisation d'un polynôme annulateur non nul

- ⇛ Pour calculer A^m connaissant un polynôme $P \neq 0$ annulateur de A, on peut calculer le reste R dans la division de X^m par P, on a alors $A^m = R(A)$.
- ⇛ Si A admet un polynôme annulateur P tel que $P(0) \neq 0$, A est inversible et on peut exprimer A^{-1} comme un polynôme de la matrice A.

On peut également faire des substitutions polynomiales dans la $\mathbb{K}$-algèbre $\mathscr{L}(E)$: on parle de *polynômes d'endomorphisme*. Les définitions et méthodes étudiées ci-dessus s'étendent directement à ce cadre. Par exemple, un endormophisme f de E est un projecteur de E *si et seulement si* $X^2 - X$ est polynôme annulateur de f.

7. Endomorphismes et matrices nilpotents

Nous ne rappellerons la définition que dans le cadre matriciel.

Définition 12.29. Matrices nilpotentes, indice de nilpotence

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- ⇛ On dit que A est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.
- ⇛ Supposons A nilpotente. On appelle indice de nilpotence de A le plus petit $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$.

Nous avons déjà vu quelques exemples au détour de certains exercices de calcul matriciel.

✘ Les matrices strictement triangulaires supérieures sont nilpotentes. Voici quelques cas typiques.

- ✔ La matrice $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ définie par $J_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = i+1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ est nilpotente d'indice n.

✔ Plus généralement, toute matrice strictement triangulaire supérieure est nilpotente.

Une manière élégante de le prouver est d'utiliser le langage géométrique : soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ strictement triangulaire supérieure et f l'endomorphisme canoniquement associé à f. Notons $(e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. Comme A est strictement triangulaire supérieure, on a $f(e_1) = 0$ et

$$\forall i \in [\![2, n]\!],\ \ f\left(\text{Vect}(e_1, \ldots, e_i)\right) \subset \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{i-1})$$

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccc} f(e_1) & f(e_2) & \cdots & \cdots & f(e_i) & \cdots \end{array} \\ \begin{array}{c} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_{i-1} \\ e_i \\ \vdots \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & a_{1,2} & \cdots & \cdots & a_{1,i} & \cdots \\ 0 & 0 & \ddots & & a_{1,i} & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \\ 0 & 0 & & \ddots & a_{i-1,i} & \\ 0 & 0 & & & 0 & \ddots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \end{array}$$

On en déduit par une récurrence immédiate que

$$\forall k \in [\![1, n-1]\!],\ \ f^k\left(\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)\right) \subset \text{Vect}(e_1, \ldots, e_{n-k})$$

et donc $f^n\underbrace{\left(\text{Vect}(e_1, \ldots, e_n)\right)}_{=\mathrm{E}} \subset \{0\}$, ie $f^n = 0$ et donc $A^n = 0$.

On peut bien-sûr démontrer ce résultat en utilisant la définition du produit matriciel.

Par une simple transposition, on en déduit que les matrices strictement triangulaires inférieures sont également nilpotentes. Les exemples précédents ne sont pas universaux (sauf pour $n = 1$). Pour $n \geqslant 2$, on construit sans peine des matrices nilpotentes qui ne sont pas triangulaires. Il suffit de commencer par le cas minimal $n = 2$ et généraliser à $n \geqslant 2$ en exploitant le calcul par blocs.

✘ Donnons une matrice nilpotente de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non triangulaire pour $n \geqslant 2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{vérifie} \quad A^2 = 0 \text{ et plus généralement } A' = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \quad \text{est nilpotente d'ordre deux}$$

Proposition 12.30. Indice de nilpotence

L'indice de nilpotence est majoré par la taille de la matrice.

En particulier, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente, alors $A^n = 0$. Nous terminons par un calcul d'inverse.

Proposition 12.31. Identité+nilpotente

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ nilpotente. La matrice $I_n - A$ est inversible et d'inverse $I_n + A + \cdots + A^{n-1}$.

8. Trace d'un endomorphisme

Nous allons utiliser l'invariance par similitude de la trace pour définir la trace d'un endomorphisme en dimesion finie.

Définition 12.32. Trace d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. Le scalaire

$$\operatorname{tr}\left(\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)\right)$$

est indépendant de la base $\mathscr{B}$ de E. On l'appelle trace de f et on le note $\operatorname{tr} f$.

On a appliqué la relation $\forall (\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2\,,\ \operatorname{tr}(\mathrm{AB}) = \operatorname{tr}(\mathrm{BA})$.

Proposition 12.33. Propriétés de la trace

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, $(f,g) \in \mathscr{L}(\mathrm{E})^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\operatorname{tr}(f+\lambda g) = \operatorname{tr} f + \lambda \operatorname{tr} g \quad \text{et} \quad \operatorname{tr}(f \circ g) = \operatorname{tr}(g \circ f)$$

- Trace d'un projecteur. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et p un projecteur de E. On a $\operatorname{tr} p = \operatorname{rg} p$. En effet, en notant r le rang de p et $\mathscr{B}$ une base adaptée à la décomposition $\mathrm{E} = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$, on a

$$\mathrm{M} := \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donc $\operatorname{tr} p = \operatorname{tr} \mathrm{M} = r = \operatorname{rg} p$.

9. Énoncés des tests

12.1.

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{E}_n = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ et T_n l'application définie sur E_n par $\mathrm{T}_n(\mathrm{P}) = (n\mathrm{X}+1)\mathrm{P} + \left(1-\mathrm{X}^2\right)\mathrm{P}'$.

a. Prouver que $\mathrm{T}_n \in \mathscr{L}(\mathrm{E}_n)$.

b. Écrire la matrice $\mathrm{M}_n = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}_n}(\mathrm{T}_n)$ de T_n dans la base canonique de E_n.

12.2.

Soit $\mathrm{L} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x+2y-z, y+z, x+y-2z)$.

a. Écrire la matrice associée à L dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

b. Déterminer $\mathrm{L}\circ\mathrm{L} = \mathrm{L}^2$ et $\mathrm{L}\circ\mathrm{L}\circ\mathrm{L} = \mathrm{L}^3$ en calculant leurs matrices dans la base canonique.

c. Quelle est la matrice de L^{16} dans la base canonique ?

12.3.

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^2$, $u = (1,1)$, $v = (1,-1)$ et $\mathscr{B} = (u, v)$.

a. Justifier que $\mathscr{B}$ est une base de E.

b. Donner les matrices de passage entre $\mathscr{B}$ et la base canonique $\mathscr{B}_0$ de E.

12.4.

Les applications suivantes sont clairement linéaires. Déterminer leur noyau et leur image et écrire dans chaque cas la matrice M correspondante rapportée aux bases canoniques.

a. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$;

b. $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x-y, x+y, x+2y)$;

c. $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R},\ (x, y, z) \mapsto x-3y+2z$;

d. $\theta : \mathbb{R}^3[\mathrm{X}] \to \mathbb{R}^3[\mathrm{X}],\ \mathrm{P} \mapsto \mathrm{P}'$.

12.5.

Trouvez deux matrices A et B dans $\mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ telles que $\mathrm{rg}\,\mathrm{A} = \mathrm{rg}\,\mathrm{B} = 2$ et $\mathrm{AB} = 0$.

12.6.

Dire si les matrices suivantes sont inversibles ou non. Le cas échéant, calculer leur inverse ou sinon, donner une base de leur image et une base de leur noyau.

a. $\mathrm{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$;

b. $\mathrm{A}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

c. $\mathrm{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$;

d. $\mathrm{A}_4 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e. $\mathrm{A}_5 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

f. $\mathrm{A}_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

g. $\mathrm{A}_7 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

h. $\mathrm{A}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

12.7.

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}_2[\mathrm{X}]$, u et v les deux endomorphismes de E définis par $u(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}+1)$ et $v(\mathrm{P}) = \mathrm{P}(\mathrm{X}-1)$. Discuter en fonction de $k \in \mathbb{R}$ le rang de $u + kv$.

12.8.

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $(\mathrm{M}, \mathrm{M}') \in \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$ tels que $\operatorname{rg} \mathrm{A} = p$ et $\mathrm{AM} = \mathrm{AM}'$. A-t-on $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$?

12.9.

Soit $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$. Trouver deux matrices inversibles P' et Q' telles que $\mathrm{A} = \mathrm{P}'\mathrm{J}_2\mathrm{Q}'$.

12.10.

a. Les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ sont-elles semblables sur $\mathbb{R}$?

b. Montrer que les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 & 0 \\ d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & b & 0 \end{pmatrix}$ sont semblables sur $\mathbb{R}$.

10. Solutions des tests

12.1.

a. Soit P et Q dans E_n et $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}T_n(P+\lambda Q) &= (nX+1)(P+\lambda Q)\\ &\quad + (1-X^2)(P+\lambda Q)'\\ &= (nX+1)(P+\lambda Q)\\ &\quad + (1-X^2)(P'+\lambda Q')\\ &= (nX+1)P + (1-X^2)P'\\ &\quad + \lambda\left((nX+1)Q+(1-X^2)Q'\right)\\ &= T_n(P)+\lambda T_n(Q)\end{aligned}$$

par linéarité de la dérivation et du produit. Vérifions quele degré de $T_n(P)$ est inférieur ou égal à n lorsque $P \in E_n$. Un tel polynôme s'écrit

$$P = \sum_{k=0}^{n} p_k X^k$$

et donc

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k p_k X^{k-1}$$

Le polynôme $(1+nX)P$ est donc de degré au plus $n+1$ et le cœfficient de X^{n+1} dans ce polynôme vaut np_nX^{n+1}. De même, le polynôme $(1-X^2)P'$ est donc de degré au plus $n+1$ et le cœfficient de X^{n+1} dans ce polynôme vaut np_nX^{n+1}. Par différence, $T_n(P)$ est de degré au plus n.

b. On a, pour tout entier $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$\begin{aligned}T_n(X^k) &= (nX+1)X^k + (1-X^2)kX^{k-1}\\ &= kX^{k-1} + X^k + (n-k)X^{k+1}\end{aligned}$$

On a donc

$$M_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0\\ n & 1 & 2 & \ddots & \vdots & 0\\ 0 & n-1 & 1 & \ddots & 0 & \vdots\\ \vdots & 0 & n-2 & \ddots & n-1 & 0\\ \vdots & \vdots & 0 & \ddots & 1 & n\\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

12.2.

Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

a. On a $M = \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$.

b. La matrice de L^2 dans $\mathscr{B}$ vaut

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3\\ 1 & 2 & -1\\ -1 & 1 & 4\end{pmatrix}$$

Celle de L^3 vaut $M^3 = 3M$.

c. On a donc

$$\begin{aligned}\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(L^{16}) &= M^{16} = M^{3\times5+1}\\ &= (M^3)^5M = (3M)^5M\\ &= 3^5M^{2\times3} = 3^5(3M)^2\\ &= 3^{5+2}M^2 = 3^7M^2\end{aligned}$$

12.3.

a. Les vecteurs u et v n'étant pas colinéaires, $\mathscr{B}$ est libre. Comme $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$, $\mathscr{B}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

b. On a bien-sûr

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

Appliquons la méthode du pivot de Gauss pour inverser P…

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 1\end{array}\right]$$

Par l'opération $L_2 \leftrightarrow (-L_2+L_1)/2$,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2\end{array}\right]$$

puis, en effectuant $L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2$,

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1/2 & 1/2\\ 0 & 1 & 1/2 & -1/2\end{array}\right]$$

L'inverse de $\mathrm{mat}_{\mathscr{B}_0}(\mathscr{B})$ vaut donc

$$\mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}_0) = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}$$

12.4.

a. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. On a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a clairement

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2),\ \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(e_3)$$

b. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathscr{B}' = (e'_1, e'_2)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2$. On a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

On a clairement

$$\begin{cases} \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, -e_1 + e_2 - e_3) \\ \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \end{cases}$$

c. Notons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ et $\mathscr{B}' = (1)$ les bases canoniques de $\mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}$. On a

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

On a clairement

$$\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}, \mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Vect}(3e_1 + e_2, -2e_1 + e_3)$$

d. Notons $\mathscr{B} = (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. On a

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On a clairement $\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}(1, 2X, 3X^2) = \mathbb{R}_2[X]$ et $\mathrm{K}er(f) = \mathrm{Vect}(1) = \mathbb{R}_0[X]$.

12.5.

Les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

conviennent.

12.6.

Dans tout ce qui suit, on notera l

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},\ e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a. La première ligne de A_1 étant nulle, A_1 n'est pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_1)$ *si et seulement si*

$$-x_1 + x_2 = 0 \ \text{ et } \ -2x_3 = 0$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{avec } x_1 \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_1) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}(e_2 + e_3)$$

Puisque les deux premières colonnes de A_1 sont colinéaires à e_2 et la dernière à e_3, on a

$$\mathrm{Im}(A_1) = \mathrm{Vect}(e_2, e_3) \ \text{ et } \ \mathrm{rg}(A_1) = 2$$

b. Appliquons la méthode du pivot de Gauss…

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

par $L_1 \leftarrow -L_2$ et $L_2 \leftarrow L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

puis, en effectuant $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_1$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

continuons par $L_3 \leftarrow (-L_3 + L_2)/3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

puis $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_2 + L_3$,

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{array}\right]$$

La matrice A_2 est donc inversible d'inverse

$$A_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}$$

c. La dernière ligne de A_3 étant la différence des deux premières, les lignes de la matrice forment une famille liée de $\mathbb{R}^3$ et A_3 n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_3)$ *si et seulement si*

$$-x_1 + x_2 = 0 \ \text{ et } \ 2x_3 = 0$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \text{avec } x_1 \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A_3) &= \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right] \\ &= \mathrm{Vect}(e_2 + e_3) \end{aligned}$$

Puisque les deux premières colonnes de A_1 sont égales, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A_3) &= \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right] \\ &= \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, -e_2 + e_3) \end{aligned}$$

et $\mathrm{rg}(A_3) = 2$.

d. La deuxième ligne de A_4 étant nulle, A_4 n'est pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_4)$ *si et seulement si* $2x_1 - x_3 = 0$, ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \ \text{avec } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A_4) &= \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right] \\ &= \mathrm{Vect}(e_1 + 2e_3, e_2) \end{aligned}$$

Puisque toutes les colonnes de A_4 sont colinéaires à la dernière, on a

$$\mathrm{Im}(A_4) = \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)\right] = \mathrm{Vect}(e_3 - e_1)$$

et $\mathrm{rg}(A_4) = 1$.

e. La dernière ligne de A_5 étant égale à la première, les lignes de la matrice forment une famille liée de $\mathbb{R}^3$ et A_5 n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_5)$ *si et seulement si*

$$-x_1 = 0 \ \text{ et } \ -x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix}, \ \text{avec } x_2 \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_5) = \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right)\right] = \mathrm{Vect}(e_2 - e_3)$$

Puisque les deux dernières colonnes de A_5 sont égales mais non colinéaires à la première, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A_5) &= \mathrm{Vect}\left[\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right)\right] \\ &= \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + e_3, e_2) \end{aligned}$$

et $\mathrm{rg}(A_5) = 2$.

f. Les première et troisième lignes de A_6 étant nulles, A_6 n'est donc pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_6)$ *si et seulement si* $x_1 - x_2 - x_3 = 0$, ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A_6) &= \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \mathrm{Vect}(e_1 + e_3, e_2 - e_3) \end{aligned}$$

Puisque toutes les colonnes de A_6 sont colinéaires à la première, on a

$$\mathrm{Im}(A_6) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}(e_2)$$

et $\mathrm{rg}(A_6) = 1$.

g. La deuxième ligne de A_7 étant nulle, A_7 n'est pas inversible. Un vecteur colonne X appartient à $\mathrm{Ker}(A_7)$ *si et seulement si* $-x_2 = 0$ et $-2x_1 = 0$, ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\mathrm{Ker}(A_7) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Vect}(e_3)$$

Puisque la dernière colonne de A_7 est nulle et les deux autres non-colinéaires, on a

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(A_7) &= \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \\ &= \mathrm{Vect}(e_1, e_3) \end{aligned}$$

et $\mathrm{rg}(A_7) = 2$.

h. Appliquons la méthode du pivot de Gauss...

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 5L_1$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -2 & -4 \end{bmatrix}$$

puis, en effectuant $L_3 \leftrightarrow L_3 + L_2$,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Un vecteur X appartient donc à $\mathrm{Ker}(A_8)$ *si et seulement si*

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \text{ et } x_2 + 2x_3 = 0$$

ie X est de la forme

$$X = \begin{pmatrix} x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}, \text{ avec } x_3 \in \mathbb{R}$$

On a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(A_8) &= \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \\ &= \mathrm{Vect}(e_1 - 2e_2 + e_3) \end{aligned}$$

Puisque les deux premières colonnes de A_8 ne sont pas colinéaires, on a

$$\mathrm{Im}(A_8) = \mathrm{Vect}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}\right]$$

donc $\mathrm{Im}(A_8) = \mathrm{Vect}(e_1 + e_2 + 5e_3, e_1 + 3e_2 + 3e_3)$, et $\mathrm{rg}(A_8) = 2$.

12.7.

Soit $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ la base canonique de E. On a

$$\begin{cases} u(1) &= 1 + k \\ u(X) &= (1+k)X + 1 - k \\ u(X^2) &= (1+k)X^2 + (2-2k)X + 1 + k \end{cases}$$

Ainsi

$$A_k = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u + kv) = \begin{pmatrix} 1+k & 1-k & 1+k \\ 0 & 1+k & 2-2k \\ 0 & 0 & 1+k \end{pmatrix}$$

On discute alors facilement sur k :

⇛ Si $k \neq -1$, alors $\mathrm{rg}(u + kv) = \mathrm{rg}(A_k) = 3$.

⇛ Si $k = -1$, alors on a

$$A_k = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(u + kv) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\mathrm{rg}(u + kv) = \mathrm{rg}(A) = 2$.

12.8.

La réponse est oui. Considérons les applications linéaires $f : \mathbb{K}^p \to \mathbb{K}^n$, $g : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p$, $g' : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^p$ canoniquement associées à A, M et M′. Comme AM et AM′ sont les matrices de $f \circ g$ et $f \circ g'$ dans les bases canoniques, on a $f \circ g = f \circ g'$. Comme $\mathrm{rg}(f) = \mathrm{rg}(\mathrm{A}) = p$, f est injective d'o'ù $g = g'$ et donc $\mathrm{M} = \mathrm{M}'$.

12.9.

- Tout d'abord, il est clair que $\mathrm{rg}(\mathrm{A}) = 2$ ($\mathrm{C}_1 + \mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3 = 0$ et $(\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2)$ est libre). Donc on a bien $\mathrm{A} \sim \mathrm{J}_2$.
- On a clairement

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= \mathrm{Q}_1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$\mathrm{AQ}_1 \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= \mathrm{Q}_2} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$\mathrm{AQ}_1\mathrm{Q}_2 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= \mathrm{Q}_3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$\mathrm{AQ}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3 \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= \mathrm{Q}_4} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

puis

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{= \mathrm{P}_1} \mathrm{AQ}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

et finalement :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{= \mathrm{P}_2} \mathrm{P}_1\mathrm{AQ}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc, en posant $\mathrm{P} = \mathrm{P}_2\mathrm{P}_1$ et $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}_1\mathrm{Q}_2\mathrm{Q}_3\mathrm{Q}_4$, $\mathrm{PAQ} = \mathrm{J}_2$ et ainsi $\mathrm{A} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{J}_2\mathrm{Q}^{-1}$. Pour obtenir P^{-1} et Q^{-1} il suffit d'effectuer les opérations inverses en sens inverse et séparément sur l'identité (ou encore de calculer comme une brute). Après tout calcul :

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \ \mathrm{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

12.10.

a. Non, car elles n'ont pas le même rang.

b. Si f est canoniquement associé à A et (e_1, e_2, e_3, e_4) est la base canonique, alors $\mathrm{B} = \mathrm{mat}_{(e_1, e_4, e_2, e_3)}(f)$. Ainsi A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$. On peut aussi obtenir le résultat par les opérations de pivots : $\mathrm{C}_1 \leftrightarrow \mathrm{C}_4$ et $\mathrm{L}_1 \leftrightarrow \mathrm{L}_4$.