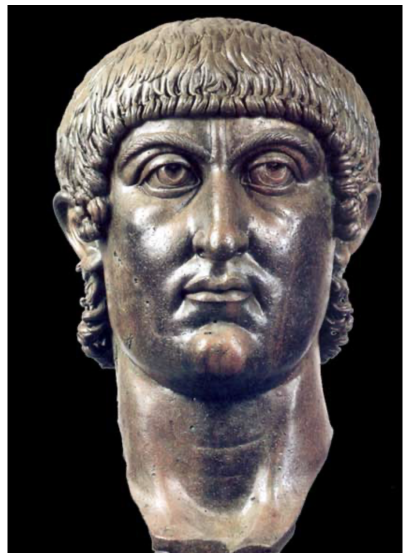
ALG 13 | Déterminants

On s'appuie sur la notion intuitive de volume algébrique des parallélogrammes et des parallélépipèdes pour généraliser l'idée de volume à des espaces vectoriels de dimension finie quelconque.



Tête de Constantin

L’IDÉE de déterminant est née en Occident au milieu du XVI$^{\text{e}}$ siècle, soit près de deux siècles avant l’émergence du calcul matriciel. *Cardan* utilisa pour la première en 1545 dans son *Ars Magna* des déterminants d’ordre deux afin de résoudre un système linéaire de deux équations à deux inconnues.

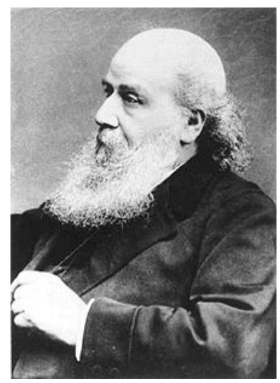
Gabriel Cramer

La terminologie *déterminant* conserve d’ailleurs la trace de ce point de départ de la théorie : on associe à un système linéaire (de n équations à n inconnues) un nombre, le déterminant du sytème, qui *détermine* l’unicité de la solution du système. Il faudra attendre plus d’un siècle avant une généralisation du déterminant aux tailles trois et quatre par *Leibniz* et le japonais *Kowa Seki*. En 1748, *Mac Laurin* aborde la résolution d’un système linéaire de quatre équations à quatre inconnues. La théorie des déterminants fut ainsi relancée et dès 1750 *Gabriel Cramer* énonce les règles de résolution d’un système général de n équations à n inconnues sans toutefois en proposer une démonstration.

Suivirent alors de nombreuses contributions au calcul des déterminants parmi lesquelles nous citerons *Bézout* en 1764, *Vandermonde* en 1771.

Vandermonde

En 1772, *Lagrange* apporta un nouvel éclairage sur la notion de déterminant en découvrant le lien entre cet outil et le calcul des aires et des volumes. *Cauchy* publia en 1812 la formule du déterminant d’un produit. Le mathématicien allemand *Jacobi* publia en 1841 plusieurs articles sur le sujet qui contribuèrent à la diffusion de cette notion dans l’ensemble de la communauté scientifique. Fondateurs du calcul matriciel, *Cayley* et *Sylvester* intégrèrent les déterminants à leurs travaux sur les matrices et établirent la célèbre formule de l’inverse d’une matrice en fonction de son déterminant et de sa comatrice.



Sylvester

1. Généraliser la notion de volume

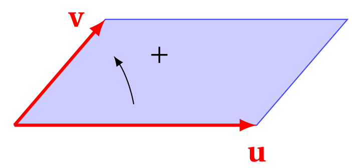
Dans le cours d’algèbre linéaire, nous avons vu comment généraliser la géométrie en dimension deux et trois à des dimensions quelconques : on commence par isoler des propriétés calculatoires fondamentales et intuitives en petites dimensions (associativité, etc.) puis on bâtit une théorie plus générale en choisissant ces propriétés pour axiomes. Nous allons procéder de même pour étendre la notion d’aire et de volume algébrique bien connues pour les parallélogrammes et les parallélépipèdes à des dimensions finies quelconques.

1.1. Propriétés fondamentales des longueurs, aires et volumes algébriques

Appuyons-nous sur l’intuition géométrique issue des petites dimensions.

En dimension un, l’application ϕ qui à un vecteur associe sa longueur algébrique (on choisit une orientation) est clairement linéaire : $\phi(\lambda \mathbf{u}) = \lambda\phi(\mathbf{u})$.

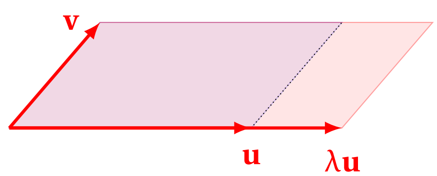
Dans le plan, l'aire algébrique du parallélogramme formé sur le couple de vecteurs $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ est positive si « *le sens direct est le plus court chemin de* $\mathbf{u}$ *à* $\mathbf{v}$ ».



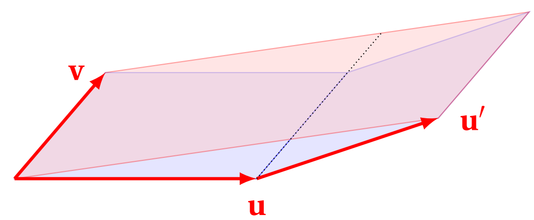
Considérons l'application

$$\begin{aligned}\phi:\ \left(\mathbb{R}^2\right)^2 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\mathbf{u},\mathbf{v}) &\longmapsto \text{aire algébrique du parallélogramme formé sur } (\mathbf{u},\mathbf{v})\end{aligned}$$

Les figures suivantes illustrent la linéarité de ϕ par rapport à sa première variable.



$\phi(\lambda\mathbf{u},\mathbf{v}) = \lambda\phi(\mathbf{u},\mathbf{v})$



$\phi(\mathbf{u}+\mathbf{u}',\mathbf{v}) = \phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) + \phi(\mathbf{u}',\mathbf{v})$

Sur la figure de droite ci-dessus, l'aire en bleu est égale à l'aire en rose (l'aire d'un parallélogramme est égale en valeur absolue au produit de sa hauteur et de sa base). Comme $\phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\phi(\mathbf{v},\mathbf{u})$, on en déduit que ϕ est également linéaire par rapport à la seconde variable. En résumé :

- $\Rrightarrow$ ϕ est linéaire par rapport à chacune de ses variables :

$$\forall\lambda\in\mathbb{R},\ \ \forall(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\in\left(\mathbb{R}^2\right)^3,\ \begin{cases}\phi(\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v},\mathbf{w}) &= \phi(\mathbf{u},\mathbf{w}) + \lambda\phi(\mathbf{v},\mathbf{w})\\ \phi(\mathbf{w},\mathbf{u}+\lambda\mathbf{v}) &= \phi(\mathbf{w},\mathbf{u}) + \lambda\phi(\mathbf{w},\mathbf{v})\end{cases}$$

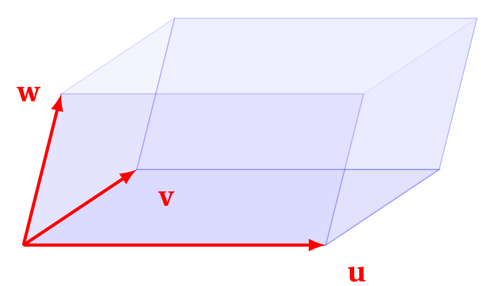
- $\Rrightarrow$ f est antisymétrique :

$$\forall(\mathbf{u},\mathbf{v})\in\left(\mathbb{R}^2\right)^2,\ \ \phi(\mathbf{u},\mathbf{v}) = -\phi(\mathbf{v},\mathbf{u})$$

On se convainc sans peine que le volume algébrique du parallélépipède $\mathscr{P}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})$ construit sur trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$ vérifie les mêmes propriétés :

$$\begin{aligned}\phi:\ \left(\mathbb{R}^3\right)^3 &\longrightarrow \mathbb{R}\\ (\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}) &\longmapsto \text{volume de } \mathscr{P}(\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w})\end{aligned}$$

Elle est linéaire par rapport à chacune de ses variables et change de signe après permutation de deux des trois variables.



1.2. Déterminants en dimension un, deux et trois

Avant de nous lancer dans le cas général, nous allons étudier les cas $n=1$, $n=2$ et $n=3$. L'objectif de ce paragraphe est de montrer que les conditions algébriques dégagées ci-dessus (linéarité par rapport à chacune des variables et antisymétrie) suffisent à définir de manière unique une notion de volume (au choix d'une unité près).

La dimension un

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension un. Considérons $\phi : \mathrm{E} \to \mathbb{K}$ linéaire. Soit $\mathscr{B} := (e_1)$ une base de E. L'application ϕ est bien-sûr entièrement déterminée par $\phi(e_1)$. Pour $u_1 \in \mathrm{E}$, notons $(\mathrm{A}_{1,1})$ sa coordonnée dans $\mathscr{B}$. On a $\phi(u_1) = \mathrm{A}_{1,1}\phi(e_1)$. En notant

$$\det{}_{\mathscr{B}} : \mathrm{E} \to \mathbb{K},\ \det{}_{\mathscr{B}} = \mathrm{A}_{1,1}$$

on a clairement que $\det_{\mathscr{B}}$ est linéaire et non nulle car $\det_{\mathscr{B}}(e_1) = 1$. L'espace $\mathscr{L}(\mathrm{E},\mathbb{K})$ étant de dimension un, $(\det_{\mathscr{B}})$ en est une base. Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_1(\mathbb{R})$, on pose

$$\det \mathrm{A} := \mathrm{A}_{1,1} = |\mathrm{A}|$$

Cette expression est appelée déterminant de A (la notation entre deux barres verticales ne doit pas être confondue avec la matrice A).

La dimension deux

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension deux. Considérons $\phi : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à ses deux variables et antisymétrique, ie vérifiant $\forall (u_1,u_2) \in \mathrm{E}^2,\ \ \phi(u_1,u_2) = -\phi(u_2,u_1)$. Une première conséquence de l'antisymétrie est $\forall u \in \mathrm{E},\ \ \phi(u,u) = -\phi(u,u)$, ainsi $\phi(u,u) = 0$ pour tout u dans E.

Considérons $\mathscr{B} = (e_1,e_2)$ une base de E, u_1 et u_2 dans E et $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées de u_1 et u_2 dans la base $\mathscr{B}$. On a

$$\begin{aligned}
\phi(u_1,u_2) &= \phi\left(\mathrm{A}_{1,1}e_1 + \mathrm{A}_{2,1}e_2, \mathrm{A}_{1,2}e_1 + \mathrm{A}_{2,2}e_2\right)\\
&= \mathrm{A}_{1,1}\phi\left(e_1, \mathrm{A}_{1,2}e_1 + \mathrm{A}_{2,2}e_2\right) + \mathrm{A}_{2,1}\phi\left(e_2, \mathrm{A}_{1,2}e_1 + \mathrm{A}_{2,2}e_2\right)\\
&= \mathrm{A}_{1,1}\mathrm{A}_{1,2}\phi(e_1,e_1) + \mathrm{A}_{1,1}\mathrm{A}_{2,2}\phi(e_1,e_2) + \mathrm{A}_{2,1}\mathrm{A}_{1,2}\phi(e_2,e_1) + \mathrm{A}_{2,1}\mathrm{A}_{2,2}\phi(e_2,e_2)\\
&= \left(\mathrm{A}_{1,1}\mathrm{A}_{2,2} - \mathrm{A}_{2,1}\mathrm{A}_{1,2}\right)\phi(e_1,e_2)
\end{aligned}$$

car $\phi(e_1,e_1) = \phi(e_2,e_2) = 0$ et $\phi(e_2,e_1) = -\phi(e_1,e_2)$.

Il est clair que l'ensemble, noté $\Lambda_2^*(\mathrm{E})$ des fonctions $\phi : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{K}$ linéaires en chacune de leurs deux variables et antisymétriques est un sev de $\mathbb{K}^{\mathrm{E}\times\mathrm{E}}$. Ce calcul montre que la dimension de cet espace est au plus un : $\phi \in \Lambda_2^*(\mathrm{E})$ est entièrement définie par la donnée de $\phi(e_1,e_2)$. En posant

$$\det{}_{\mathscr{B}} : \mathrm{E}^2 \to \mathbb{K},\ \det{}_{\mathscr{B}}(u_1,u_2) = \mathrm{A}_{1,1}\mathrm{A}_{2,2} - \mathrm{A}_{2,1}\mathrm{A}_{1,2}$$

on vérifie facilement que $\det_{\mathscr{B}} \in \Lambda_2^*(\mathrm{E})$ et comme $\det_{\mathscr{B}}(e_1,e_2) = 1$, $\det_{\mathscr{B}} \neq 0$. Ainsi $\dim \Lambda_2^*(\mathrm{E}) = 1$ et $(\det_{\mathscr{B}})$ est une base de cet espace. Pour une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on note

$$\det \mathrm{A} := \mathrm{A}_{1,1}\mathrm{A}_{2,2} - \mathrm{A}_{2,1}\mathrm{A}_{1,2} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} \\ \mathrm{A}_{2,1} & \mathrm{A}_{2,2} \end{vmatrix}$$

Cette expression est appelée déterminant de A (la notation entre deux barres verticales ne doit pas être confondue avec la matrice A).

Interprétation géométrique

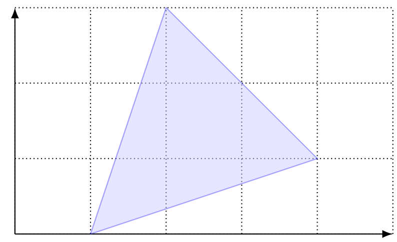
Il y a donc une infinité d'applications « *aire algébrique sur* E » mais elles sont toutes colinéaires à $\det_{\mathscr{B}}$. Le coefficient de colinéarité traduit le choix d'une unité : comme $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$, $\det_{\mathscr{B}}$ correspond au choix d'une aire unitaire pour le parallélogramme formé sur (e_1,e_2).

✗ Appliquons la formule du déterminant pour calculer l'aire d'un triangle du plan.

Dans le plan $\mathbb{R}^2$, on considère $A(4,1)$, $B(2,3)$ et $C(1,0)$. On a $\mathbf{AB}(-2,2)$ et $\mathbf{AC}(-3,-1)$ et donc

$$\det\begin{pmatrix}-2 & -3\\ 2 & -1\end{pmatrix} = 8$$

Ainsi l'aire de ABC vaut $\dfrac{8}{2} = 4$.



La dimension trois

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension trois. Considérons $\phi : E^3 \to \mathbb{K}$ linéaire par rapport à ses trois variables et antisymétrique, ie toute permutation de deux des trois variables de ϕ conduit à un résultat opposé. Comme dans le cas de la dimension deux, on déduit de l'antisymétrie que $\phi(u_1, u_2, u_3) = 0$ dès que deux des trois vecteurs u_i sont égaux ($\star$).

Considérons $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E, u_1, u_2 et u_3 dans E et $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$ dont les colonnes sont les coordonnées de u_1, u_2 et u_3 dans la base $\mathscr{B}$. En notant $\Omega := [\![1,3]\!]^{[\![1,3]\!]}$, on a

$$\begin{aligned}\phi(u_1,u_2,u_3) &= \phi\left(A_{1,1}e_1 + A_{2,1}e_2 + A_{3,1}e_3, A_{1,2}e_1 + A_{2,2}e_2 + A_{2,3}e_3, A_{1,3}e_1 + A_{2,3}e_2 + A_{3,3}e_3\right)\\ &= \sum_{\sigma\in\Omega} A_{\sigma(1),1}A_{\sigma(2),2}A_{\sigma(3),3}\phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})\end{aligned}$$

car développer par trilinéarité (linéarité par rapport à chacune des trois variables) est analogue à développer par distributivité un produit de trois sommes : on choisit un vecteur parmi les trois dans chacune des trois variables (choix que l'on modélise par la donnée d'une application $\sigma : [\![1,3]\!] \to [\![1,3]\!]$, $\sigma(i)$ étant le numéro du vecteur choisi dans la variable n° i). On remarque que si σ n'est pas injective, alors $\phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)}) = 0$ (cf. la propriété $\star$ mentionnée ci-dessus). Comme l'injectivité de σ équivaut à sa bijectivité, seules les permutations de $[\![1,3]\!]$ contribuent au développement ci-dessus :

$$\begin{aligned}\phi(u_1,u_2,u_3) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_3} A_{\sigma(1),1}A_{\sigma(2),1}A_{\sigma(3),3}\phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})\\ &= A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3}\phi(e_1,e_2,e_3) + A_{1,1}A_{3,2}A_{2,3}\phi(e_1,e_3,e_2) + A_{2,1}A_{1,2}A_{3,3}\phi(e_2,e_1,e_3)\\ &\qquad + A_{3,1}A_{2,2}A_{1,3}\phi(e_3,e_2,e_1) + A_{2,1}A_{3,2}A_{1,3}\phi(e_2,e_3,e_1) + A_{3,1}A_{1,2}A_{2,3}\phi(e_3,e_1,e_2)\\ &= \lambda\left(A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}\right)\end{aligned}$$

avec $\lambda := \phi(e_1,e_2,e_3)$. En effet, les expressions $\phi(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$ valent $\pm\phi(e_1,e_2,e_3)$ selon la parité du nombre de permutation(s) de deux vecteurs nécessaires pour passer de $(e_{\sigma(1)}, e_{\sigma(2)}, e_{\sigma(3)})$ à (e_1,e_2,e_3). Par exemple :

$$\begin{cases}\phi(e_2,e_1,e_3) = -\phi(e_1,e_2,e_3)\\ \phi(e_2,e_3,e_1) = -\phi(e_1,e_3,e_2) = \phi(e_1,e_2,e_3)\end{cases}$$

L'ensemble $\Lambda_3^*(E)$ des fonctions $\phi : E^3 \to \mathbb{K}$ linéaires en chacune de leurs trois variables et antisymétriques est un sev de $\mathbb{K}^{E\times E\times E}$ dont la dimension est au plus un : $\phi \in \Lambda_3^*(E)$ est entièrement définie par la donnée de $\phi(e_1,e_2,e_3)$. En posant $\det_{\mathscr{B}} : E^3 \to \mathbb{K}$ définie par :

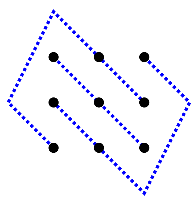
$$\det_{\mathscr{B}}(u_1,u_2,u_3) = A_{1,1}A_{2,2}A_{3,3} + A_{1,2}A_{2,3}A_{3,1} + A_{1,3}A_{2,1}A_{3,2} - A_{1,1}A_{2,3}A_{3,2} - A_{1,2}A_{2,1}A_{3,3} - A_{1,3}A_{2,2}A_{3,1}$$

on vérifie facilement que $\det_{\mathscr{B}} \in \Lambda_3^*(\mathrm{E})$ et comme $\det_{\mathscr{B}}(e_1, e_2, e_3) = 1$, $\det_{\mathscr{B}} \neq 0$. Ainsi $\dim \Lambda_3^*(\mathrm{E}) = 1$ et $(\det_{\mathscr{B}})$ est une base de cet espace. Pour une matrice $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{K})$, on note

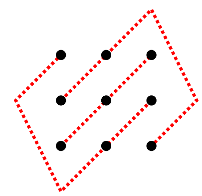
$$\det \mathrm{A} := \mathrm{A}_{1,1}\mathrm{A}_{2,2}\mathrm{A}_{3,3} + \mathrm{A}_{1,2}\mathrm{A}_{2,3}\mathrm{A}_{3,1} + \mathrm{A}_{1,3}\mathrm{A}_{2,1}\mathrm{A}_{3,2} - \mathrm{A}_{1,1}\mathrm{A}_{2,3}\mathrm{A}_{3,2} - \mathrm{A}_{1,2}\mathrm{A}_{2,1}\mathrm{A}_{3,3} - \mathrm{A}_{1,3}\mathrm{A}_{2,2}\mathrm{A}_{3,1}$$

Déterminants d'ordre trois

On retiendra la règle de Sarrus : le déterminant $\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix}$ est la somme de six termes :



Termes signés positivement



Termes signés négativement

Cette expression est appelée déterminant de A. On emploie la même notation (de Cauchy) entre deux barres verticales, qui ne doit pas être confondue avec la notation d'une matrice :

$$\begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = xy'z'' - xz'y'' - yx'z'' + yz'x'' + zx'y'' - zy'x''$$

Conclusion

L'étude du cas $n = 3$ montre que la généralisation à une dimension quelconque passera par l'utilisation des permutations de $[\![1, n]\!]$, et en particulier le passage de $\phi(e_{\sigma(1)}, \ldots, e_{\sigma(n)})$ à $\pm\phi(e_1, \ldots, e_n)$ nécessitera l'étude d'une notion nouvelle : la signature d'une permutation. Cette étude, hors programme, sera abordé dans la dernière section de ce cours (cf. à la **??**).

2. Formes n-linéaires en dimension n

Dans tout ce paragraphe, n désigne un entier naturel non nul et E un $\mathbb{K}$-ev. Dans ce paragraphe, on utilisera couramment la notion de transposition :

Définition 13.0. Transposition

Soit $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. On appelle transposition échangeant i et j l'unique l'application $\tau : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ vérifiant

$$\tau(i) = j \;,\; \tau(j) = i \text{ et } \forall k \in [\![1, n]\!] \setminus \{i, j\},\; \tau(k) = k$$

Il est clair que la transposition τ échangeant i et j est une permutation de $[\![1, n]\!]$ et vérifie $\tau^2 = \mathrm{id}_{[\![1,n]\!]}$, ie $\tau^{-1} = \tau$.

2.1. Formes n-linéaires sur un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

Définition 13.1. Formes n-linéaires

Pour $n \geqslant 2$, on appelle forme n-linéaire sur E toute application $\phi : \mathrm{E}^n \to \mathbb{K}$ linéaire en chacune de ses variables, ie vérifiant

$$\forall i \in [\![1, n]\!],\ \forall (u_1, \ldots, \widehat{u_i}, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^{n-1},\ \phi_i : \begin{array}{rcl} \mathrm{E} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \phi(u_1, \ldots, u_{i-1}, x, u_{i+1}, \ldots, u_n) \end{array} \quad \text{est linéaire}$$

Dans le cas particulier $n = 1$, on appelle forme linéaire sur E toute application linéaire de E dans $\mathbb{K}$. Dans les cas $n = 2$ et $n = 3$, on emploie aussi la terminologie « forme bilinéaire » et « forme trilinéaire ».

✘ Les applications $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \mapsto \mathrm{tr}(\mathrm{XY})$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $(f, g) \mapsto \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{K})$ sont des formes bilinéaires par linéarité de la trace et de l'intégrale et bilinéarité du produit.

Définition 13.1. Formes n-linéaires alternés, antisymétriques

On dit qu'une forme n-linéaire ϕ sur E est :

- alternée si $\phi(u_1, \ldots, u_n) = 0$ pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$ ayant au moins deux composantes égales ;
- antisymétrique si $\forall (i, j) \in [\![1, n]\!]$ tel que $i \neq j$, pour tout $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathrm{E}^n$:

$$\phi\left(u_{\tau(1)}, \ldots, u_{\tau(n)}\right) = -\phi(u_1, \ldots, u_n)$$

  où τ est la transposition échangeant i et j.

On note $\Lambda_n^*(\mathrm{E})$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E. Par convention, $\Lambda_1^*(\mathrm{E}) = \mathscr{L}(\mathrm{E}, \mathbb{K})$.

De façon plus informelle, l'antisymétrie signifie que la permutation de deux vecteurs u_i et u_j (avec $i < j$) aboutit à un résultat opposé : $\phi(\ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots) = -\phi(u_1, \ldots, u_n)$.

Lemme 13.2. Caractère alterné et antisymétrie

Une forme n-linéaire sur E est alternée *si et seulement si* elle est antisymétrique.

2.2. Déterminant dans une base

Le résultat suivant a été démonté en dimension 2 et 3, il est hors programme dans le cas général :

Définition 13.3. Déterminant dans une base

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $\mathbb{K}$-ev de dimension n.

- Il existe un unique $\phi \in \Lambda_n^*(\mathrm{E})$ tel que $\phi(\mathscr{B}) = 1$.
- Cette application est appelée déterminant dans la base $\mathscr{B}$. On la note $\det_{\mathscr{B}}$.
- Pour tout $f \in \Lambda_n^*(\mathrm{E})$, on a $f = f(\mathscr{B}) \det_{\mathscr{B}}$.

Proposition 13.4. Formule de changement de base

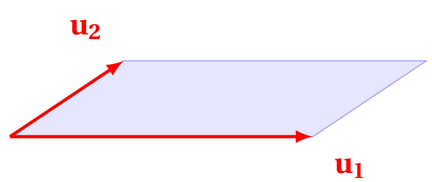
Pour $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ bases de E, on a $\det_{\mathscr{B}'} = \det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B})\det_{\mathscr{B}}$.

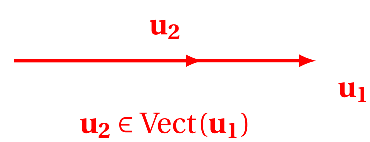
On en déduit le résultat suivant :

Proposition 13.5. Caractérisation des bases par le déterminant

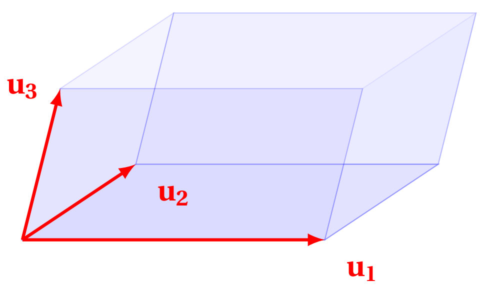
Pour $\mathscr{B}$ base de E et $(u_1,\dots,u_n)\in \mathrm{E}^n$, $(u_1,\dots,u_n)$ est une base de E $\iff$ $\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)\neq 0$.

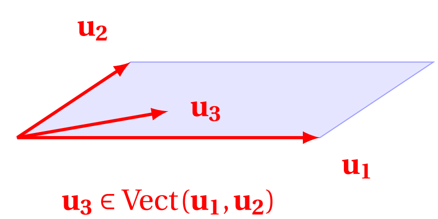
- Le déterminant donne une interprétation géométrique des familles liées :
  - Dans un plan vectoriel E, (u_1,u_2) est liée *si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(u_1,u_2)=0$, ce qui correspond géométriquement au cas où le parallélogramme formé sur les u_i est plat.





  - Dans un espace E de dimension trois, (u_1,u_2,u_3) est liée *si et seulement si* $\det_{\mathscr{B}}(u_1,u_2,u_3)=0$, ce qui équivaut au fait que le parallélépipède formé sur les vecteurs u_i est plat.





2.3. Déterminant d'un endomorphisme

Définition 13.6. Déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n\in\mathbb{N}^*$ et $f\in\mathscr{L}(\mathrm{E})$.

⇛ Il existe un unique $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que

$$\forall \mathscr{B} \text{ base de E},\ \forall (u_1,\dots,u_n)\in \mathrm{E}^n,\ \det_{\mathscr{B}}\big(f(u_1),\dots,f(u_n)\big)=\lambda\det_{\mathscr{B}}(u_1,\dots,u_n)$$

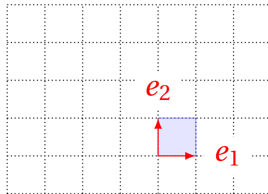
⇛ Cet unique scalaire est appelé déterminant de f et noté $\det f$.

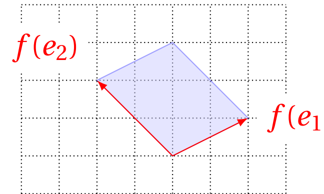
⇛ En particulier $\det f=\det_{\mathscr{B}}\big(f(e_1),\dots,f(e_n)\big)$ si $\mathscr{B}=(e_1,\dots,e_n)$.

L'interprétation géométrique du déterminant d'un endomorphisme est claire : f transforme la famille (u_1,u_2) en $\big(f(u_1),f(u_2)\big)$ et l'aire du parallélogramme image est égale à l'aire de départ multiplié par une constante (le déterminant de f). Le déterminant de f traduit donc une propriété métrique de f.

$$\operatorname{mat}_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det f = 6$$





Il est donc clair géométriquement que f est bijective *si et seulement si* $\det f \neq 0$ (car f est bijective *si et seulement si* elle transforme une base en une base).

Proposition 13.6. Propriété du déterminant d'un endomorphisme

Soit E un $\mathbb{K}$-ev de base dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Pour tout $(\lambda, f) \in \mathbb{K} \times \mathscr{L}(\mathrm{E})$, $\det \lambda f = \lambda^n \det f$.

b. Pour tout $f \in (\mathrm{E})$, $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$ *si et seulement si* $\det f \neq 0$.

c. Pour tout $(f, g) \in (\mathrm{E})^2$, $\det f \circ g = \det f \det g$.

d. Pour tout $f \in \mathrm{GL}(\mathrm{E})$, on a $\det f^{-1} = \frac{1}{\det f}$.

Il ne faut pas confondre linéarité et n-linarité

Attention, le déterminant $\det : \mathscr{L}(\mathrm{E}) \to \mathbb{K}$ n'est pas linéaire dès que $\dim \mathrm{E} \geqslant 2$ puisque dans ce cas, $\det 2\mathrm{id}_{\mathrm{E}} = 2^n \det \mathrm{id}_{\mathrm{E}} = 2^n$ et $2 \det \mathrm{id}_{\mathrm{E}} = 2$.

3. Déterminant d'une matrice carrée

Dans tout ce paragraphe, n désigne un entier naturel non nul.

3.1. Définition et propriétés du déterminant sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

Définition 13.7. Déterminant d'une matrice carrée

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on pose

$$\det \mathrm{A} := \det_{\mathscr{B}_n}(\mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_n)$$

où les A_i sont les colonnes de A et $\mathscr{B}_n$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Proposition 13.7. Lien avec les endomorphismes

Soit E un $\mathbb{K}$-ev E, $\mathscr{B}$ une base de E et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On a $\det f = \det \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.

Notation 13.8. La notation de Cauchy des déterminants

Le déterminant d'une matrice $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté entre deux barres verticales :

$$\det \mathrm{A} = \begin{vmatrix} \mathrm{A}_{1,1} & \mathrm{A}_{1,2} & \cdots & \mathrm{A}_{1,n} \\ \mathrm{A}_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \mathrm{A}_{n-1,n} \\ \mathrm{A}_{n,1} & \cdots & \mathrm{A}_{n,n-1} & \mathrm{A}_{n,n} \end{vmatrix}$$

Dans le cas où la taille (appelée aussi ordre) d'un déterminant est ambigüe, on la précise au moyen d'un indice :

$$\delta := \begin{vmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{vmatrix}_{[n]}$$

On déduit de la section 1.2 (cf. page 3) les expressions des déterminants d'ordre un, deux et trois :

$$|a| = a \ , \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \ , \quad \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + gbf + cdh - (gec + dib + fah)$$

Proposition 13.9. Règles de calcul

Pour tous $\lambda \in \mathbb{K}$, A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

a. $\det \lambda\mathrm{A} = \lambda^n \det \mathrm{A}$; **b.** $\det \mathrm{AB} = \det \mathrm{A} \det \mathrm{B}$; **c.** $\det \mathrm{A}^\top = \det \mathrm{A}$; **d.** $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det \mathrm{A} \neq 0$;

e. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors $\det \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{\det \mathrm{A}}$.

Attention, pour $n \geqslant 2$, l'application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ n'est pas linéaire. Par exemple, on a clairement $\det 2\mathrm{I}_2 = 4 \neq 2 \det \mathrm{I}_2 = 2$ et

$$\text{pour} \quad \mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \ , \ \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \ \text{ on a } \ \det(\mathrm{A}+\mathrm{B}) = \det \mathrm{I}_2 = 1 \neq \det \mathrm{A} + \det \mathrm{B} = 0$$

Le déterminant d'une matrice comme forme n-linéaire de ses lignes

Une conséquence immédiate de la propriété c. est que le déterminant vérifie les mêmes propriétés vis-à-vis de ses lignes que de ses colonnes : n-linéarité, antisymétrie et donc caractère alterné.

Le lecteur traitera avec profit le test (ϟ **13.1**).

3.2. Opérations élémentaires sur un déterminant

La propriété b. de 3.1 (cf. page 10) illustre l'importance de calculer les déterminants sous forme factorisée : l'utilisation de la formule développée se prête peu à la résolution de $\det \mathrm{A} = 0$. Nous allons voir que l'algorithme du pivot permet d'obtenir des factorisation.

Proposition 13.10. Effet des opérations de pivot sur un déterminant

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ de colonnes $A_1, \ldots, A_n$.

a. l'opération $A_i \leftarrow A_i + \lambda A_j$ pour $i \neq j$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ ne change pas le déterminant ;

b. l'opération $A_i \leftrightarrow A_j$ change le déterminant en son opposé ;

c. l'opération $A_i \leftarrow \lambda A_i$ multiplie le déterminant par λ.

On a les mêmes conclusions pour les opérations de pivot en lignes.

La propriété suivante montre qu'après échelonnement d'une matrice sous forme triangulaire, son déterminant se calcule directement sous forme factorisée.

Proposition 13.11. Déterminant d'une matrice triangulaire

Pour toute matrice triangulaire supérieure $T = (T_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a

$$\det T = \begin{vmatrix} T_{1,1} & T_{1,2} & \cdots & T_{1,n} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & T_{n-1,n} \\ 0 & \cdots & 0 & T_{n,n} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} T_{i,i}$$

Puisque le déterminant est invariant par transposition, on a un résultat analogue pour les matrices triangulaires inférieures. Par le 3.2, on peut alterner des opérations sur les lignes et les colonnes.

- Pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ a^2 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (c-a)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 \\ a^2 & b+a & c+a \end{vmatrix} = (c-a)(b-a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ a^2 & b+a & c-b \end{vmatrix}$$
$$= (c-b)(c-a)(b-a)$$

- Posons $A := \big(1+(a-1)\delta_{i,j}\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ où $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On a par $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ en posant $\sigma := a+n-1$:

$$\det A = \begin{vmatrix} a & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ \sigma & 1 \cdots 1 & & a \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & 1 \\ 1 & 1 \cdots 1 & & a \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & a-1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 1 & 0 \cdots 0 & & a-1 \end{vmatrix} = \sigma(a-1)^{n-1}$$

  par $C_j \leftarrow C_j - C_1$ pour $j \in [\![2,n]\!]$. L'opération $C_1 \leftarrow C_1 + \cdots + C_n$ nous a permis de faire apparaître une colonne constante (ce qui facilite ensuite grandement l'échelonnement).

- Nous conseillons de poursuivre par le test (**13.2**).

Le déterminant d'une matrice triangulaire par blocs se calcule facilement.

Proposition 13.12. Déterminant par blocs

Pour toutes matrices carrées A et C (éventuellement de tailles différentes), on a

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & C \end{vmatrix} = \det A \det C$$

Cette formule se généralise à une matrice triangulaire par blocs quelconque :

$$\begin{vmatrix} A_1 & \star & \cdots & \star \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \star \\ 0 & \cdots & 0 & A_m \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{m} \det A_i\,, \quad \text{où les } A_i \text{ sont des matrices carrées}$$

Le lecteur s'entraînera au moyen des tests (↯ **13.3**) et (↯ **13.4**).

3.3. Comatrice et développements d'un déterminant

Dans ce paragraphe, nous allons établir une formule de développement ramenant le calcul d'un déterminant d'ordre n à n détermiannts d'ordre $n-1$.

Définition 13.13. Cofacteurs et comatrice

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- ⇛ On appelle mineur de A d'indices (i,j) le déterminant, noté $\Delta_{i,j}$, de la matrice obtenue en supprimant dans A la i-ème ligne et la j-ème colonne.
- ⇛ Le réel $(-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$ est appelé cofacteur de A d'indices (i,j).
- ⇛ La matrice $\left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est appelée comatrice de A et notée $\mathrm{Com}(A)$.

✗ Voici des applications immédiates de la définition.

- ✔ Pour $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, on a $\mathrm{Com}(A_1) = 0$.
- ✔ Pour $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathrm{Com}(A_2) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -5 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Proposition 13.14. Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Soit $n \geqslant 2$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(k,\ell) \in [\![1,n]\!]^2$, on a

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k} A_{i,k}\Delta_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+\ell} A_{\ell,j}\Delta_{\ell,j}$$

Ces expressions sont respectivement appelées développement de $\det A$ selon la k-ème colonne et développement de $\det A$ selon la ℓ-ème ligne.

Ces formules permettent de ramener le cacul d'un déterminant d'ordre n à des déterminants d'ordre $n-1$. Il est particulièrement intéressant de développer par rapport à une colonne (ou une ligne) comportant essentiellement des zéros.

- Au brouillon (mais jamais sur une copie), on peut « *rayer* » au fur et à mesure le couple ligne-colonne (pour obtenir les cofacteurs) lors de l'application de cette formule.
- On retrouve l'expression du déterminant d'ordre trois au moyen d'un développement par rapport à la première ligne :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = (aei-afh)-(bdi-bfg)+(cdh-cge)$$

- Détermination d'une relation de récurrence. En développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ n & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ n & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix} + (-1)^n n\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 & n \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & \ddots & 1 \\ n & \cdots & 2 & 1 & a \end{vmatrix}$$

  Ainsi

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} + (-1)^n n\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & n \\ a & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 \cdots 0 & & a & 1 \end{vmatrix} = a\Delta_{n-1} + (-1)^n n(-1)^{n+1} n\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & n \\ a & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & 0 & 2 \\ 0 \cdots 0 & & a & 1 \end{vmatrix}$$

  en développant à nouveau par rapport la première ligne. On a donc

$$\Delta_n = a\Delta_{n-1} - n^2\begin{vmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a \end{vmatrix} = a\Delta_{n-1} - n^2 a^{n-1}$$

- On poursuivra par le test (**13.5**).

On rappelle au lecteur que la rédaction ci-dessus, en « *rayant* », est à réserver aux oraux et aux brouillons. En pratique, on applique la formule en écrivant directement les déterminants d'ordre $n-1$: cf. le paragraphe 4 à la page 14 pour des rédactions-types. Il faut prendre garde aux tailles des déterminants lors d'un développement : dans ce cadre, je conseille d'indexer les déterminants par leur ordre.

Proposition 13.15. Formule de la comatrice, HP

Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A\,\mathrm{Com}(A)^T = (\det A)\,I_n$. Si de plus $A \in GL_n(\mathbb{K})$, alors $A^{-1} = \dfrac{\mathrm{Com}(A)^T}{\det A}$

Calcul de l'inverse d'une matrice

L'intérêt de la formule de la comatrice est essentiellement théorique :

⇛ Pour inverser une matrice de taille 2 et 3, elle peut s'avérer efficace :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \mathrm{com(A)} = \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}, \quad \text{ainsi, quand } ad - bc \neq 0, \quad \mathrm{A}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

⇛ D'un point de vue algorithmique, le calcul des cofacteurs (en n^3 pour chacun d'entre eux) donne une complexité supérieure à la méthode d'inversion par pivot (en n^3).

Nous recommandons au lecteur le test (↯ **13.6**).

4. Déterminants classiques

Dans cette section, nous allons passer en revue quelques méthodes classiques de calcul des déterminants. Nous utiliserons les techniques usuelles (opérations de pivots, développements, etc.) mais certaines des idées seront non conventionnelles et très astucieuses[1].

Le plus souvent, il faudra mélanger les différentes méthodes afin d'aboutir.

4.1. Un calcul par développement n-linéaire

Lorsque les colonnes s'écrivent comme une somme du type $\mathrm{C} + \mathrm{V}_i$ comme où C est une colonne fixe, il est intéressant d'exploiter le caractère n-linéaire du déterminant.

- Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ et $\mathrm{U} = [1, \ldots, 1]^{\mathrm{T}}$. On note $\mathscr{B} := (e_1, \ldots, e_n)$ la base canonique de $\mathbb{K}^n$. En développant par n-linéarité, on obtient

$$\Delta := \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1+a_m \end{vmatrix} = \det_{\mathscr{B}}(\mathrm{U} + a_1 e_1, \ldots, \mathrm{U} + a_n e_n)$$

d'où

$$\Delta = \det_{\mathscr{B}}(a_1 e_1, \ldots, a_n e_n) + \sum_{i=1}^{n} \det_{\mathscr{B}}(a_1, \ldots, a_{i-1} e_{i-1}, \mathrm{U}, a_{i+1} e_{i+1}, \ldots, a_n e_n) = \prod_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_k$$

car si U apparaît strictement plus d'une fois dans un facteur, le terme correspondant est nul par le caractère alterné.

4.2. Un calcul par opérations de pivot

Nous avons déjà traité des exemples : on se ramène à un déterminant triangulaire.

1. Elles pourront être reprises à profit dans d'autres contextes.

✗ En voici un autre exemple. En effectuant $L_i \leftarrow L_i - L_{i+1}$ pour i croissant de 1 à $n-1$, on obtient :

$$\Delta := \begin{vmatrix} n & \cdots & \cdots & n \\ \vdots & n-1 & \cdots & n-1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ n & n-1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = (-1)^{n+1} n \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & 1 \end{vmatrix}_{[n-1]} = (-1)^{n+1} n$$

en développant par rapport à la première colonne.

4.3. Un calcul par récurrence : déterminant tridiagonal

Dans cette section, on s'intéresse aux déterminants à trois diagonales (diagonale principale, sur- et sous-diagonale) constantes. Ils apparaissent souvent dans des problèmes de linéarisation en Analyse numérique.

✗ Pour $(\ell, d, u) \in \mathbb{K}^3$, on note Δ_n le déterminant d'ordre n suivant :

$$\begin{vmatrix} d & u & 0 & \cdots & 0 \\ \ell & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & u \\ 0 & \cdots & 0 & \ell & d \end{vmatrix}$$

En développant par rapport à la première colonne, on trouve la relation (nous détaillerons sur l'exemple ci-dessous)

$$\forall n \geqslant 3,\ \ \Delta_n = d\Delta_{n-1} - \ell u \Delta_{n-2}$$

d'équation caractéristique $r^2 - dr + \ell u = 0$ et que l'on peut étendre en $n = 2$ en choisissant la convention $\Delta_0 := 1$. La théorie des suites récurrentes linéaires d'ordre deux permet alors de conclure.

✗ Développons le déterminant d'ordre n suivant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_n := \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{[n]} = 3 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{[n-1]} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{[n-1]} = 3\Delta_{n-1} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 2 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}_{[n-2]}$$

en développant par rapport à la première ligne. On a donc $\forall n \geqslant 2\,,\ \ \Delta_{n-2} = 3\Delta_{n-1} - 2\Delta_{n-2}$ en posant $\Delta_0 := 1$. L'équation caractéristique $z^2 - 3z + 2 = 0$ admet 1 et 2 pour racines, il existe donc $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}\,,\ \ \Delta_n = \lambda + \mu 2^n$. Comme $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_1 = 3$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}\,,$ $\Delta_n = 2^{n+1} - 1$.

Quand les trois diagonales ne sont pas constantes, on peut obtenir par la même méthode une relation de récurrence mais à coefficients variables.

4.4. Un calcul par récurrence : déterminant de Vandermonde

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. On pose

$$\mathrm{V}_n(x_1, \dots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2^1 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n^1 & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Cette matrice est la transposée de la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[\mathrm{X}]$ à la base de Lagrange $(\mathrm{L}_1, \dots, \mathrm{L}_n)$ associée aux x_i. Pour calculer ce déterminant, l'idée est de rechercher une relation de récurrence sur $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$.

- On a directment $\mathrm{V}_2(x_1, x_2) = x_2 - x_1$.
- Soit $(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{K}^{n+1}$ et Q un polynôme unitaire de degré n quelconque. On écrit

$$\mathrm{Q}(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^n + \sum_{i=0}^{n-1} q_i \mathrm{X}^i \quad \text{où } (q_0, \dots, q_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$$

En effectuant dans $\mathrm{V}_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1})$ l'opération $\mathrm{C}_{n+1} \leftarrow \mathrm{C}_{n+1} + \sum_{i=0}^{n-1} q_i \mathrm{C}_{i+1}$, on obtient :

$$\mathrm{V}_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^{n-1} & \mathrm{Q}(x_1) \\ 1 & x_2^1 & \cdots & x_2^{n-1} & \mathrm{Q}(x_2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & \mathrm{Q}(x_n) \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n & \mathrm{Q}(x_{n+1}) \end{vmatrix}$$

L'idée pour obtenir une relation de récurrence et de chercher un polynôme Q tel que $\mathrm{Q}(x_i) = 0$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Le polynôme $\mathrm{Q}(\mathrm{X}) := \prod_{i=1}^n (\mathrm{X} - x_i)$ convient (il est unitaire de degré n et admet les x_i pour racines). On obtient donc, en développant par rapport à la dernière colonne :

$$\mathrm{V}_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) = \begin{vmatrix} 1 & x_1^1 & \cdots & x_1^{n-1} & 0 \\ 1 & x_2^1 & \cdots & x_2^{n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 \\ 1 & x_{n+1} & \cdots & x_{n+1}^n & \mathrm{Q}(x_{n+1}) \end{vmatrix} = \mathrm{Q}(x_{n+1}) \mathrm{V}_n(x_1, \dots, x_n)$$

On a donc, par une récurrence facile :

$$\begin{aligned} \mathrm{V}_{n+1}(x_1, \dots, x_{n+1}) &= \mathrm{V}_n(x_1, \dots, x_n) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) = \mathrm{V}_{n-1}(x_1, \dots, x_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \mathrm{V}_{n-2}(x_1, \dots, x_{n-2}) \prod_{i=1}^{n-2} (x_{n-1} - x_i) \prod_{i=1}^{n-1} (x_n - x_i) \prod_{i=1}^{n} (x_{n+1} - x_i) \\ &= \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n+1} (x_j - x_i) \end{aligned}$$

5. Énoncés des tests

13.1.

On suppose que $n \geqslant 2$ et que $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $\forall B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(A+B) = \det A + \det B$. Montrer que $\det A = 0$.

13.2.

Calculer les déterminants suivants $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix}$ et $\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

13.3.

Discuter en fonction de $a \in \mathbb{K}$ l'inversibilité de la matrice $M_a = \begin{bmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2 \\ 3 & 3 & a+3 \end{bmatrix}$.

13.4.

Soit $\varepsilon > 0$. Existe-t-il $A \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^{20} = \mathrm{Diag}(-1, -1-\varepsilon)$?

13.5.

Calculer les déterminants suivants :

a. $\begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 1 & a' & b & a'b \\ 1 & a & b' & ab' \\ 1 & a' & b' & a'b' \end{vmatrix}$; **b.** $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{vmatrix}$; **c.** $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$; **d.** $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

13.6.

Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2-x^2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 9-x^2 \end{vmatrix}$.

6. Solutions des tests

13.1.

En choisissant $B = A$, il vient $\det 2A = 2 \det A$ et donc $(2^n - 2)\det A = 0$. Comme $n \geqslant 2$, $2^n - 2 > 0$ et donc $\det A = 0$.

13.2.

- En retranchant chaque ligne à sa suivante en remontant :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= 4 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4$$

  en développant par rapport à la dernière colonne.

- En retranchant $C_2 + C_3 + C_4$ à C_1,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

  en développant par rapport à la première colonne.

13.3.

Calculons le déterminant δ_a de M_a :

$$\delta_a = \begin{vmatrix} a+1 & 1 & 1 \\ 2 & a+2 & 2 \\ 3 & 3 & a+3 \end{vmatrix}$$

Effectuons $C_1 \leftarrow C_1 - C_2$, $C_2 \leftarrow C_2 - C_3$:

$$\delta_a = \begin{vmatrix} a & 0 & 1 \\ -a & a & 2 \\ 0 & -a & a+3 \end{vmatrix}$$

on a donc

$$\delta_a = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & a+3 \end{vmatrix}$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 + L_1$:

$$\delta_a = a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & a+3 \end{vmatrix}$$

on reconnaît un produit par blocs :

$$\delta_a = a^2(a+6)$$

La matrice M_a est donc inversible *si et seulement si* $a \notin \{0, -6\}$.

13.4.

Non. Raisonnons par l'absurde. S'il existait une telle matrice, on aurait

$$\det A^{20} = \det^{20} A = -\varepsilon$$

ce qui est absurde car $\det A \in \mathbb{R}$.

13.5.

a. Par $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 2,3$ et 4, développement par rapport à la première colonne puis factorisation, on aboutit à :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & a & b & ab \\ 0 & a'-a & 0 & b(a'-a) \\ 0 & 0 & b'-b & a(b'-b) \\ 0 & a'-a & b'-b & a'b'-ab \end{vmatrix}$$
$$= (a'-a)(b'-b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ a'-a & b'-b & a'b'-ab \end{vmatrix}$$

En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + (a-a')L_1$ puis une factorisation, on obtient :

$$\Delta_1 = (a'-a)(b'-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & b \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 1 & a' \end{vmatrix}$$

On trouve finalement, après développement par rapport à première colonne :

$$\Delta_1 = (a'-a)(b'-b)^2 \begin{vmatrix} 1 & a \\ 1 & a' \end{vmatrix} = (a'-a)^2(b'-b)^2$$

b. En effectuant $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 2,3$ et 4, puis en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 5 \\ 0 & 2 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 2 & 5 & 9 \end{vmatrix}$$

Puis par $L_k \leftarrow L_k - 2L_2$ pour $k = 3$ et 4, on aboutit à :

$$\Delta_2 = 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 7 \end{vmatrix}$$

et en développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta_2 = 6 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = 24$$

c. Par $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2$ puis en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & -6 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix}$$

Par $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k=1$ et 2 puis en développant par rapport à la première colonne, on obtient :

$$\Delta_3 = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -6 \\ 0 & -3 & -6 \end{vmatrix} = -12$$

d. Par $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3 + C_4$, on obtient :

$$\Delta_4 = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

En effectuant alors $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 2, 3$ et 4, on aboutit à :

$$\Delta_4 = 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 5$$

13.6.

⇛ En effectuant $L_k \leftarrow L_k - L_4$ pour $k = 4, 3$ et 2 puis $L_1 \leftarrow L_1 - 2L_4$, et en développant par rapport à la première colonne, on trouve :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & -5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -11 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

Puis par $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et en développant par rapport à la première colonne :

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & -11 \\ 0 & -2 & -2 & -27 \\ 0 & 3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -2 & -2 & -27 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \end{vmatrix}$$

En effectuant $L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$ et en développant par rapport à la deuxième colonne, on trouve :

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -2 & -2 & -27 \\ 3 & 0 & -5 \\ -4 & 0 & -59 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -4 & -59 \end{vmatrix} = 394$$

⇛ Effectuons $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$, $L_k \leftarrow L_k - 2L_1$ pour $k = 3$ et 4, puis développons par rapport à la première colonne. On aboutit à :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1-x^2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix} = (1-x^2)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 \\ 1 & -3 & 3-x^2 \end{vmatrix}$$

Par $L_k \leftarrow L_k - L_1$ pour $k = 2$ et 3, on obtient :

$$\Delta = 3(x^2-1)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3-x^2 \end{vmatrix}$$

puis en développant par rapport à la première colonne :

$$\begin{aligned}\Delta &= 3(x^2-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3-x^2 \end{vmatrix} = 3(x^2-1)(4-x^2) \\ &= 3(x+1)(x-1)(2-x)(2+x)\end{aligned}$$