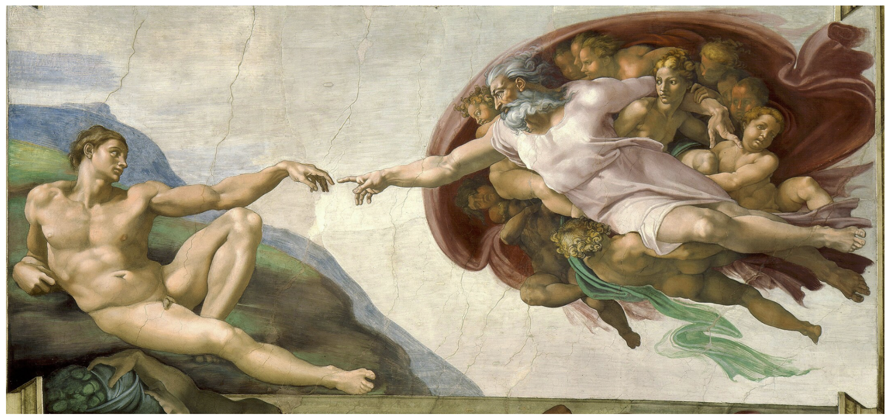
# ALG 1 | Logique et raisonnements mathématiques

*Nous commençons l'année des éléments de logique indispensables à l'apprenti scientifique. Passés les aspects formels, nous revenons sur quelques types classiques de raisonnement avant d'achever cette leçon sur un passage en revue des stratégies usuelles de démonstration et une poignée de conseils.*



*La Création d'Adam (chapelle Sixtine), Michel-Ange*


**1 Logique et raisonnements mathématiques** . . . . . 1
1 Logique propositionnelle . . . . . 3
2 Logique du premier ordre . . . . . 4
2.1 Prédicats, quantificateurs et formules . . . . . 4
2.2 Variables muettes, libres ou liées . . . . . 6
2.3 Portée d'une quantification et interdépendance des variables liées . . . . . 8
2.4 Plaidoyer pour un formalisme mesuré . . . . . 9
3 Petite typologie des raisonnements mathématiques . . . . . 10
3.1 Implications et équivalences . . . . . 10
3.2 Le raisonnement par l'absurde . . . . . 13
3.3 Disjonctions et conjonctions . . . . . 13
3.4 Propriété universelle, existentielle ou d'unicité . . . . . 14
3.5 Le raisonnement par récurrence . . . . . 15
4 Stratégies de démonstration . . . . . 18
4.1 La disjonction de cas . . . . . 18
4.2 L'analyse-synthèse . . . . . 18
4.3 Résolution par généralisation . . . . . 20
4.4 La trilogie expérience, conjecture et démonstration . . . . . 20
5 Conseils pour bien aborder un problème mathématique . . . . . 21
5.1 Résolution de l'équation fonctionnelle de Cauchy . . . . . 22
5.2 Figures et intuition géométrique . . . . . 23
5.3 Jouer sur les hypothèses . . . . . 24
5.4 Reformuler le problème . . . . . 25
6 Tests . . . . . 26
7 Solutions . . . . . 27

La logique formelle est née à la fin du XIX$^e$ siècle. Avant cette époque, *la logique traditionnelle* développée par Aristote dans son *Organon* et quelque peu étoffée par la suite, avait suffit à l'élaboration de nombreuses branches des Mathématiques.

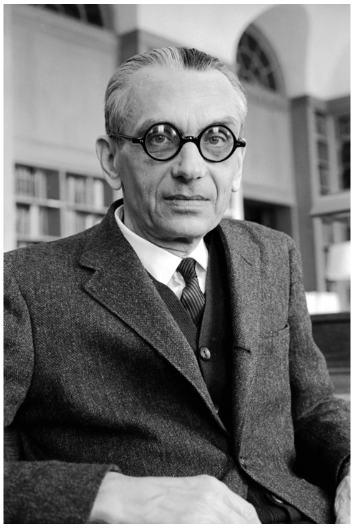
Les balbutiements de la théorie des ensembles conduisirent la communauté scientifique à une formalisation progressive de la logique. De simple outil, la logique est devenue un objet d'étude à part entière. L'enjeu était de pouvoir poser correctement des questions telles que :

*Tel énoncé peut-il être démontré dans telle théorie ?*

Dans ce cadre, on peut définir précisément ce qu'est une théorie axiomatique et ce qu'est un énoncé au sein de celle-ci. Les célèbres travaux de Gödel sont l'un des couronnements de cette approche très abstraite. La logique formelle trouva un peu plus tard un autre champ d'application, l'informatique théorique, via la question de l'automatisation du calcul.

De nos jours et à notre niveau, une approche informelle – à l'ancienne – de la logique s'avérera le plus souvent suffisante.

La logique formelle n'étant pas au programme des classes préparatoires, nous limitons volontairement notre propos à bref survol.



**Gödel**

Les théories formelles de la logique poursuivent deux objectifs :

⇛ SYNTAXIQUE : établir des règles de construction garantissant la correction des énoncés;

À partir d'un ensemble de variables et de symboles spécifiques à la théorie, il faut préciser une grammaire afin de former des séquences de symboles ayant un sens. On veut par exemple interdire la séquence de symboles « $+ \times = 1$ » qui n'est pas un énoncé recevable.

⇛ SÉMANTIQUE : permettre l'interprétation de ces énoncés (i.e. savoir si ils sont vrais ou faux).

On distingue deux grands types de logique[1] :

**Logique propositionnelle et logique du premier ordre**

La logique propositionnelle, très rudimentaire, dans laquelle les variables $p$, $q$, $r$, etc. à valeurs vrai ou faux ne peuvent dépendre elles-mêmes d'autres variables, et la logique du premier ordre, qui résout cette difficulté au moyen de la notion de prédicat mais qui est une théorie beaucoup plus technique.

La logique du premier ordre est nécessaire à l'axiomatisation des Mathématiques et, dans un certain sens, les dépasse comme méta-théorie. Elle est également utilisée par les linguistes et les informaticiens.

Nous refermons ce paragraphe par une remarque sur le symbole d'égalité « = ».

✗ Il peut être employé de deux façons différentes.
  - ✔ La première utilisation est la définition d'un nouvel objet; par exemple, lorsque l'on écrit

« Posons $x = \pi^2$ »

1. Mais il y en a beaucoup plus parmi lesquelles la logique floue et les logiques d'ordre supérieur à un.

- ✔ La seconde est la construction d'une proposition $x = y$ où les objets $x$ et $y$ ont précédemment été définis. C'est dans ce sens qu'il faut le comprendre quand on lit

$$« \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} »$$

Certains auteurs réservent le symbole = au second cas et emploient un autre symbole pour les définitions. Ce sera le cas dans l'ensemble de ce cours de Mathématiques.

**Le symbole de définition**

Le symbole := sera systématiquement utilisé pour introduire un nouvel objet mathématique.

## 1. Logique propositionnelle

Dans ce cadre, les variables $p$, $q$, $r$, etc. ne peuvent prendre que deux valeurs, vrai et faux (ou encore 1 et 0) : on parle de variables propositionnelles.

À partir de ce type de variables, on construit d'autres formules plus élaborées au moyen de connecteurs logiques (tels que « et », « ou », « si et seulement si », etc.).

**Définition 1.0. Connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Longrightarrow$ et $\Longleftrightarrow$**

Dans ce qui suit, $p$ et $q$ désignent des variables propositionnelles.

- *La négation* : « $\neg p$ » est vraie si $p$ est fausse et fausse si $p$ est vraie. Elle est aussi notée non $p$, ou encore, contraire de $p$.
- *La conjonction* : « $p$ et $q$ » est vraie si les propositions $p$, $q$ sont vraies toutes les deux et fausse sinon. Elle est aussi notée $p \wedge q$.
- *La disjonction* : « $p$ ou $q$ » est vraie si l'une au moins des propositions $p$, $q$ est vraie et fausse dans le seul cas où $p$ et $q$ sont fausses toutes les deux. Elle est aussi notée $p \vee q$.
- *L'équivalence* : « $p \iff q$ » est vraie si les propositions $p$, $q$ sont toutes deux vraies ou toutes les deux fausses, et fausse sinon. On la lit $p$ si et seulement si $q$, ou encore $p$ et $q$ sont équivalentes,
- *L'implication* : $p \implies q$ est synonyme de $\neg p$ ou $q$. On la lit $p$ implique $q$, ou encore, si $p$ alors $q$.

Parmi toutes ces définitions, celle de l'implication mérite à raison quelques commentaires.

**De la définition de l'implication**

La définition de $p \implies q$ par $\neg p$ ou $q$ est en fait très naturelle et se retrouve aux détours de certaines expressions :

$$«\ \underbrace{\textit{n'approchez pas}}_{\neg p}\ \textit{, ou}\ \underbrace{\textit{je tire}}_{q}\ » \quad \text{est synonyme de} \quad «\ \textit{si}\ \underbrace{\textit{vous approchez}}_{p}\ \textit{, alors}\ \underbrace{\textit{je tire}}_{q}\ »$$

L'implication ne doit pas être confondue avec la causalité : dans l'implication « il pleut $\implies$ il y a des nuages », la pluie n'est pas la cause des nuages. Continuons par une erreur fréquente de rédaction chez les apprentis scientifiques.

**Il ne faut pas confondre le connecteur $\Longrightarrow$ et la conjonction « donc »**

Le connecteur $\Longrightarrow$ est souvent employé comme synonyme de « *donc* » lorsque l'on prend des notes mais il faut absolument éviter cet usage en Mathématiques. Quant on écrit « *$p$ est vraie donc $q$ est vraie* », on condense en fait le raisonnement déductif suivant :

$$p \text{ est vraie} \quad \text{et} \quad p \Longrightarrow q \text{ est vraie,} \quad \text{donc} \quad q \text{ est vraie}$$

Quant on écrit $p \Longrightarrow q$, on affirme que cette implication est vraie ce qui ne signifie pas que $p$ et $q$ sont vraies. Par exemple, pour un entier naturel $n$, l'implication $n\,\text{pair} \Longrightarrow 3n\,\text{pair}$ est vraie : elle signifie que si $n$ est pair, alors $3n$ l'est également.

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, le contraire de « *$f$ est paire ou périodique* » est « *$f$ n'est ni paire, ni périodique* ». De même, celui de « *$f$ est paire et périodique* » est « *$f$ n'est pas paire ou n'est pas périodique* ». Plus généralement :

**Règles de négation, dites De Morgan**

Le contraire de « $p$ ou $q$ » est « $\neg p$ et $\neg q$ » et celui de « $p$ et $q$ » est « $\neg p$ ou $\neg q$ ».

On déduit directement des définitions ci-dessus un résultat bien connu du lecteur et souvent utile.

**Équivalence et double implication**

La proposition « $p \Longleftrightarrow q$ » est synonyme de « $(\,p \Longrightarrow q\,)$ et $(\,q \Longrightarrow p\,)$ ».

Nous terminons ce paragraphe par une convention universelle de rédaction.

**Une rédaction abusive mais universellement adaptée**

En Mathématiques, on écrira « supposons $p$ » au lieu de « supposons $p$ vraie ». C'est un abus de rédaction mais qui allège grandement les démonstrations !

## 2. Logique du premier ordre

La logique propositionnelle ne suffit pas aux besoins des Mathématiques où les propositions dépendent souvent d'une ou plusieurs variables. Ce qui suit n'est pas un cours sur la logique du premier ordre mais plutôt une introduction raisonnée à ce thème.

### 2.1. Prédicats, quantificateurs et formules

D'un point de vue naïf, un prédicat est une proposition dépendant d'une ou plusieurs variables. Le cas le plus connu est celui d'une proposition $\mathscr{P}(n)$ dépendant d'un entier $n$ dans un raisonnement par récurrence.

- Par exemple, $\mathscr{P}_1(n)$ : $(\,n \text{ est pair}\,)$ est un prédicat défini sur $\mathbb{N}$ et $\mathscr{P}_1(x,y)$ : $(\,x \leqslant y\,)$ est un prédicat défini sur l'ensemble des couples de nombres réels.

- L'expression $\mathscr{P}_3(x,y) : (\, x \in y\,)$ définit un prédicat pour un objet $x$ et un ensemble $y$ (il signifie que l'objet $x$ appartient à l'ensemble $y$).

On introduit à ce sujet les quantificateurs universel $\forall$ et existentiel $\exists$.

**Définition 1.1. Prédicats et quantificateurs**

On appelle prédicat toute proposition dépendant d'un nombre fini de variables. Pour un prédicat $\mathscr{P}(x)$, la proposition :

- $\big(\forall x, \mathscr{P}(x)\big)$ est vraie lorsque pour toute valeur prise par la variable $x$ dans l'ensemble de définition du prédicat, la proposition $\mathscr{P}(x)$ est vraie, et fausse sinon.
- $\big(\exists x, \mathscr{P}(x)\big)$ est vraie lorsqu'il existe au moins une valeur prise par la variable $x$ dans l'ensemble de définition du prédicat telle que la proposition $\mathscr{P}(x)$ soit vraie, et fausse sinon.

En combinant les prédicats aux connecteurs logiques précédemment définis selon des règles que nous ne détaillerons pas[2], on peut construire des propositions plus complexes que l'on appelle *formules*.

- Considérons par exemple le prédicat $\mathscr{P}(x,y)$ sur l'ensemble des couples d'entiers naturels défini par $(\,2 \text{ divise } xy\,)$ et les fonctions définies sur l'ensemble des triplets d'entiers par :

$$f_1(a,b,c) := a+b+c \quad \text{et} \quad f_2(a,b,c) := a+b-c$$

  - Ils permettent de définir par exemple la formule $\mathscr{P}\big(f_1(a,b,c), f_2(a,b,c)\big)$, qui s'écrit de façon moins abstraite $\big(\,2 \text{ divise } (a+b)^2-c^2\,\big)$.
  - Puis la formule $\forall c\,,\ 2 \text{ divise } (a+b)^2-c^2$ après une première quantification.
  - Après quantification des variables $b$ et $a$, on aboutit par exemple la formule suivante :

$$\forall a\,,\ \exists b\,,\ \forall c\,,\ 2 \text{ divise } (a+b)^2-c^2$$

- Plus généralement :
  - Si $\theta_1$ et $\theta_2$ sont des formules, alors les expressions suivantes en sont également :

$$\big(\forall x\,,\ \theta_1\big) \quad , \quad \big(\exists x\,,\ \theta_1\big) \quad , \quad \neg\theta_1 \quad , \quad \theta_1 \wedge \theta_2 \quad , \quad \theta_1 \vee \theta_2 \quad , \quad \theta_1 \implies \theta_2$$

  - Si $\mathscr{P}$ est un prédicat à $n$ variables, alors $\mathscr{P}\big(f_1(x_1,\dots,x_m),\dots,f_n(x_1,\dots,x_m)\big)$ est une formule pour toutes fonctions $f_1,\dots,f_n$ et variables $x_1,\dots,x_m$.

On peut ainsi construire une infinité de formules très sophistiquées qui suffisent à la composition des énoncés mathématiques.

Il arrive couramment de devoir restreindre la portée des quantificateurs à un sous ensemble $\mathrm{E}$ du domaine de définition du prédicat $\mathscr{P}$. La proposition « le prédicat est vrai sur l'ensemble $\mathrm{E}$ » s'écrit

$$\forall x\,,\ (x \in \mathrm{E}) \implies \mathscr{P}(x)$$

Cette formule ne manquant pas de lourdeur, il est d'usage d'écrire plus simplement $\forall x \in \mathrm{E}\,,\ \mathscr{P}(x)$. Par définition de l'implication, on notera que la proposition $\forall x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ est vraie dans le cas où $\mathrm{E} = \varnothing$ (car $x \in \varnothing$ est toujours fausse) et ceci indépendamment du prédicat $\mathscr{P}$ ; de même la proposition $\exists x \in \mathrm{E}$, $\mathscr{P}(x)$ est fausse dans le cas où $\mathrm{E} = \varnothing$.

On utilise souvent le pseudo-quantificateur $\exists!$.

2. Ce serait l'objet d'un vrai cours sur la logique du premier ordre. Notre bon sens suffira largement à garantir la validité des formules obtenues.

**Définition 1.2. Le pseudo-quantificateur d'existence et unicité**

La formule $\exists! x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ signifie qu'il existe un unique élément $x$ de E tel que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie.

La négation d'une quantification est affaire de bon sens : le contraire de « tous les chats sont gris » est « il existe des chats qui ne sont pas gris », de même le contraire de « il existe des chiens savants » est « aucun chien n'est savant ».

**Négation d'une quantification** (↯ 1.1)

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat sur un ensemble E.

⇛ Le contraire de $\forall x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ est $\exists x \in \mathrm{E}, \neg\mathscr{P}(x)$. Celui de $\exists x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$ est $\forall x \in \mathrm{E}, \neg\mathscr{P}(x)$.

On en déduit de proche en proche un moyen de déterminer la négation d'une formule quelconque. Considérons par exemple un prédicat $\mathscr{P}(x, y)$ à deux variables. Le contraire de $\forall x \in \mathrm{X}, \exists y \in \mathrm{Y}, \mathscr{P}(x, y)$ est

$$\exists x \in \mathrm{X},\ \neg\big(\exists y \in \mathrm{Y}, \mathscr{P}(x, y)\big)\ , \quad \text{c'est-à-dire } \exists x \in \mathrm{X},\ \forall y \in \mathrm{Y}, \neg\mathscr{P}(x, y)$$

On a obtenu ce résultat en appliquant successivement deux fois les règles ci-dessus.

**Contraire d'une proposition plusieurs fois quantifiée**

D'une manière générale, pour calculer le contraire d'une proposition contenant plusieurs quantificateurs, on remplace tous les $\forall$ par des $\exists$ et tous les $\exists$ par des $\forall$, puis on prend le contraire de la proposition finale.

Ce principe doit devenir aussi naturel que l'algorithme d'addition de deux nombres entiers appris dans les classes du primaire.

✗ Calculons, par exemple, le contraire de « la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée ».

- ✔ On commence par rappeler la définition de cette propriété : $\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \mathrm{M}$.
- ✔ Son contraire est donc :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > \mathrm{M}$$

**Un conseil : toujours garder un contact avec l'intuition**

La présence de quantificateurs dans une formule peut vite la rendre obscure. Il faut s'efforcer de lui donner un sens, i.e. l'appréhender par l'intuition (le plus souvent géométrique). Par exemple,

$$\forall \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \exists n \in \mathbb{N},\ |u_n| > \mathrm{M}$$

signifie que l'on peut trouver des termes arbitrairement grand en valeur absolue dans $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

### 2.2. Variables muettes, libres ou liées

Commençons par un exemple.

- Considérons le prédicat suivant $\mathscr{P}(a,b,c)$ : $a+b \leqslant c$ défini sur l'ensemble des triplets d'entiers naturels et la formule suivante :
$$\forall c \in \mathbb{N},\ a+b \leqslant c$$
  - Puisque, dans cette formule, la quantification porte sur la variable $c$, celle-ci est dite liée tandis que les variables $a$ et $b$ sont dites libres.
  - La variable liée $c$ peut être remplacée par tout autre variable (sauf bien-sûr $a$ et $b$) dans la formule sans modifier celle-ci, on dit qu'elle est muette. Ainsi, les formules suivantes sont les mêmes :
$$\forall c \in \mathbb{N},\ a+b \leqslant c \quad \text{et} \quad \forall d \in \mathbb{N},\ a+b \leqslant d$$
  - La formule ci-dessus ne dépend en définitive que des variables libres $a$ et $b$ :
$$\theta(a,b) := \big(\forall c \in \mathbb{N},\ a+b \leqslant c\big)$$

**Définition 1.3. Liberté d'une variable**

Une variable apparaissant dans une formule est dite libre lorsqu'elle n'est nulle part quantifiée dans cette formule. Dans le cas contraire, la variable est dite liée.

Les formules de la logique du premier ordre n'ont pas toute un sens, i.e. une valeur de vérité. Typiquement, si $\theta$ est une formule comportant au moins une variable libre $x$, alors $\theta$ n'a aucun sens. En quelque sorte, cette formule n'est pas complément évaluable en l'état : il n'y a aucun sens à dire qu'elle est vraie ou fausse, cela dépend a priori des variables libres restantes. Par exemple, la formule
$$x^2 \geqslant 0$$
n'a aucun sens. En revanche, les formules
$$\big(\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant 0\big) \quad \text{et} \quad \big(\forall x \in \mathbb{C},\ x^2 \geqslant 0\big)$$
ont un sens : la première est vraie, la seconde est fausse. C'est ce qui motive la terminologie suivante.

**Définition 1.4. Énoncé et théorème**

On appelle :

- énoncé (ou encore assertion) toute formule ne comportant que des variables liées.
- théorème tout énoncé vrai.

Un énoncé est soit vrai, soit faux. Par exemple, l'énoncé
$$\exists a \in \mathbb{N},\ \exists b \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N},\ a+b \leqslant c$$
est vrai car pour $(a,b) := (0,0)$, on a bien $\forall c \in \mathbb{N},\ a+b \leqslant c$. En revanche, l'énoncé
$$\exists a \in \mathbb{N},\ \forall b \in \mathbb{N},\ \forall c \in \mathbb{N},\ a+b \leqslant c$$
est faux car, pour $a \in \mathbb{N}$, la proposition $a+b \leqslant c$ est fausse pour le couple $(b,c) := (1,a)$.

**Théorèmes, propositions, corollaires et lemmes**

Plusieurs noms sont synonymes de théorèmes : proposition, lemme, corollaire. Ces différentes appellations reflètent l'importance variable et le statut que les mathématiciens accordent à certains théorèmes.

- $\Rrightarrow$ On appelle proposition tout énoncé vrai.
- $\Rrightarrow$ On réserve le nom de théorème à des propositions particulièrement importantes au sein d'une théorie, à des résultats-clés en quelque sorte.
- $\Rrightarrow$ Un corollaire désigne une proposition dont la démonstration est relativement courte en appliquant un théorème. On parle d'un corollaire de ce théorème.
- $\Rrightarrow$ Un lemme est généralement une proposition qui sert à démontrer un théorème. Il faut parfois plusieurs lemmes pour démontrer un théorème.

Comme nous le verrons dans le chapitre suivant dédié à la théorie des ensembles, certaines propositions sont postulées, on les appelle des **axiomes**. Par exemple, un célèbre axiome de la géométrie plane postule l'existence d'une unique parallèle à une droite donnée passant par un point fixé.

### 2.3. Portée d'une quantification et interdépendance des variables liées

Nous arrivons à un point qui va s'avérer crucial en Mathématiques.

✗ Considérons la formule $\forall a \in \mathbb{N}\,,\ \exists b \in \mathbb{Z}\,,\ \forall c \in \mathbb{N}\,,\ a+b \leqslant c$.

- ✔ C'est un théorème. Pour $a \in \mathbb{N}$, l'entier relatif $b := -a$ vérifie $a+b=0$ donc on a bien $\forall c \in \mathbb{N}$, $c \geqslant a+b$. On observe que, dans cette démonstration, $b$ dépende de $a$ mais pas de $c$.
- ✔ La formule qui suit immédiatement la quantification « $\forall a \in \mathbb{N}$ » est appelée portée de cette quantification. Ainsi

$$\exists b \in \mathbb{Z}\,,\ \forall c \in \mathbb{N}\,,\ a+b \leqslant c \quad \text{est la portée de « } \forall a \in \mathbb{N} \text{ » dans la formule ci-dessus}$$

- ✔ De même, on dit que la formule $\forall c \in \mathbb{N}\,,\ a+b \leqslant c$ est la portée de la quantification « $\exists b \in \mathbb{Z}$ » dans la formule initiale.

Plus généralement :

**Portée d'un quantification dans un énoncé**

Dans un énoncé[3] $(\cdots \forall x, \theta)$, on dit que la formule $\theta$ est la portée de la quantification $\forall x$.
On définit de même la portée d'un quantificateur $\exists x$.

✗ Soit la formule suivante $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \exists y \in \mathbb{R},\ x = y^2$.

- ✔ C'est à nouveau un théorème. En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+$, le réel $y := \sqrt{x}$ vérifie $x = y^2$.
- ✔ Dans cette démonstration, la variable $y$ dépend de $x$.

Cette dépendance de $y$ en $x$ dans l'exemple précédent est une propriété générale :

3. Les trois points $\cdots$ désignent le début de la formule considérée.

**Dépendances et quantification** ( ↯ 1.2 )

Si la quantification $\exists x$ apparaît dans un énoncé, alors :

⇛ $x$ ne dépend pas des variables qui sont quantifiées dans sa portée;

⇛ $x$ dépend a priori de toutes les variables quantifiées dont il figure dans la portée.

Il est recommandé de choisir des notations qui conservent la trace d'une dépendance. Par exemple, si $x$ dépend de $a$, il sera judicieux de noter $x_a$ plutôt que $x$. Cette *intelligence* des notations est très importante en mathématiques et doit être scrupuleusement respectée.

Illustrons ces notions au moyen des suites de nombres réels.

✗ Considérons les deux prédicats suivants sur une suite réelle $u := (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ :

$$\mathscr{P}_1(u) : \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leqslant \mathrm{M} \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_2(u) : \forall n \in \mathbb{N},\ \exists \mathrm{M} \in \mathbb{R},\ |u_n| \leqslant \mathrm{M}$$

- ✔ On a $\forall u,\ \mathscr{P}_2(u)$ (en effet, à $n \in \mathbb{N}$ fixé, on peut choisir $\mathrm{M} := u_n$).
- ✔ En revanche, il existe des suites $u$ telles que $\mathscr{P}_1(u)$ soit fausse (comme par exemple la suite des entiers naturels, car dans ce prédicat M doit être indépendant de $n$).

### 2.4. Plaidoyer pour un formalisme mesuré

Comme nous l'avons déjà souligné, le formalisme de la logique du premier ordre permet de formuler très rigoureusement des définitions mathématiques telles que celle d'une suite réelle convergence :

$$\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

ou encore d'énoncer des théorèmes sophistiqués tels que celui des suites croissantes réelles majorées :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \Big(\exists \mathrm{M} \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N},\ (u_n \leqslant u_{n+1}) \wedge (u_n \leqslant \mathrm{M})\Big) \implies \Big(\exists \ell \in \mathbb{R},\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \implies |u_n - \ell| \leqslant \varepsilon\Big)$$

Cependant, les mathématiciens limitent le plus souvent ce langage aux définitions et aux énoncés de théorèmes, et encore dans ces cas de figure, il est d'usage de croiser le langage courant et la logique formelle. Par exemple, le théorème des suites croissantes majorées s'énoncera plus clairement ainsi :

Toute suite réelle croissante majorée converge

une fois clairement définies les notions de suite majorée, de suite croissante et de suite convergence sous forme quantifiée. On pourra aussi écrire :

$$\text{Pour } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ croissante majorée, il existe } \ell \in \mathbb{R} \text{ tel que } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

ainsi que de nombreuses autres variantes. On évitera cependant de mêler quantificateurs et langage courant. Ainsi, on évitera ce type d'énoncé :

$$\forall (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ croissante majorée, } \exists \ell \in \mathbb{R} \text{ tel que } u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$$

Le lecteur aura compris qu'il s'agit davantage ici d'une question de style que de rigueur, ce qui induit une inévitable subjectivité. L'apprentissage de ces usages stylistiques se fera au fil de l'année, au gré du cours, des séances de travaux dirigés, des premières évaluations orales et écrites.

## 3. Petite typologie des raisonnements mathématiques

Dans ce qui suit, les variables $p$, $q$, $r$, etc. désigneront systématiquement des énoncés.

**Quelques conseils pour la rédaction d'une démonstration**

Cette liste sera amandée au fil des paragraphes suivants.

⇛ Éviter tout formalisme logique en préférant une rédaction en toutes lettres;

⇛ Les quantificateurs sont à proscrire au sein d'une démonstration.

### 3.1. Implications et équivalences

Pour montrer qu'une implication $p \implies q$ est vraie, on peut procéder *directement* :

*Supposons $p$.*

*$\cdots$ démonstration $\cdots$*

*Ainsi $q$ est vraie.*

Aiguillés par notre bon sens, nous comprenons facilement que les implications « *il pleut* $\implies$ *il y a des nuages* » et

« *il n'y a pas de nuage* $\implies$ *il ne pleut pas* »

sont synonymes.

La logique propositionnelle permet de généraliser cette propriété :

L'implication $\neg q \implies \neg p$ est appelée contraposée de l'implication $p \implies q$.

Une implication et sa contraposée sont synonymes (c'est-à-dire équivalentes).

Ainsi, pour démontrer que $p \implies q$ est vraie, on peut démontrer que la contraposée $\neg q \implies \neg p$ est vraie.

*Raisonnons par contraposition.*
*Supposons $q$ fausse.*

*... démonstration ...*

*Ainsi $p$ est fausse.*

✘ Soit $n \in \mathbb{N}$. Démontrons que $n^2$ pair $\implies$ $n$ pair.

- ✔ La contraposée de cet énoncé est $n$ impair $\implies$ $n$ impair.
- ✔ Supposons $n$ impair. Soit $k$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $n = 2k+1$.
- ✔ On a $n^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2m + 1$ avec $m := 2k^2 + 2k$. Puisque $m \in \mathbb{Z}$, $n^2$ est impair.

**Contraposée et réciproque d'une implication** (↯ 1.3)

L'implication $q \implies p$ est appelée implication réciproque (ou plus simplement réciproque) de $p \implies q$. Il ne faut pas la confondre avec la contraposée $\neg q \implies \neg p$ de l'implication $p \implies q$.

L'implication permet de définir deux notions essentielles en Mathématiques.

**Définition 1.5. Condition nécessaire, condition suffisante**

Soit $p$ et $q$ deux énoncés. On dit que $p$ est une condition suffisante de $q$ ou encore que $q$ est une condition nécessaire de $p$ si l'implication $p \implies q$ est vraie.

Pour $n \in \mathbb{N}$, « $n$ est divisible par 6 », que l'on note $6|n$, est une condition suffisante de « $n$ est pair » mais non nécessaire. Le contraire de $p \implies q$ est facile à déterminer[4] :

**Contraire d'une implication**

Le contraire de la proposition $p \implies q$ est $p$ et $\neg q$.

En effet, la définition de $p \implies q$ est $\neg p$ ou $q$ dont le contraire est $p$ et $\neg q$ par les règles de De Morgan.

$$\begin{aligned} p &\iff p_1 \\ &\iff p_2 \\ &\ \ \vdots \\ &\iff p_n \\ &\iff q \end{aligned}$$

Pour montrer que l'équivalence $p \iff q$ est vraie, on peut parfois procéder par équivalences successives.

On démontre successivement que $p \iff p_1$, $p_1 \iff p_2$, etc., $p_{n-1} \iff p_n$ et $p_n \iff q$ sont vraies et on en déduit que $p \iff q$ est vraie.

En pratique, on se contente de rédiger cette chaîne d'équivalence de la façon ci-contre malgré le caractère abusif des « vides » précédant les symboles $\iff$.

La plupart des raisonnements par équivalences successives reposent sur des règles de calculs. C'est le cas bien connu des systèmes linéaires :

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x+2y = 5 \\ 2x-3y = 3 \end{cases} &\iff \begin{cases} x+2y = 5 \\ -7y = -7 \end{cases} && \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\
&\iff \begin{cases} x+2y = 5 \\ y = 1 \end{cases} && \mathrm{L}_2 \leftarrow -\frac{1}{7}\mathrm{L}_2 \\
&\iff \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} && \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - 2\mathrm{L}_2
\end{aligned}$$

Ce sont les opérations de pivots (permuter deux lignes, multiplier une ligne par un nombre non nul, multiplier une ligne et l'ajouter à une autre) qui garantissent ces équivalences (car ces transformations sont réversibles).

Dans certains cas, le raisonnement par équivalences n'est pas adapté. Il faudra alors procéder par double implication en démontrant successivement que $p \implies q$ et $q \implies p$ sont vraies (cf. l'encadré de la page 4).

✗ Démontrons par exemple que, pour tout entier relatif $n$, $n$ pair $\iff$ $n^2$ pair.

- ✔ Soit $n$ un entier relatif. Supposons $n$ pair. Il existe $k$ dans $\mathbb{Z}$ tel que $n = 2k$. Ainsi $n^2 = 4k^2$. Comme $k^2$ est un entier, on en déduit que $n^2$ est pair.
- ✔ La réciproque a déjà été démontrée ci-dessus par contraposition.

4. Cette propriété sera utile pour démontrer par l'absurde une implication (cf. plus loin dans le cours).

- ✗ Il est intéressant de comprendre ici pourquoi le raisonnement par équivalences est malaisé. Esquissons une démonstration par équivalences :

$$\begin{aligned} n \text{ pair} &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\, n = 2k \\ &\iff \exists k \in \mathbb{Z},\, n^2 = 4k^2 \\ &\iff n^2 \text{ est pair} \end{aligned}$$

  Ces équivalences sont vraies mais cette rédaction est incomplète : l'implication

$$\exists k \in \mathbb{Z},\, n^2 = 4k^2 \implies n^2 \text{ est pair}$$

  est clairement vraie par définition de la parité mais l'implication réciproque

$$n^2 \text{ est pair} \implies \exists k \in \mathbb{Z},\, n^2 = 4k^2$$

  également vraie, ne peut être affirmée directement sans justification supplémentaire : il y a en quelque sorte une disymétrie entre ces deux implications, l'une des deux est directe alors que la seconde nécessite une démonstration supplémentaire.

- ✗ Démontrons que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\big(|x+y| = |x|+|y| \iff x \text{ et } y \text{ sont de même signe}\big)$.
  - ✔ Un raisonnement par équivalence est ici possible. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} |x+y| = |x|+|y| &\iff |x+y|^2 = \big(|x|+|y|\big)^2 \quad \text{car les deux membres sont positifs} \\ &\iff (x+y)^2 = x^2 + 2|x|\,|y| + y^2 \\ &\iff x^2 + 2xy + y^2 = x^2 + 2|xy| + y^2 \\ &\iff xy = |xy| \\ &\iff xy \geqslant 0 \\ &\iff x \text{ et } y \text{ sont de même signe} \end{aligned}$$

**Rédaction d'un raisonnement par équivalences (ϟ 1.4)**

- ⇛ Dans un raisonnement par équivalences, il faudra parfois justifier certaines d'entre-elles comme nous l'avons fait ci-dessus en mentionnant le fait que deux nombres positifs sont rangé dans le même ordre que leurs carrés.
- ⇛ Quand on écrit un raisonnement par équivalences, il convient de s'assurer au brouillon (ou de tête dans les situations les plus simples) que les deux implications sont bien vérifiées.

Au fil du cours, il nous arrivera fréquemment d'avoir à démontrer l'équivalence de trois (voire plus) propositions.

**Comment démontrer l'équivalence de plus de deux propositions ?**

Pour démontrer l'équivalence de propositions $p_1$, $p_2$ et $p_3$, on peut bien sûr établir les trois équivalences $p_1 \iff p_2$, $p_1 \iff p_3$ et $p_3 \iff p_1$, mais il est souvent plus « économique » de démontrer un *cycle* d'implications tel que

$$p_1 \implies p_2\,,\ p_2 \implies p_3 \quad \text{et} \quad p_3 \implies p_1$$

Cette technique s'adapte à un nombre quelconque de propositions.

### 3.2. Le raisonnement par l'absurde

On cherche à montrer qu'un énoncé $p$ est vrai.

Pour cela on trouve un énoncé $q$ notoirement faux tel que l'implication $\neg p \implies q$ soit vraie.

Dans certains cas, on montre que $\neg p \implies p$ est vraie.

Ce type de raisonnement est particulièrement adapté à la démonstration des énoncés « négatifs », i.e. du type « *il n'existe pas...* », « *x n'est pas* » etc.

*Montrons que $p$ est vraie.*
*Raisonnons par l'absurde.*
*Supposons $p$ fausse.*

$\cdots$ *démonstration* $\cdots$

*Ce qui est absurde : $p$ est donc vraie.*

- À titre d'exemple, démontrons par l'absurde que la fonction cosinus n'est pas polynomiale.
  - Supposons que le cosinus soit une fonction polynomiale P.
  - Comme le cosinus s'annule en tout réel de la forme $\frac{\pi}{2} + n\pi$ où $n \in \mathbb{Z}$, P admet une infinité de racines réelles.
  - D'après le cours sur les fonctions polynomiales de Terminale, une fonction polynomiale admettant une infinité de racines est la fonction nulle.
  - On en déduit en particulier que $\mathrm{P}(0) = 0$, ce qui est absurde car $\mathrm{P}(0) = \cos 0 = 1$.
- Une autre démonstration par l'absurde très iconique figure dans le cours d'arithmétique de Terminale, celle de l'irrationnalité de $\sqrt{2}$ (nous y reviendrons d'ailleurs dès le cours AN 1).

Le lecteur prolongera avantageusement sa lecture par le test (⚡ **1.5**)

### 3.3. Disjonctions et conjonctions

Le cas des conjonctions est clair : pour établir que $p \wedge q$ est vraie, on démontre que les deux propositions $p$ et $q$ sont vraies. Les conjonctions méritent une étude plus fouillée.

Pour établir que $p \vee q$ est vraie, on peut supposer que $p$ est fausse puis démontrer qu'alors $q$ est vraie. On peut bien-sûr inverser les rôles des propositions $p$ et $q$.

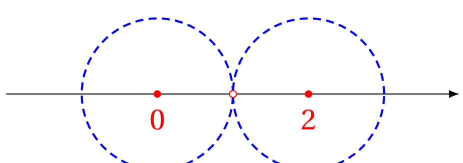
On peut aussi montrer que le contraire de la conjonction est faux en raisonnant par l'absurde.

*Supposons $p$ fausse.*

$\cdots$ *démonstration* $\cdots$

*Ainsi $q$ est vraie.*

- Illustrons ces deux techniques en démontrant que, pour tout réel $x$, $|x| \geqslant 1$ ou $|x-2| \geqslant 1$.




Tout d'abord, cette propriété est géométriquement évidente : en interprétant les réels comme des points sur un axe, la condition $|x-a| \geqslant 1$ signifie que $x$ est distant de $a$ d'au moins une unité.

Passons aux deux démonstrations annoncées.
  - Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$. On alors $-1 < x < 1$, d'où $-3 < x - 2 < -1$ et donc $|x-2| \geqslant 1$.
  - Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $|x| < 1$ et $|x-2| < 1$. On déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\underbrace{|x+2-x|}_{=2} \leqslant \underbrace{|x| + |2-x|}_{=|x|+|x-2|} < 2$$

ce qui est absurde.

### 3.4. Propriété universelle, existentielle ou d'unicité

La démonstration d'une propriété universelle

$$\forall x \in \mathrm{E}, \mathscr{P}(x)$$

commence toujours par « *Soit* $x \in \mathrm{E}$ ».

> *Soit* $x \in \mathrm{E}$.
>
> $\cdots$ *Démonstration de* $\mathscr{P}(x)$ $\cdots$
>
> *Ainsi* $\mathscr{P}(x)$ *est vraie.*

- Par exemple, démontrons que, pour tout réel $x$, on a l'inégalité $x(1-x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
  - Soit $x$ un nombre réel. On a
  $$x(1-x) - \frac{1}{4} = -x^2 - 2 + x - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 0$$
  - On peut aussi utiliser le cours sur le signe des trinômes du second degré[5] ou encore étudier classiquement les variations de la fonction $x \mapsto x(1-x)$.

Évoquons à présent la démonstration d'une propriété existentielle, i.e. du type $\exists x \in \mathrm{E},\ \mathscr{P}(x)$.

On parle souvent dans ce cadre de *construction*.

**Démonstration d'une propriété existentielle**

Construire un élément $x$ de E tel que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie est synonyme de démontrer l'existence de $x$ dans E tel que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie.

Cette construction peut relever d'autres théorèmes d'existence ou d'une définition explicite.

- Démontrons l'existence de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $x_0^3 + x_0 + 1 = 0$.
  - Notons $f : x \mapsto x^3 + x + 1$, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Cette fonction est polynomiale donc continue.
  - On a $f(0) = 1$ et $f(-2) = -9$. Puisque $f(-2)f(0) < 0$, on déduit du théorème des valeurs intermédiaires que $f$ s'annule en au moins un réel $x_0$.
- Le seul nombre réel positif strictement inférieur à tous les réels strictement positifs est zéro.
  - Commençons par écrire sous forme quantifiée la propriété à démontrer :
  $$\forall a \in \mathbb{R}_+,\ \Big(\big(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ a < x\big) \implies a = 0\Big)$$
  - Soit $a \in \mathbb{R}_+$. Raisonnons par contraposition. Comme $a \in \mathbb{R}_+$, il s'agit de démontrer que
  $$a > 0 \implies \big(\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ a \geqslant x\big)$$
  car la négation de $\big(\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ a < x\big)$ est $\big(\exists x \in \mathbb{R}_+^*,\ a \geqslant x\big)$.
  - Supposons $a >= 0$. Posons $x := \frac{a}{2}$. Comme $a > 0$, on a $x > 0$ et $a \geqslant x$.
- Le dernier exemple de cette série est une mise en garde. Considérons la « démonstration suivante » :
  - Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathrm{A},\ n^2 \in \mathrm{A}$.
  - Soit $n$ le plus grand élément de A.
  - Comme $n^2 \geqslant n$ et $n^2 \in \mathrm{A}$, on a $n^2 \leqslant n$ d'où $n = n^2$. Ainsi $n = 0$ ou $n = 1$.

  Cette démonstration est incorrecte, le contre-exemple de $\mathrm{A} := \mathbb{N}$ étant évident. L'erreur vient du fait que nous avons *supposé* l'existence d'un plus grand élément dans A.

5. Cette technique s'appelle une mise sous forme canonique et est au cœur de l'étude des polynômes du second degré.

**Attention aux mirages !**

Dans une démonstration, il faut prendre garde aux affirmations du type

« Soit $x_0$ tel que $\mathscr{P}(x_0)$ »

Il s'agit bien d'une affirmation : en écrivant ceci, *on suppose de fait* l'existence d'un objet $x_0$ vérifiant la propriété $\mathscr{P}(x_0)$. Si l'existence d'un tel $x_0$ n'est pas évidente, li faudra la démontrer en posant explicitement $x_0$ ou au moyen d'un raisonnement.

*Soit $x_1$ et $x_2$ dans* E.

*Supposons $\mathscr{P}(x_1)$ et $\mathscr{P}(x_2)$.*

$\cdots$ *démonstration* $\cdots$

*D'où $x_1 = x_2$.*

On cherche à montrer l'unicité d'un élément $x$ de E tel que $\mathscr{P}(x)$ soit vraie.

Dans de nombreux cas, l'unicité découle d'un théorème.

Si ce n'est pas le cas, on peut adopter la stratégie ci-contre : on considère deux éléments $x_1$ et $x_2$ vérifiant la propriété et on cherche à établir que $x_1 = x_2$.

- Soit $a \in \mathbb{N}$ et $b \in \mathbb{N}^*$. Démontrons l'unicité dans la division euclidienne de $a$ par $b$ :

  Il existe un unique couple $(q, r)$ dans $\mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $r < b$

  - Considérons $(q_1, r_1) \in \mathbb{N}^2$ et $(q_2, r_2) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $a = bq_1 + r_1 = bq_2 + r_2$, $r_1 < b$ et $r_2 < b$.
  - Comme $0 \leqslant r_1 < b$ et $-b < -r_2 \leqslant 0$, on a $-b < r_1 - r_2 < b$.
  - Puisque $r_1 - r_2 = b(q_2 - q_1)$ et $q_2 - q_1 \in \mathbb{Z}$, $r_1 - r_2$ est un multiple de $b$.
  - Le seul multiple de $b$ appartenant à $]-b, b[$ étant 0, on en déduit que $r_1 - r_2 = 0$ puis $b(q_2 - q_1) = 0$ et finalement $q_2 - q_1 = 0$ car $b$ est non nul.
  - Ainsi $(q_1, r_1) = (q_2, r_2)$.

- L'unicité peut parfois être démontrée via un argument de stricte monotonie. Il existe un unique $x_0$ réel tel que $x_0^3 + x_0 + 1 = 0$. L'existence d'au moins une solution $x_0$ a déjà été établie ci-dessus. L'unicité vient ici de la stricte croissance de $f : x \mapsto x^3 + x + 1$ sur $\mathbb{R}$ (une simple étude des variations permet de conclure à la stricte croissance de cette fonction).

Pour s'entraîner, le lecteur est renvoyé aux tests (⚡ **1.6**) et (⚡ **1.7**).

Signalons pour clore ce sujet que la stratégie d'analyse-synthèse (cf. plus loin dans ce chapitre) peut s'avérer utile pour les preuves d'existence et d'existence-unicité.

### 3.5. Le raisonnement par récurrence

Dans ce paragraphe, on s'intéresse à un prédicat $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{N}$.

**Le raisonnement par récurrence**

On peut conclure que $\forall n \in \mathbb{N}, \mathscr{P}(n)$ est vraie si :

$$\mathscr{P}(0) \text{ est vraie et } \forall n \geqslant 0,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$$

Lorsque le prédicat $\mathscr{P}$ est évident, il n'est pas nécessaire de l'expliciter.

✗ Démontrons que par récurrence, pour tout entier naturel $n$, $(n+1)! \geqslant 2^n$.

- ✔ Comme $1! = 2^0$, la propriété est vraie au rang 0.
- ✔ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $(n+1)! \geqslant 2^n$. On a $(n+2)! = (n+2) \times (n+1)!$ d'où la propriété au rang $n+1$ :

$$(n+2)! \geqslant (n+2)2^n \geqslant 2^{n+1} \quad \text{car } (n+2)2^n = n2^n + 2^{n+1}$$

On adapte sans peine au cas d'une initialisation en une valeur $n_0$ quelconque. La récurrence admet deux variantes souvent utiles : la récurrence double et la récurrence forte.

**Récurrences simple, double et forte (⚡ 1.8)**

On peut conclure que $\forall n \geqslant n_0, \mathscr{P}(n)$ est vraie dans les cas suivants :

⇛ Récurrence simple $\begin{cases} \mathscr{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1) \end{cases}$

⇛ Récurrence double $\begin{cases} \mathscr{P}(n_0) \text{ et } \mathscr{P}(n_0+1) \text{ sont vraies} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \big(\mathscr{P}(n) \text{ et } \mathscr{P}(n+1)\big) \implies \mathscr{P}(n+2) \end{cases}$

⇛ Récurrence forte $\begin{cases} \mathscr{P}(n_0) \text{ est vraie} \\ \forall n \geqslant n_0,\ \big(\mathscr{P}(n_0) \text{ et } \cdots \text{ et } \mathscr{P}(n-1) \text{ et } \mathscr{P}(n)\big) \implies \mathscr{P}(n+1) \end{cases}$

La phase du raisonnement où l'on prouve que $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie est appelée *initialisation*, celle où l'on prouve que $\forall n \geqslant n_0,\ \mathscr{P}(n) \implies \mathscr{P}(n+1)$ est *l'hérédité*. Dans une *récurrence forte*, l'hérédité consiste à supposer la propriété vraie *jusqu'au rang* $n$ et à prouver qu'elle est vraie au rang $n+1$.

La récurrence double intervient lorsque la démonstration de $\mathscr{P}(n+2)$ nécessite l'utilisation de $\mathscr{P}(n+1)$ et $\mathscr{P}(n)$, la version forte de la récurrence dans le cas où la preuve de $\mathscr{P}(n+1)$ nécessite l'utilisation de la propriété à *un* voire *des* rangs inférieurs strictement à $n$.

✗ Démontrons que tout entier $n > 1$ possède un facteur premier. On rappelle qu'un nombre premier est un entier naturel supérieur ou égal à 2 dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même.

- ✔ La propriété est vraie au rang 2 car 2 est premier.
- ✔ Soit $n > 1$ un entier. On suppose la propriété vraie jusqu'au rang $n$.
  - Si $n$ est premier, alors on a fini.
  - Sinon $n = ab$, où $a$ et $b$ sont des entiers distincts de 1. On a donc $2 \leqslant a < n$, donc, par l'hypothèse de récurrence, $a$ possède un facteur premier donc $n$ aussi.

✗ Passons à un exemple plus délicat : le théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{N}$. Il s'énonce ainsi :

$$\text{Pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } d \in \mathbb{N}^*, \text{ il existe } (q,r) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n = dq + r \text{ et } r < d$$

L'unicité ayant déjà été établie (cf. 3.4 à la page 15), il s'agit de démontrer l'existence. Soit $d$ dans $\mathbb{N}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, notons $\mathscr{P}(n)$ la propriété :

$$\text{Il existe } (q,r) \in \mathbb{N}^2 \text{ tel que } n = dq + r \text{ et } r < d$$

✗ Commençons par une réflexion informelle sur l'hérédité de la propriété. Soit $n$ dans $\mathbb{N}^*$.

- ✔ Essayons de démontrer $\mathscr{P}(n)$ à partir de $\mathscr{P}(n-1)$. Supposons que $n-1 = qd + r$ avec $(q,r)$ dans $\mathbb{N}^2$ et $r < d$. On a alors $n = qd + r + 1$. On remarque que $0 < r+1 \leqslant d$

- Si $r+1<d$, alors on a bien une division euclidienne pour $n$.
- Supposons $r+1=d$. On a alors $n=qd+d=(q+1)d+0$ avec $q+1\in\mathbb{N}$.

Ceci permet de démontrer l'hérédité de la propriété et la seule initialisation à effectuer concerne le rang 0 (nous ne ferons pas ici cette vérification très facile).

- ✔ Mais une autre idée permet d'éviter la disjonction précédente : prouver la propriété au rang $n$ à partir de la propriété au rang $n-d$. En effet, comme $d$ est non nul, $n-d<n$ et si $n-d=qd+r$ avec $(q,r)\in\mathbb{N}^2$ et $r<d$, alors $n=q(d+1)+r$ et $d+1\in\mathbb{N}$. Mais cette approche nécessite d'avoir $n\geqslant d$. Il faut donc initialiser aux indices de 0 à $d-1$.

✘ Après ce brouillon, voici la rédaction finale :

- ✔ Pour $n\in\mathbb{N}$ tel que $n<d$, on a $n=d\times 0+n$ ainsi $\mathscr{P}(n)$ est vraie.
- ✔ Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que $n\geqslant d-1$. Supposons la propriété $\mathscr{P}(k)$ vraie pour variant de 0 à $k=n$ inclus. Comme $n\geqslant d-1$ et $d\geqslant 1$, on a $n\geqslant n+1-d\geqslant 0$. On déduit de $\mathscr{P}(n+1-d)$ l'existence de $(q,r)$ dans $\mathbb{N}^2$ tel que $n+1-d=dq+r$ et $r<d$. Comme $a+1=d(q+1)+r$ avec $q+1\in\mathbb{N}$ et $r<d$, la propriété $\mathscr{P}(a+1)$ est vraie. On en déduit l'existence dans le théorème de la division euclidienne sur $\mathbb{N}$.

**C'est la démonstration de l'hérédité qui dicte l'initialisation**

Comme nous l'avons vu au travers des exemples précédents, le choix de l'initialisation est imposé par la démonstration de l'hérédité. Si on arrive à démontrer que $\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n+1}$ pour tout $n\geqslant n_0$, alors on doit initialiser aux rangs $0,\ldots,n_0$.

Nous terminons cette section par une ultime variante, parfois utile : la récurrence descendante.

✘ Démontrons que tout $n$ dans $[\![0,2025]\!]$ :

$$\sqrt{m\sqrt{(m+1)\sqrt{\cdots\sqrt{2024\sqrt{2025}}}}} < m+1$$

Posons $u_n := \sqrt{n\sqrt{(n+1)\sqrt{\cdots\sqrt{2024\sqrt{2025}}}}}$ pour tout $n\in[\![0,2025]\!]$.

- ✔ Pour $n=2025$, l'inégalité à démontrer s'écrit $\sqrt{2025}<2026$. Elle est vraie puisque $\sqrt{2025}<2025$.
- ✔ Soit $n\in[\![1,2025]\!]$. Supposons $u_n<n+1$. Comme $u_{n-1}=\sqrt{(n-1)u_n}$, on a

$$u_{n-1} < \underbrace{\sqrt{(n-1)(n+1)}}_{=\sqrt{n^2-1}} < \underbrace{\sqrt{n^2}}_{=n}$$

par stricte croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$. D'où l'inégalité au rang $n-1$.

Plus généralement, la récurrence descendante prend la forme suivante et admet de nombreuses variations (double, forte par exemple) :

**Récurrences descendantes**

Soit $n_0\in\mathbb{N}^*$. Si $\mathscr{P}(n_0)$ est vraie et $\mathscr{P}_n \implies \mathscr{P}_{n-1}$ pour tout $n\in[\![1,n_0]\!]$, alors $\mathscr{P}(k)$ est vraie pour tout $k$ dans $[\![0,n_0]\!]$.

# 4. Stratégies de démonstration

On regroupe dans ce qui suit des stratégies de raisonnement spécifiques.

## 4.1. La disjonction de cas

Pour démontrer que $\forall x \in E, \mathscr{P}(x)$, on peut procéder par disjonction de cas, i.e. en discutant sur la variable $x$ de façon à couvrir tous les cas de figures possibles.

- Démontrons que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^2 - x + 1 \geqslant |x-1|$.
  - Soit $x \in [1, +\infty[$. On a

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 \geqslant |x-1| &\iff x^2 - x + 1 \geqslant x - 1 \\ &\iff x^2 - 2x + 2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

    Le trinôme $x^2-2x+2$ étant de discriminant négatif et de coefficient dominant positif, il est positif sur $\mathbb{R}$ tout entier.
  - Soit $x \in ]-\infty, 1[$. On a

$$\begin{aligned} x^2 - x + 1 \geqslant |x-1| &\iff x^2 - x + 1 \geqslant -x + 1 \\ &\iff x^2 \geqslant 0 \end{aligned}$$

    On a bien-sûr que $x^2 \geqslant 0$.
  - On déduit de cette disjonction de cas que l'inégalité est bien vérifiée sur $\mathbb{R}$.
- Cette technique est aussi intéressante pour les équations. Résolvons $x^2 + 2x - 1 = |x|$ dans $\mathbb{R}$.
  - Soit $x \geqslant 0$. On a que $x^2 + 2x - 1 = |x|$ équivaut à $x^2 + x - 1 = 0$. On trouve les solutions $\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ mais seule $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ est positive.
  - Soit $x < 0$. On a que $x^2 + 2x - 1 = |x|$ équivaut à $x^2 + 3x - 1 = 0$. On trouve deux racines $\frac{-3\pm\sqrt{13}}{2}$ mais seule $\frac{-3-\sqrt{13}}{2}$ est négative.
  - L'ensemble des solutions de l'équation ci-dessus est donc $\left\{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-3-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

## 4.2. L'analyse-synthèse

Commençons par un problème classique :

> *Démontrer que toute fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ s'écrit de façon unique comme somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.*

Face à ce problème, une stratégie féconde consiste à se donner une fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et *à supposer vrai le résultat qu'il faut démontrer.*

- Supposons l'existence de $u_p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ respectivement paire et impaire telles que $u = u_p + u_i$. Pour $x$ réel, on a donc $u(x) = u_p(x) + u_i(x)$. Les hypothèses de parité et d'imparité nous permettent alors d'obtenir une seconde équation vérifiée par les deux réels $u_p(x)$ et $u_i(x)$ :

$$u(-x) = u_p(-x) + u_i(-x) = u_p(x) - u_i(x)$$

  On en déduit finalement que

$$u_p(x) = \frac{u(x)+u(-x)}{2} \quad \text{et} \quad u_i(x) = \frac{u(x)-u(-x)}{2} \ (\star)$$

- À ce stade, nous venons d'établir l'unicité dans le problème initial. En effet, sous réserve d'existence, les fonctions $u_p$ et $u_i$ sont uniques par les expressions $(\star)$ (à $u$ fixé, $u_p$ et $u_i$ sont uniques).
- Mais, au-delà de la démonstration de l'unicité, notre raisonnement présente l'énorme avantage d'avoir explicité un candidat potentiel pour le couple de fonctions paire et impaire dont la somme doit valoir $u$. Il ne reste donc plus qu'à vérifier que ces deux fonctions répondent à la question. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Notons $u_p$ et $u_i$ les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u_p(x) = \frac{u(x)+u(-x)}{2} \quad \text{et} \quad u_i(x) = \frac{u(x)-u(-x)}{2}$$

  Pour un réel $x$, on a directement $u(x) = u_p(x) + u_i(x)$. Ainsi $u = u_p + u_i$. De plus, pour $x$ réel,

$$u_p(-x) = \frac{u(-x)+u(x)}{2} = u_p(x) \quad \text{et} \quad u_i(-x) = \frac{u(-x)-u(x)}{2} = -\frac{u(x)-u(-x)}{2} = -u_i(x)$$

  Ainsi $u_p$ et $u_i$ sont respectivement paire et impaire. Ceci clôt la démonstration de l'existence dans le problème initial.

Cette approche en deux temps est connue sous le nom d'analyse-synthèse.

**Le principe d'une analyse-synthèse (⚡ 1.9)**

Pour rechercher les solutions à un problème donné, on peut procéder par analyse-synthèse :

- ANALYSE : on considère une hypothétique solution au problème et, par un raisonnement déductif, on accumule des propriétés qu'elle doit nécessairement vérifier.
- SYNTHÈSE : on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment trouvées (ce sont les seuls candidats pouvant être des solutions) et on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions.

D'une façon plus imagée, on peut filer une métaphore policière : l'analyse s'apparente à la recherche de *suspects* et la synthèse à *une enquête* sur chacun d'entre-eux.

Il arrive souvent que la phase d'analyse produise des conditions nécessaires si restrictives qu'il ne reste plus qu'un seul objet qui les vérifie. Dans ce cas, cette première phase prouve l'unicité de la solution, et la phase de synthèse permet de montrer soit l'existence d'une solution (si ce candidat répond au problème), soit qu'il n'y a aucune solution.

- Déterminons les suites de réels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $\forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ u_{n+m} = u_n + u_m$.
  - ✔ Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ solution.
    - On a en particulier $u_0 = 2u_0$ d'où $u_0 = 0$.
    - Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} = u_n + u_1$. On en déduit que cette suite est arithmétique de raison $u_1$ et donc que pour tout $n$ dans $\mathbb{N}$, on a $u_n = u_0 + nu_1 = nu_1$.

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := \lambda n$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$u_{n+m} = \lambda(n+m) = \lambda n + \lambda m = u_n + u_m$$

- Les solutions sont donc les suites de la forme $(\lambda n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

### 4.3. Résolution par généralisation

Dans ce paragraphe, nous allons exposer une stratégie rarement abordée dans les classes de lycée. On peut parfois gagner à démontrer un résultat un plus général que celui qui nous intéresse. Nous nous contenterons d'un exemple classique.

✗ Démontrons que $\forall n \in [\![2, +\infty[\![ \quad , \quad \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} < 3.$

- Tentons une résolution par récurrence sur $n$. Posons $v_n := \sqrt{2\sqrt{3\sqrt{\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}}$ pour tout $n$ supérieur à 2. La difficulté est que $v_n$ ne s'exprime pas facilement en fonction de $v_{n-1}$.
- Ce qui s'exprime facilement par récurrence sur $k$ est plutôt

$$u_k := \sqrt{k\sqrt{(k+1)\sqrt{\cdots\sqrt{(n-1)\sqrt{n}}}}} \quad \text{à } n \text{ fixé via} \quad \forall k \in [\![1, n]\!] \quad , \quad u_{k-1} = \sqrt{(k-1)u_k} \; (\star)$$

- Nous cherchons à démontrer que $u_2 < 3$. Pour cela, une stratégie consiste à rechercher *plus généralement* une majoration du type $u_k < \mathrm{M}_k$ telle que $\mathrm{M}_2 = 3$ et qui va se démontrer par récurrence descendante sur $k$ au moyen de $(\star)$.
  - Le lecteur attentif de ce cours reconnaît ici un exemple déjà traité ci-dessus (justement pour illustrer les récurrences descendantes).
  - La propriété $\mathrm{M}_k < k+1$ peut en effet être démontrée par une récurrence descendante facile.

La moralité de cet exemple est qu'il est parfois intéressant d'exploiter une relation de récurrence en fixant un paramètre (ici le début de la racine $\sqrt{k\sqrt{(k-1)\cdots}}$) ce qui nécessite l'introduction d'un nouvel objet sur lequel on raisonne (ici la suite $u_k$). Cette approche sera souvent intéressante en dénombrement et en informatique (programmation dynamique).

### 4.4. La trilogie expérience, conjecture et démonstration

Avant de se lancer tête baissée dans la résolution d'un problème, il est souvent instructif d'expérimenter. Il faut parfois beaucoup de tâtonnements avant d'envisager un angle de démonstration ou, plus modestement, d'entrevoir un type d'outil adapté au problème.

**L'expérimentation en Mathématiques**

L'expérience n'est pas réservée aux seules sciences expérimentales. En Mathématiques, elle apparaît sous différentes formes :

⇛ La réalisation de figures géométriques en dimension un, deux ou trois.

⇛ Le calcul à la main sur un brouillon.

⇛ Les simulations informatiques.

La fonction d'Ackerman est un bon terrain de jeu. Elle a été introduite en 1970 dans le cadre de l'informatique théorique.

✗ Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ définie par $f(n) := \begin{cases} n-10 & \text{si } n \geqslant 101 \\ f\big(f(n+11)\big) & \text{si } n \leqslant 100 \end{cases}$. Explicitons $f(n)$ pour $n \in [\![0,100]\!]$.

- ✔ On a $f(100) = f\big(f(111)\big) = f\big(111-10\big) = f(101) = 101-10 = 91$.
- ✔ De même, $f(99) = f\big(f(110)\big) = f\big(110-10\big) = f(100) = 91$.
- ✔ Continuons : $f(98) = f\big(f(109)\big) = f\big(109-10\big) = f(99) = 91$.
- ✔ Plus généralement, on remarque que pour $n \in [\![90,100]\!]$, on a

$$f(n) = f\big(f(n+11)\big) = f(n+11-10) = f(n+1) \quad \text{car } n+11 \geqslant 101$$

  Ainsi $f$ est constante sur $[\![90,101]\!]$. On en déduit que $f(n) = f(101) = 91$ pout $n \in [\![90,100]\!]$.
- ✔ Reprenons :

$$f(89) = f\big(f(89+11)\big) = f\big(f(100)\big) = f(91) = 91 \quad \text{et} \quad f(88) = f\big(f(88+11)\big) = f\big(f(99)\big) = f(91) = 91$$

  Comme $f$ est constante sur $[\![90,100]\!]$, en itérant les deux calculs précédents, on conjecture que $f(n) = 91$ pour tout $n \in [\![79,89]\!]$. Puis on peut recommencer sur $[\![68,78]\!]$, etc.
- ✔ On va procéder par récurrence forte descendante pour établir ce résultat.
  - ✦ Soit $n \in [\![1,89]\!]$. Supposons que $f(k) = 91$ pour tout $k \in [\![n,89]\!]$.
  - ✦ On a $f(n-1) = f\big(f(n+10)\big) = f(91) = 91$ car $n+10 \in [\![n,99]\!]$.
  - ✦ On en déduit que $f(n) = 91$ pour tout $n \in [\![0,89]\!]$ par récurrence descendante.

Cet exemple illustre bien l'importance du calcul dans la résolution d'un problème.

**La place du calcul en Mathématiques**

La pratique du calcul est centrale en Mathématiques. Il faut l'entendre dans une acception élargie : calculer au sens d'établir des relations (égalités ou inégalités par exemples).

⇛ Le calcul aide à mieux appréhender certains objets (les nombres, les matrices, etc.) et permet une compréhension plus intime de certaines formules, inégalités ou définitions.

⇛ Il est peu productif de relire un calcul déjà effectué en cours ou en TD. Mieux vaut le refaire sur une feuille blanche en regardant le moins possible son cours.

## 5. Conseils pour bien aborder un problème mathématique

Les Mathématiques permettent de formaliser certaines idées[6], de poser correctement des questions et des problèmes délicats[7] et de forger des outils de résolution. Une grande partie de l'activité mathématiques consiste donc à résoudre des problèmes.

6. L'invention du calcul différentiel (i.e. de la notion de dérivée) par Newton a permis de donner un sens précis à la notion de vitesse.
7. En définissant des cadres appelés théories.

Il n'existe évidemment pas de méthode universelle de résolution. Loin de convoiter un tel Graal, nous dispenserons quelques conseils à nos lecteurs apprentis mathématiciens. En la matière, c'est la pratique des problèmes qui permet d'engranger de l'expérience à travers ses errances et erreurs. Les Mathématiques se sont progressivement construites autour de la résolution de certaines classes de problèmes (géométriques, arithmétiques, etc.) en créant des outils spécifiques à chacune de ces classes, les maîtriser requiert du temps et beaucoup d'exercice.

Considérons à titre d'illustration, le cas des équations fonctionnelles. Il nous faut pour cela revenir aux premières années du XVIIe siècle. À cette époque, les besoins en calcul allaient grandissant (pour l'astronomie notamment). Avant l'ère numérique, les tables et les règles de calculs étaient les seuls moyens d'effectuer des opérations lourdes et complexes. Les additions étant plus faciles que les multiplications, les savants ont naturellement recherché un moyen de transformer les produits en sommes[8] : c'est la naissance des logarithmes. De nos jours, on résume ce problème de la façon suivante :

$$\text{Trouver une fonction non triviale } f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R} \text{ telle que } \forall(x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ f\left(xy\right)=f(x)+f(y)$$

Ce type de problème s'appelle une équation fonctionnelle. Dans la suite de ce paragraphe, nous nous pencherons sur deux d'entre-elles[9] :

$$\mathbf{E_1}\ :\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(x+y\right)=f(x)+f(y) \qquad\qquad \mathbf{E_2}\ :\ \forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f\left(\frac{x+y}{2}\right)=\frac{f(x)+f(y)}{2}$$

Les inconnues étant dans les deux cas des fonctions $f$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ continues[10].

### 5.1. Résolution de l'équation fonctionnelle de Cauchy

Ce problème se prête plutôt bien à une analyse-synthèse. Soit $f$ une solution continue de l'équation $\mathbf{E_1}$. À l'instar de l'exemple d'analyse-synthèse de la page 19, l'équation nous donne accès à certaines valeurs de $f$.

- On a tout d'abord $f(0)=f(0)+f(0)=2f(0)$ d'où $f(0)=0$.
- Soit $x$ un nombre réel et $n$ dans $\mathbb{N}$. On remarque que

  $$f(nx+x)=f(nx)+f(x)$$

  On en déduit par un raisonnement par récurrence facile que $f(nx)=nf(x)$.
- Pour $n\in\mathbb{N}$ et $x\in\mathbb{R}$, on a

  $$0=f(nx-nx)=f(nx)+f(-nx)$$

  d'où $f(-nx)=-f(nx)=-nf(x)$. Finalement $\forall n\in\mathbb{Z}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$, $f(nx)=nf(x)$. Pour $m\in\mathbb{N}^*$, on a donc

  $$f(1)=f\left(\frac{m}{m}\right)=mf\left(\frac{1}{m}\right)$$

  d'où $f\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{1}{m}f(1)$. Pour $n\in\mathbb{Z}$, on en déduit que

  $$f\left(\frac{n}{m}\right)=nf\left(\frac{1}{m}\right)=\frac{n}{m}f(1)$$

8. Une cousine arithmétique de l'Alchimie en quelques sorte.
9. $\mathbf{E_1}$ est connue sous le nom d'équation fonctionnelle de Cauchy.
10. C'est une hypothèse fort raisonnable et déjà riche d'enseignements pour une première approche.

- Nous connaissons ainsi la valeur de $f$ en tout point de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels, et ceci sans avoir utilisé l'hypothèse de continuité de $f$ : nous n'avons fait que des manipulations arithmétiques. Le passage de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{R}$ est beaucoup plus difficile et requiert un passage à la limite. Pour tout réel $x$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n(x) := \frac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.
  - Pour $y \in \mathbb{R}$, $\lfloor y \rfloor$ est la partie entière de $y$, c'est-à-dire le seul entier relatif $k$ tel que $k \leqslant x < k+1$. Par exemple, $\lfloor 2,33 \rfloor = 2$ et $\lfloor -0,33 \rfloor = -1$.
  - Pour un réel $x$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx < \lfloor nx \rfloor$ d'où $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ et donc $x - \dfrac{1}{n} u_n(x) \leqslant x$.
  - On déduit du théorème d'encadrement (dit des gendarmes) que $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$.
  - Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
    - Comme $u_n(x)$ est un nombre rationnel, on a $f\big(u_n(x)\big) = u_n(x) f(1)$ $(\star)$.
    - Par continuité de $f$ en $x$, on déduit de $u_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x$ que $f\big(u_n(x)\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x)$.
    - De plus, $u_n(x) f(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} x f(1)$. Ainsi, par $(\star)$, $f(x) = x f(1)$.
- Par toute l'analyse qui précède, on sait que si $f$ est une solution continue de l'équation $\mathbf{E_1}$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f : x \longmapsto \lambda x$.
- Il reste à faire la synthèse. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $f : x \longmapsto \lambda x$. Cette fonction est polynomiale donc continue et, pour des réels $x$ et $y$,

$$f(x+y) = \lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y = f(x) + f(y)$$

- En conclusion les seules solutions continues de l'équation $\mathbf{E_1}$ sont les fonctions de la forme $x \longmapsto \lambda x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

### 5.2. Figures et intuition géométrique

Il faut dessiner !

**La place des figures en Mathématiques**

Les figures sont un support à l'intuition.

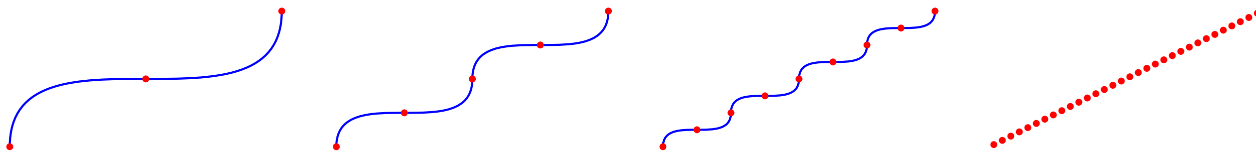
⇛ Multiplier les figures permet de mieux appréhender un problème.

⇛ C'est essentiel tant en Algèbre (nombres complexes, algèbre linéaire) qu'en Analyse (fonctions, suites, intégrales).

- Considérons une solution $f$ continue de $\mathbf{E_2}$, fixons un repère orthonormé du plan, notons $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans ce repère et, pour $x \in \mathbb{R}$, notons $\mathrm{M}(x)$ le point de coordonnées $\big(x, f(x)\big)$. Pour $(x, y)$ dans $\mathbb{R}^2$, le point $\mathrm{M}\big(\frac{x+y}{2}\big)$ a pour coordonnées

$$\left(\frac{x+y}{2}, \frac{f(x)+f(y)}{2}\right)$$

  il est donc milieu du segment joignant $\mathrm{M}(x)$ à $\mathrm{M}(y)$. Cela signifie donc que, pour tout couple de point appartenant à $\mathscr{C}_f$, le milieu du segment les joignant appartient aussi à cette courbe.



- En itérant le procédé, sachant $f$ continue, on conjecture que $\mathscr{C}_f$ est une droite et donc que $f$ est une fonction affine.
- Réciproquement, on vérifie sans peine que toute fonction affine, i.e. de la forme $x \mapsto ax+b$ où $a$ et $b$ sot des constantes réelles, est effectivement solution de $\mathbf{E_2}$.

Ce principe permet souvent d'avoir une intuition du résultat, mais il est parfois délicat de transformer celle-ci en une démonstration en bonne et dûe forme (cf. ci-dessus et l'équation fonctionnelle $\mathbf{E_2}$). D'autre part, les figures sont parfois trompeuses, notamment si on dessine des cas particuliers.

### 5.3. Jouer sur les hypothèses

Dans le cas où la résolution d'un problème s'enlise, il est souvent avantageux de faire des hypothèses supplémentaires afin d'avancer. Examiner des cas particuliers permet en effet de se familiariser avec le problème, de conjecturer des résultats et d'entrevoir des outils mathématiques utiles à sa résolution.

- Revenons à l'équation $\mathbf{E_2}$. En l'absence d'autre idées pour déterminer ses solutions continues, il est instructif de rechercher ses solutions dérivables (hypothèse plus *forte* que la continuité).
- Soit $f$ une telle solution. Fixons $a$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(\frac{x+a}{2}\right) = \frac{f(x)+f(a)}{2}$$

  En dérivant chacun des deux membres par rapport à $x$, on obtient, après simplification par $\frac{1}{2}$ :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'\left(\frac{x+a}{2}\right) = f'(x) \quad (\star)$$

- Comme $a$ est quelconque, on en déduit que $f'$ est constante sur $\mathbb{R}$. Détaillons ce point. Soit $y \in \mathbb{R}$. En appliquant $(\star)$ à $a := 2y$ et $x = 0$ (on a bien le droite car $(\star)$ a été démontrée pour tous réels $a$ et $x$), on aboutit à $f'(y) = f'(0)$. Ainsi. en primitivant, il existe une constante réelle C telle que $\forall y \in \mathbb{R}$, $f(y) = f'(0)y + \mathrm{C}$. La fonction $f$ est donc nécessairement affine.

Ceci ne résout pas le problème initial (cf. l'hypothèse de continuité plus *faible* que la dérivabilité). Mais cela fait avancer la résolution : si l'intuition géométrique nous a fait défaut, on voit au moins apparaître les solutions affines; si nous avions déjà l'intuition que les solutions continues sont toutes affines, ceci nous ouvre une piste de résolution : démontrer que toute solution continue de l'équation est en fait dérivable.

- Soit $f$ une solution continue de l'équation. On sait (cf. le cours de Terminale) que $f$ admet sur $\mathbb{R}$ une unique primitive F s'annulant en 1. Soit $x$ dans $\mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t+x)\mathrm{d}t &= \int_0^1 \big(f(t)+f(x)\big)\mathrm{d}t = \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t + \int_0^1 f(x)\mathrm{d}t \quad \text{(linéarité de l'intégrale)}\\ &= \mathrm{F}(1) + f(x)\end{aligned}$$

  Puisque la dérivée de $t \mapsto \mathrm{F}(t+x)$ vaut $t \mapsto f(t+x)$, on a également

$$\int_0^1 f(t+x)\mathrm{d}t = \left[\mathrm{F}(t+x)\right]_0^1 = \mathrm{F}(x+1)-\mathrm{F}(x)$$

Ainsi, pour tout réel $x$, $f(x) = \mathrm{F}(x+1)-\mathrm{F}(x)-\mathrm{F}(1)$. On en déduit que $f$ est dérivable en tant que somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

### 5.4. Reformuler le problème

Une résolution commence le plus souvent par une phase de reformulation. Rechercher des formes équivalentes à un problème s'avère souvent très fructueux : cette phase permet d'esquisser différentes stratégies de résolution, un peu à la manière des alpinistes dépistant des chemins vers un sommet montagneux. Si elle n'aboutit pas toujours à une résolution effective, cette approche fait indubitablement avancer dans la compréhension du problème : elle conduit parfois à une résolution partielle, permet d'entrevoir des outils mathématiques susceptibles d'être intéressants pour aborder le problème, etc.

- Illustrons sans plus tarder ce principe en démontrant l'existence d'un unique réel strictement positif $a$ tel que $e^a = a^7$.
  - Naturellement, notre premier réflexe est d'étudier les variations de $x \mapsto e^x - x^7$.
  - Malheureusement, ces dernières ne sont pas très simples et il est plus avantageux de remarquer que
  $$\forall x>0\,,\; e^x = x^7 \iff x-7\ln x = 0$$
  car les variations de $x \mapsto x-7\ln x$ sont assez faciles à étudier. Reformuler $e^a = a^7$ en $a = 7\ln a$ est effectivement une simplification remarquable.
- Dans certains cas, la reformulation aboutit à un problème déjà résolu. Revenons un instant aux équations fonctionnelles $\mathbf{E_1}$ et $\mathbf{E_2}$. Nous savons que les solutions continues de la première sont les fonctions linéaires, i.e. de la forme $x \mapsto ax$ où $a$ est une constante réelle. Nous avons de plus l'intuition (cf. 5.2) que les solutions de la seconde sot les fonctions affines, i.e. de la forme $x \mapsto ax+b$ où $a$ et $b$ sont deux constantes réelles.
  - Cette conjecture et la ressemblance des deux équations fonctionnelles nous conduit à une piste de résolution de $\mathbf{E_2}$ : considérer une solution continue $f$ de $\mathbf{E_2}$ et vérifier que $g : x \mapsto f(x) - f(0)$ est linéaire en vérifiant qu'elle est en fait solution de $\mathbf{E_1}$.
  - Fixons deux réels $x$ et $y$. On a
  $$g\big(x+y\big) = f\big(x+y\big) - f(0) = \frac{f(2x)+f(2y)}{2} - f(0)$$
  Il reste donc à exprimer $g(2x)$ et fonction de $g(x)$ (et de même pour la variable $y$). On remarque alors que
  $$f(x) = f\left(\frac{2x+0}{2}\right) = \frac{f(2x)+f(0)}{2}$$
  puis $\frac{f(2x)}{2} = f(x) - \frac{f(0)}{2}$ et de même $\frac{f(2y)}{2} = f(y) - \frac{f(0)}{2}$, d'où finalement
  $$g\big(x+y\big) = \frac{f(2x)+f(2y)}{2} - f(0) = g(x)+g(y)$$
  La stratégie est payante et on en déduit que $f$ est affine.
- Le chemin inverse est aussi possible : en admettant que les solutions continues de $\mathbf{E}_2$ sont affines, on peut retrouver les solutions de $\mathbf{E_1}$.

## 6. Tests

**1.1.**

On considère la proposition $p$ suivante :

« tout entier naturel est la somme de deux carrés d'entiers naturels »

Écrire $p$ puis son contraire sous forme symbolique.

**1.2.**

Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

**a.** Il existe un réel $x$ tels que, pour tous réels $a$ et $b$ strictement positifs, $\sin(ax+b)=0$.

**b.** Pour tous réels strictement positifs $a$ et $b$, il existe $x\in\mathbb{R}$ tel que $\sin(ax+b)=0$.

**1.3.**

Prove that for any integer $n$, if $3n+1$ is even, then $n$ is odd.

**Un peu de vocabulaire**

Les adjectifs « pair » et « impair » se traduisent respectivement en anglais par « even » et « odd ». Le mot « if » et la locution « for any integer $n$ » signifient « si » et « pour tout entier $n$ ».

**1.4.**

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Établir que $\big(a\neq -1 \text{ et } b\neq -1\big) \iff a+b+ab\neq -1$.
On proposera une démonstration par double implication puis une autre par équivalences.

**1.5.**

La proposition $p$ du test **1.1.** est-elle vraie ?

**1.6.**

Démontrer qu'une fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ admet au plus une primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. On rappelle qu'une primitive de $f$ sur $\mathbb{R}$ est une fonction $\mathrm{F}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivable telle que $\mathrm{F}'=f$.

**1.7.**

On rappelle qu'un nombre rationnel est de la forme $\frac{b}{a}$ avec $b\in\mathbb{Z}$ et $a\in\mathbb{N}^*$. Démontrer qu'entre deux rationnels on peut toujours en trouver un autre. On commencera par écrire cette proposition sous forme symbolique.

**1.8.**

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels positifs telle que $u_1=1$ et $\forall n\geqslant 2,\ u_n^2 = u_{n-1}+\cdots+u_1$.

Démontrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n\geqslant \dfrac{n}{4}\cdot$ On se souviendra que $\forall m\in\mathbb{N},\ 1+\cdots+m=\dfrac{m(m+1)}{2}\cdot$

**1.9.**

Déterminer les fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ telles que $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x+y)=f(y)+x$.

# 7. Solutions

### 1.1.

- La traduction formelle de la proposition « tout entier naturel est la somme de deux carrés d'entiers naturels » est la suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad \exists (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad , \quad n = a^2 + b^2$$

- Sa négation est

$$\exists n \in \mathbb{N} \quad , \quad \forall (a,b) \in \mathbb{N}^2 \quad , \quad n \neq a^2 + b^2$$

### 1.2.

**a.** La première proposition est fausse car son contraire est vrai :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \exists (a,b) \in ]0,+\infty[^2,\ \sin(ax+b) \neq 0$$

En effet, soit $x \in \mathbb{R}$. Posons

$$(a,b) := \begin{cases} \left(\frac{\pi}{4x}, \frac{\pi}{4}\right) & \text{si } x > 0 \\ \left(-\frac{\pi}{4x}, \frac{3\pi}{4}\right) & \text{si } x < 0 \\ \left(1, \frac{\pi}{2}\right) & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $\sin(ax+b) = 1$, $a > 0$ et $b > 0$.

**b.** La seconde proposition est vraie. En effet, soit $a$ et $b$ deux réels strictement positifs. En posant $x := -\frac{b}{a}$, on a $\sin(ax+b) = 0$.

**Variables liées**

Dans le a., les variables $a$ et $b$ sont liées : elle dépendent de $x$. Dans le b., la variable $x$ est liée, elle dépend de $a$ et $b$.

### 1.3.

We'll prove the claim by contrapositive. Let $n$ be an integer. Suppose that $n$ is even. Then $n = 2k$ for some integer $k$. Hence $3n+1 = 2\times 3k+1$ and therefore $3n+1$ is odd too.

**Un peu de vocabulaire (suite)**

Les mots « hence », « then » et « therefore » se traduisent par « ainsi », « alors » et « donc ».

### 1.4.

En passant aux contraires, il s'agit d'établir

$$\big(a = -1 \text{ ou } b = -1\big) \iff a + b + ab = -1$$

- Si $a = -1$, alors $a + b + ab = -1 + b - b = -1$. De même, $b = -1 \implies a + b + ab = -1$.
- Réciproquement, supposons $a+b+ab = -1$. On a $0 = a+b+ab+1 = (a+1)(b+1)$. Ainsi $a = -1$ ou $b = -1$.

**Le chapeau du magicien**

L'idée d'une factorisation n'est pas si astucieuse que cela. En effet, sachant que l'on doit aboutir à $a+1 = 0$ ou $b+1 = 0$, il est assez naturel de rechercher une telle factorisation.

- La factorisation $a+b+ab+1 = (a+1)(b+1)$ ouvre la voie à une preuve par équivalences :

$$\begin{aligned} a+b+ab = -1 &\iff (a+1)(b+1) = 0 \\ &\iff a+1 = 0 \text{ ou } b+1 = 0 \\ &\iff a = -1 \text{ ou } b = -1 \end{aligned}$$

### 1.5.

La proposition $p$ est fausse.

- Raisonnons par l'absurde en supposant $p$ vraie.
- Il existe alors des entiers naturels $a$ et $b$ tels que $3 = a^2 + b^2$. On a donc $a^2 \leqslant 3$ et $b^2 \leqslant 3$, d'où $a$ et $b$ appartiennent à $[\![0,1]\!]$. Comme $1^2+0^2$, $1^2+1^2$ et $0^2+0^2$ sont distincts de 3, on aboutit à une absurdité.

**Méthodologie**

Détaillons un peu le cheminement qui nous a conduit à cette démonstration.

- Face à cette question ouverte ($p$ est-elle vraie ou non ?), il faut commencer par se faire une idée en expérimentant un peu...
- Le premier mouvement est d'étudier si la propriété est vraie pour les « petites » valeurs de $n$.
- On a $0 = 0^2 + 0^2$, $1 = 1^2 + 0^2$ et $2 = 1^2 + 1^2$. Qu'en est-il de 3 ?
- C'est justement en cherchant à résoudre au brouillon $3 = a^2 + b^2$ avec $a$, $b$ entiers que l'on a abouti à une absurdité.

### 1.6.

Soit $F_1$, $F_2$ des primitives de $f$ sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Posons $\delta := F_2 - F_1$. Cette fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\delta' = F_2' - F_1' = f - f = 0$$

Comme $\mathbb{R}$ est un intervalle, on en déduit que $\delta$ est constante sur $\mathbb{R}$ et puisque

$$\delta(0) = F_1(0) - F_1(0) = 0$$

$\delta$ est nulle et donc $F_1 = F_2$.

### 1.7.

- On commence par écrire la proposition sous forme symbolique :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Q}^2, x < y \implies \exists z \in ]x, y[, z \in \mathbb{Q}$$

  où $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des nombres rationnels.
- Passons à la preuve. Soit $(x, y) \in \mathbb{Q}^2$ tel que $x < y$.
- Arrive à présent la partie la plus délicate de la démonstration : la construction. Elle peut ici se faire très simplement en posant $z := \frac{x+y}{2}$ qui vérifie clairement

$$z \in \mathbb{Q} \text{ et } x < z < y$$

### 1.8.

- La propriété est vraie au rang 1 car $u_1 = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$ tel $n \geqslant 2$ et tel que la propriété soit vraie jusqu'au rang $n-1$. On a

$$\begin{aligned} u_n^2 = u_{n-1} + \cdots + u_1 &\geqslant \frac{1+2+\cdots+n-1}{4} \\ &\geqslant \frac{n(n-1)}{8} \\ &\geqslant \frac{n^2}{16} \end{aligned}$$

  car $n \geqslant 2$. Comme $u_n$ est positif, on en déduit que $u_n \geqslant \dfrac{n}{4}$.

**Variante**

On peut aussi remarquer

$$\forall n \geqslant 2 \quad , \quad u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + u_n}$$

et rédiger une récurrence simple.

### 1.9.

- ANALYSE. Soit $f$ une solution. Pour $x \in \mathbb{R}$, on a $f(x) = f(0) + x$.
- SYNTHÈSE. Soit $\mu \in \mathbb{R}$ et $f : x \mapsto x + \mu$ définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $x$ et $y$ réels, on a

$$f(x+y) = \mu + x + y = f(y) + x$$

  Ainsi $f$ est bien solution.

Les solutions sont donc les fonctions de la forme $x \mapsto x + \mu$ avec $\mu \in \mathbb{R}$.