

Ce chapitre est consacré à l'étude des nombres complexes et leurs applications.



Le voyageur contemplant une mer de nuages, David Caspar Friedrich

3	Nombres complexes	1
1	Les nombres complexes	2
1.1	L'ensemble $\mathbb{C}$	4
1.2	Module d'un nombre complexe	7
1.3	Forme trigonométrique et arguments d'un nombre complexe non nul	8
1.4	Cercle $\mathbb{U}$, factorisation par angle moitié et prolongement de l'exponentielle à $\mathbb{C}$	10
2	Nombres complexes et géométrie	10
2.1	Interprétation géométrique des opérations de $\mathbb{C}$	10
2.2	Distances et angles	11
2.3	Cercles	13
2.4	Droites et demi-plans	14
2.5	Transformations usuelles du plan	15
3	Équations algébriques	15
3.1	Équations du second degré	15
3.2	Racines n -ièmes de l'unité	17
3.3	Racines d'un nombre complexe non nul	19
4	Tests	21
5	Solutions	23

1. Les nombres complexes

La naissance des nombres complexes est liée à la résolution des équations algébriques, celles du troisième degré en particulier. Diophante connaissait la méthode de résolution de l'équation du second degré (en n'employant ni puissances, ni radicaux). Au début du XVI^e siècle, les mathématiciens n'étaient guère plus avancés dans la résolution de l'équation du troisième degré que Diophante ou les mathématiciens arabes.



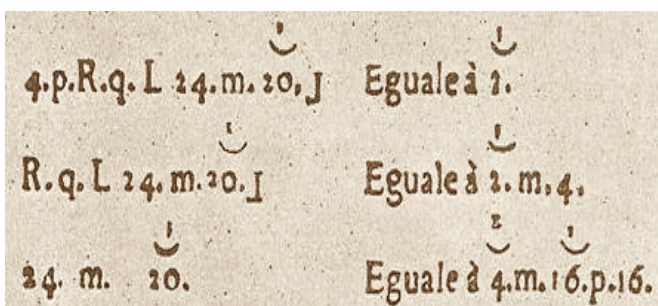
Tartaglia

Replaçons nous dans le contexte. L'imprimerie a entre cinquante et cent ans d'existence. On ne connaît pas les nombres complexes. Les grands noms des mathématiques de l'époque sont Scipion del Ferro, Girolamo Cardano (en français, Jerome Cardan), Nicolo Tartaglia, Ludovico Ferrari et Rafael Bombelli. Ils travaillent sur la résolution des équations algébriques, mais n'ont pas encore à disposition notre formalisme. Par exemple, l'équation $x^3 + 6x = 20$ devient sous la plume de Cardan : « Soit le cube et six fois le côté égal 20 ». De même, la figure suivante reproduit le texte d'un livre de Bombelli ; cette séquence s'écrirait aujourd'hui¹ :

$$4 + \sqrt{24 - 20x} = 2x, \quad \sqrt{24 - 20x} = 2x - 4, \quad 24 - 20x = 4x^2 - 16x + 16$$

On sait résoudre l'équation de degré 1 avec une idée simple. L'égalité $2x - 4 = 6$ signifie : en partant d'un nombre inconnu x , en le multipliant par 2 puis en retranchant 4, on trouve 6. Pour retrouver le nombre initial, on effectue les opérations contraires en sens inverse.

On réajoute 4 au nombre 6, puis on redivise le résultat obtenu par 2 et on obtient $x = \frac{4+6}{2} = 5$.



Extrait d'un ouvrage de Bombelli

Il en est de même pour l'équation de degré 2 : $x^2 - 4 = 12$. Effectuer les opérations contraires consiste à réajouter 4 à 12 pour obtenir 16 puis à faire le contraire de l'élévation au carré à savoir reprendre la racine carrée. On obtient $x = \sqrt{4+12} = 4$ (ou $x = -\sqrt{4+12} = -4$).

Les choses se compliquent avec l'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$. Il ne semble plus possible de trouver les opérations successives effectuées à partir de l'inconnue x . Le problème est que l'inconnue apparaît deux fois. Tout se passe comme si on avait en fait deux inconnues : x et x^2 . Mais une astuce algébrique (la transformation canonique) permet de se ramener à une équation où l'inconnue apparaît une seule fois et donc où l'on comprend les différentes étapes de calcul effectuées à partir de l'inconnue x . L'équation $x^2 - 4x + 3 = 0$ est équivalente à $(x - 2)^2 - 1 = 0$, et pour obtenir l'inconnue x , il n'y a plus qu'à partir de 0, ajouter 1, prendre plus ou moins la racine carrée et finalement ajouter 2 pour obtenir $x = 2 + \sqrt{1} = 3$ ou $x = 2 - \sqrt{1} = 1$.

Passons à l'équation de degré 3. Soit l'équation $E_1 : x^3 + 3x^2 - 21x - 95 = 0$. Comme pour l'équation de degré 2, on cherche à transformer le premier membre de sorte que l'inconnue n'apparaisse qu'une

1. C'est dans l'ouvrage ALGEBRA NOVA (1600) de Claude Viète qu'apparut pour la première fois la notation des inconnues de l'Algèbre par des lettres minuscules x, y , etc. Cette convention s'imposa rapidement au sein de la communauté scientifique européenne.

seule fois. On espère parvenir à une équation du genre $(x+1)^3 - 27 = 0$. On peut commencer le travail : $x^3 + 3x^2 - 21x - 95 = 0$ si et seulement si $(x+1)^3 - 3x - 1 - 21x - 95 = 0$ si et seulement si $(x+1)^3 - 24x - 96 = 0$. Malheureusement, le terme $-24x$ persiste. Conservons néanmoins l'idée en considérant la nouvelle inconnue $y = x + 1$ (on va d'abord essayer de trouver y puis on obtiendra x en écrivant que $x = y - 1$). L'équation $\mathbf{E}_1$ s'écrit maintenant plus simplement : $y^3 - 24(y - 1) - 96 = 0$, c'est-à-dire $y^3 - 24y - 72 = 0$. La nouvelle équation est un peu plus simple car le terme de degré 2 a disparu, mais un terme de degré 1 est toujours écrit. Si maintenant, on cherche à le faire disparaître à l'aide d'un nouveau changement d'inconnue, on peut, mais on fera réapparaître un terme de degré 2. En fait, une manipulation algébrique ne fera pas, dans le cas général, disparaître à la fois le terme de degré 1 et le terme de degré 2 (même si pour l'équation $x^3 + 3x^2 + 3x - 26 = 0$, cela marche en l'écrivant successivement $x^3 + 3x^2 + 3x + 1 - 27 = 0$ puis $(x+1)^3 - 27 = 0$). Pour continuer, il fallut une idée neuve. Scipion del Ferro a eu l'idée² de chercher une solution de $(\mathbf{E}'_1)$ sous la forme³ $y = u + v$. Cela donne $(u + v)^3 - 24(u + v) - 72 = 0$, c'est-à-dire $u^3 + v^3 + 3uv^2 + 3uv^2 - 24(u + v) - 72 = 0$, ou encore :

$$u^3 + v^3 - 72 + (u + v)(3uv - 24) = 0.$$

Scipion del Ferro pensa à *découpler* cette équation en deux autres : il remarqua que si u et v vérifient $u^3 + v^3 = 72$ et $uv = 8$ alors $y = u + v$ est solution de $\mathbf{E}_1$. Si les nombres u et v sont solutions de ce système, alors $u^3 + v^3 = 72$ et $u^3 v^3 = 512$ donc u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation de degré 2 : $X^2 - 72X + 512 = 0$ (*). Le discriminant réduit de (*) est $\Delta' = 36^2 - 512 = 784 = 28 \times 28$. Les solutions de cette dernière équation sont donc $u^3 = 36 - 28 = 8 = 2^3$ et $v^3 = 36 + 28 = 64 = 4^3$. Le nombre $y = 2 + 4 = 6$ est donc solution de $(\mathbf{E}'_1)$ puis le nombre $x = y - 1 = 5$ est solution de $\mathbf{E}_1$. On peut alors achever la résolution de $\mathbf{E}_1$ en mettant $(x - 5)$ en facteur :

$$x^3 + 3x^2 - 21x - 95 = (x - 5)(x^2 + 8x + 19) = (x - 5)((x + 4)^2 + 3) = 0,$$

et $\mathbf{E}_1$ admet une et une seule solution (réelle) à savoir 5. Reconstruisons tout ceci avec l'équation *générale* $x^3 + px + q = 0$. On pose $x = u + v$ et on obtient :

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0.$$

Il suffit pour cela que $u^3 + v^3 = -q$ et $uv = -p/3$. On recherche donc deux nombres $\alpha = u^3$ et $\beta = v^3$ dont on connaît la somme $\alpha + \beta = -q$ et le produit $\alpha\beta = -p^3/27$: ce sont les solutions de l'équation $y^2 + qy - p^3/27 = 0$, Scipion del Ferro obtint ainsi les formules (qui n'étaient bien-sûr pas écrites sous cette forme ...)

$$u^3 = \frac{-q + \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2} \quad \text{et} \quad v^3 = \frac{-q - \sqrt{q^2 + 4p^3/27}}{2},$$

et finalement,

$$x = u + v = \sqrt[3]{-q/2 + \sqrt{q^2/4 + p^3/27}} + \sqrt[3]{-q/2 - \sqrt{q^2/4 + p^3/27}}$$

Etudiant les travaux de Scipion del Ferro, Tartaglia fut troublé par l'utilisation de la racine carrée dans le cas où le terme sous le radical est négatif. Il observa que dans ce cas, le calcul ne peut pas être achevé. En 1572, Bombelli publia un ouvrage d'Algèbre dans lequel il revint sur les équations algébriques. En étudiant l'équation $x^3 - 15x - 4 = 0$, il remarqua que la solution évidente $x = 4$ peut être obtenue par les formules de Scipion. Détaillons ses idées. Soit $(\mathbf{E}_2)$: $x^3 - 15x - 4 = 0$. On pose $x = u + v$ et on obtient : $((u + v)^3 - 15(u + v) - 4 = 0$, ie $u^3 + v^3 - 4 + (u + v)(3uv - 15) = 0$. Il suffit pour cela que $u^3 + v^3 = 4$ et $u^3 v^3 = 5^3 = 125$; les nombres u^3 et v^3 sont alors les solutions de l'équation $X^2 - 4X + 125 = 0$ (*) dont le discriminant réduit vaut cette fois-ci -11^2 . L'équation (*) n'a donc pas de solution, si on ne connaît pas les nombres complexes. Bombelli décide néanmoins de continuer *formellement* les calculs,

2. Cette approche est souvent appelée à tort « méthode de Cardan ».

3. Pourquoi pas !

$$x^2 - 4x + 125 = (x - 2)^2 + 121 = (x - 2)^2 - (11\sqrt{-1})^2 = (x - 2 + 11\sqrt{-1})(x - 2 - 11\sqrt{-1})$$

C'est l'acte de naissance des nombres complexes. L'expression $\sqrt{-1}$ apparaît comme un objet absurde qui plus tard s'écrira « i »⁴ (initiale du mot *impossible* et non pas du mot « imaginaire »). On a ainsi $u^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$ et $v^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$ et donc

$$x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

est solution de (E₂). Cette expression n'a que peu d'intérêt et il reste encore à remarquer que

$$(2 - \sqrt{-1})^3 = 8 - 12\sqrt{-1} + 6(\sqrt{-1})^2 - (\sqrt{-1})^3 = 8 - 11\sqrt{-1} - 6 = 2 - 11\sqrt{-1},$$

de sorte que l'on peut choisir $u = 2 - \sqrt{-1}$. De même, en remplaçant $\sqrt{-1}$ par $-\sqrt{-1}$ (là, c'est la notion de conjugué qui pointe son nez), $v = 2 + \sqrt{-1}$ et finalement, $x = u + v = 4$. En écrivant $\sqrt{-1}$, on est allé au bout des calculs de Scipion del Ferro en trouvant la solution évidente 4, le « nombre » $\sqrt{-1}$ disparaissant en fin de parcours et n'ayant donc été qu'un *outil intermédiaire*, sans statut propre.

Bombelli considère alors les « racines carrées de nombres négatifs » comme des nombres *sophistiqués*, des quantités qui n'existent pas mais sur lesquelles les calculs sont néanmoins possibles! Ce nouvel objet $\sqrt{-1}$ effraie et va mettre du temps à s'imposer. Il a fallu attendre longtemps la mise en place du vocabulaire et des notations actuelles : Descartes emploie le mot *imaginaire* en 1637, Euler introduit la notation i en 1777. L'utilisation de ces nombres *impossibles*, « *imaginaires* », tout en continuant d'intriguer de nombreux mathématiciens, se diffuse dans la communauté scientifique. En 1799, le danois Gaspard Wessel propose une interprétation géométrique des nombres imaginaires. Refusant de considérer ces nombres comme « *impossibles* », et poussant plus loin les idées de Wessel, l'allemand Karl-Friedrich Gauss achève au cours des premières années du XIX^e siècle de donner un statut algébrique rigoureux aux nombres imaginaires. Il emploie l'expression *nombre complexe* à leur propos à partir de 1831.

1.1. L'ensemble $\mathbb{C}$

Nous avons démontré dans le cours ALG 1 (sur la théorie des ensembles), le théorème suivant :

Theoreme 3.0. (Corps des nombres complexes).

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ muni de deux opérations notées $+$ et $\times$ telles que :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$. Les opérations $+$ et $\times$ coïncident sur $\mathbb{R}$ avec l'addition et la multiplication usuelles et vérifient les mêmes règles de calcul (les produits et les puissances sont notées comme dans le cas des réels).
- Il existe un élément i de $\mathbb{C}$ tel que $i^2 = -1$. Tout élément z de $\mathbb{C}$ s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + ib$ où a et b sont réels.

Par exemple, sachant que les règles de calcul usuelles sont valables et que $i^2 = -1$:

$$(a + ib) \times (x + iy) = ax + iay + ibx + i^2 by = ax - by + i(ay + bx)$$

Nous avons utilisé ici cinq règles de calcul : la distributivité de $\times$ sur $+$, l'associativité de $+$ et $\times$, la commutativité de $+$ et $\times$. Puisque tout nombre complexe non nul admet un inverse, un produit est nul *si et seulement si* l'un des facteurs est nul.

Les puissances sont définies comme dans $\mathbb{R}$. On rappelle par exemple que $z^{-2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2$ pour $z \in \mathbb{C}^*$.

4. La notation $\sqrt{-1}$ n'est plus utilisée de nos jours car présente des dangers (la formule donnant la racine carrée d'un produit par exemple).

Proposition 3.1. (Règles d'exponentiation).

Rappelons la convention $z^0 = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$.

- a. Pour tous z dans $\mathbb{C}^*$, m et n dans $\mathbb{Z}$, $z^n z^m = z^{m+n}$ et $(z^n)^m = z^{mn}$.
- b. Pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}^*$ et tout n dans $\mathbb{Z}$, $z_1^n z_2^n = (z_1 z_2)^n$.

Par rapport au cas réel, on notera l'apparition d'une seconde identité remarquable de factorisation :

Deux identités remarquables

Pour tous a et b dans $\mathbb{C}$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ et $a^2 + b^2 = (a + ib)(a - ib)$.

Rappelons le vocabulaire usuel sur l'écriture des nombres complexes.

Définition 3.2. Parties réelle et imaginaire

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe un unique (x, y) dans $\mathbb{R}^2$ tel que $z = x + iy$.

- ⇒ Les réels x et y sont notés $\operatorname{Re} z$ et $\operatorname{Im} z$, appelés parties réelle et imaginaire de z .
- ⇒ L'écriture $z = x + iy$ s'appelle la forme algébrique de z .
- ⇒ Les nombres complexes de partie réelle nulle sont appelés les *imaginaires purs*. On note $\mathbb{R}i$ l'ensemble des imaginaires purs.

On déduit des règles de calculs ci-dessus que, pour des réels x, x', y et y' :

$$(x + iy) + (x' + iy') = x + x' + i(y + y')$$

On en déduit immédiatement :

Proposition 3.3. (3.1)

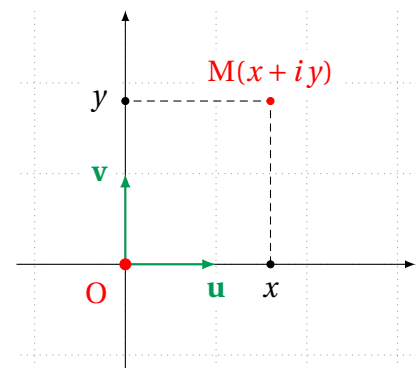
Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\operatorname{Re}(z + z') = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} z'$ et $\operatorname{Im}(z + z') = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} z'$.

Le plan $\mathcal{P}$ est supposé muni d'un repère orthonormé direct noté $\mathcal{R} = (O, \mathbf{u}, \mathbf{v})$.

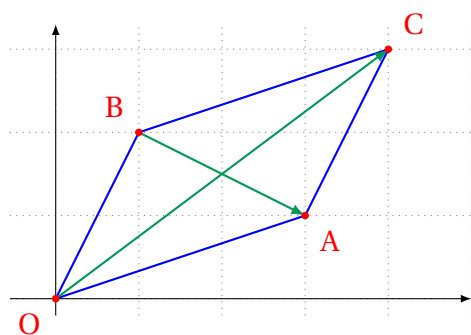
Définition 3.4. Affixe et image

Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$.

- ⇒ On lui associe le nombre $z_M =: x + iy$, appelé affixe de M .
- ⇒ Réciproquement, à tout nombre $z = x + iy$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on associe le point M du plan de coordonnées (x, y) dans $\mathcal{R}$, appelé image de z . On notera $M(z)$ le point d'affixe z .
- ⇒ On définit de même l'affixe d'un vecteur du plan : à tout vecteur $\mathbf{w}$ de coordonnées (x, y) dans la base $(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, on associe le nombre complexe $z_{\mathbf{w}} = x + iy$, appelé affixe de $\mathbf{w}$.



Considérons $a := 3 + i$ et $b := 1 + 2i$. On a $a + b = 4 + 3i$ et $a - b = 2 - i$.



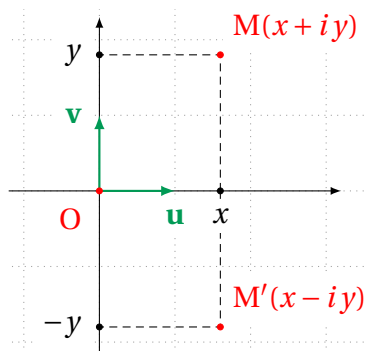
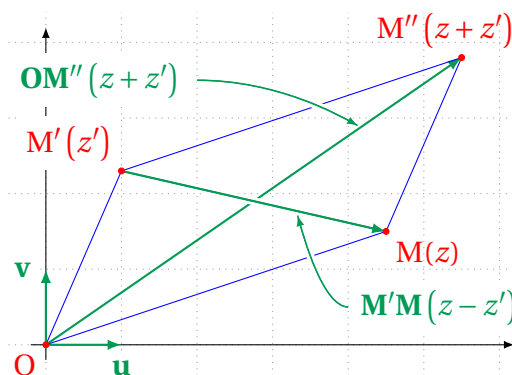
Notons A, B et C les points d'affixes a , b et $a + b$. Les vecteurs $\vec{OC}$ et $\vec{BA}$ sont d'affixes respectives $a + b$ et $a - b$. On observe que le quadrilatère OACB est un parallélogramme.

Ceci vient du fait que C s'obtient *en translatant* A selon le vecteur $\vec{OB}$ car les coordonnées (4,3) de C s'obtiennent en ajoutant à celles de A – c'est-à-dire (3, 1) – celles de $\vec{OB}$ – i.e. (1, 2) –, par définition de l'addition des nombres complexes.

Plus généralement, on retiendra que la somme et la différence de deux nombres complexes s'interprètent géométriquement au moyen d'un parallélogramme.

Avec les notations ci-contre, le quadrilatère OMM''M' est un parallélogramme.

On prouve que l'affixe du vecteur $\vec{M'M}$ est égale au nombre complexe $z - z'$.



Définition 3.5. Conjugaison (§ 3.2)

Soit $z = x + iy \in \mathbb{C}$ où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Le conjugué de z , noté $\bar{z}$, est défini par $\bar{z} := x - iy$.

D'un point de vue géométrique, les points M et M', d'affixes z et $\bar{z}$, sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

L'application de conjugaison définie sur $\mathbb{C}$ par $z \mapsto \bar{z}$ est donc l'expression analytique de la symétrie par rapport à l'axe des réels.

Proposition 3.6. (Propriétés de la conjugaison).

Pour tous nombres complexes z_1 et z_2 ,

$$\text{a) } \overline{\overline{z_1}} = z_1; \quad \text{b) } \overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \quad \text{c) } \overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \overline{z_2}; \quad \text{d) Si } z_2 \neq 0, \frac{1}{\overline{z_2}} = \frac{1}{z_2} \text{ et } \frac{\overline{z_1}}{z_2} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$$

Il découle directement de sa définition que la conjugaison permet de caractériser les réels et les imaginaires purs parmi les nombres complexes :

Proposition 3.7. (Caractérisation des réels et des imaginaires purs).

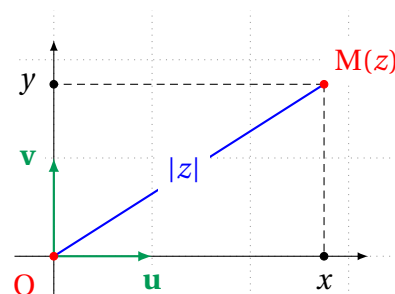
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $z \in \mathbb{R} \iff \bar{z} = z$, et $z \in i\mathbb{R} \iff \bar{z} = -z$.

1.2. Module d'un nombre complexe

Définition 3.8. Module

Le module d'un nombre complexe $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, noté $|z|$, est défini par $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Si M est le point d'affixe z , alors $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \|\mathbf{OM}\| = OM$. De même, si $\mathbf{w}$ est un vecteur d'affixe z , on a $|z| = \|\mathbf{w}\|$.



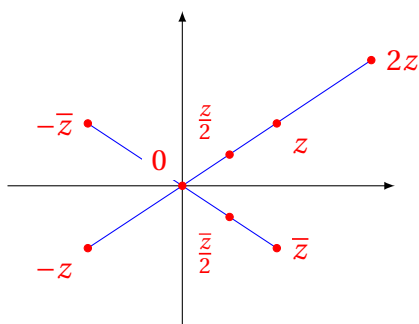
✕ Il est clair que le seul nombre de module nul est 0. De même, tout nombre complexe z a le même module que son conjugué.

✕ La relation $|z|^2 = z\bar{z}$ est utilisée pour déterminer la forme algébrique d'un quotient. Par exemple,

$$\frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{(1-i)(1+i)} = \frac{1+i}{2} \quad \text{et plus généralement} \quad \frac{1}{a+ib} = \frac{1}{a+ib} \times \frac{a-ib}{a-ib} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$$

Proposition 3.9. (Module et multiplication). (3.3)

Pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ et $\forall (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$, $\left| \frac{1}{z_2} \right| = \frac{1}{|z_2|}$ et $\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$.



En particulier, $|-z| = |z|$, $|2z| = 2|z|$ et plus généralement

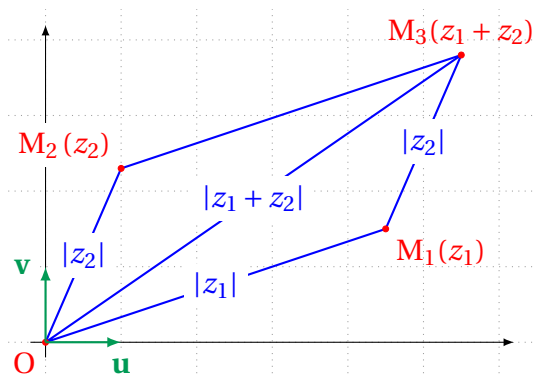
$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, |\lambda z| = |\lambda| |z|$$

où $|\lambda|$ est la valeur absolue du réel λ . On remarquera au passage que le module de λ en tant que nombre complexe est égal à sa valeur absolue en tant que nombre réel, ce qui assure la cohérence de la notation $|\lambda|$.

L'addition brille par son absence : le module d'une somme n'est pas toujours égal à la somme des modules. L'interprétation géométrique est à cet égard fort éclairante. Le chemin le plus court entre deux points étant le segment, on a $OM_3 \leq OM_1 + OM_2$, c'est-à-dire

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

En effet, $M_1 M_3 = OM_2$ puisque $OM_1 M_3 M_2$ est un parallélogramme. Cette propriété géométrique est appelée *inégalité triangulaire*.



On voit également sur cette figure que $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$ si et seulement si les vecteurs $\mathbf{OM}_2$ et $\mathbf{OM}_1$ sont colinéaires de même sens, i.e. $\mathbf{OM}_1 = \mathbf{0}$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\mathbf{OM}_2 = \lambda \mathbf{OM}_1$, ce qui équivaut encore à $z_1 = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z_2 = \lambda z_1$.

Proposition 3.10. (Inégalité triangulaire).

Soit z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$.

- a. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.
- b. De plus, il y a égalité *si et seulement si* $z_1 = 0$ ou $\exists \lambda \in \mathbb{R}_+, z_2 = \lambda z_1$.

✕ Prouvons que, pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$. Soit z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}$.

- ✓ Comme $z_1 = z_1 - z_2 + z_2$, $|z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ par l'inégalité triangulaire et donc $|z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2|$.
- ✓ En appliquant ce qui précède à (z_2, z_1) , on a $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$, d'où

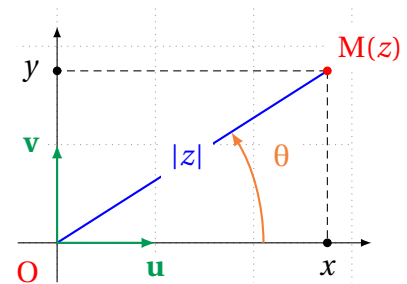
$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2| \quad \text{puisque} \quad |z_2 - z_1| = |z_1 - z_2|$$

1.3. Forme trigonométrique et arguments d'un nombre complexe non nul

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z . En notant θ une mesure de l'angle orienté entre les vecteurs $\mathbf{u}$ et $\mathbf{OM}$, on obtient après projection orthogonale sur les axes :

$$\begin{cases} x = |z| \cos \theta \\ y = |z| \sin \theta \end{cases}$$

Ainsi $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

**Définition 3.11. Exponentielle d'un imaginaire pur**

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $e^{i\theta} := \cos \theta + i \sin \theta$. Cela est cohérent car $\cos 0 + i \sin 0 = 1 = e^0$.

Les expressions du cosinus et du sinus en fonction de l'exponentielle sont souvent utiles. Elles sont connues sous le nom de *formules d'Euler* :

Proposition 3.12. (Formules d'Euler).

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$ et $\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$.

Définition 3.13. Forme polaire ou trigonométrique, argument

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = |z|e^{i\theta}$.

- ⇒ Une telle écriture est appelée forme trigonométrique (on dit aussi forme polaire) de z .
- ⇒ Un tel réel θ est appelé argument de z .
- ⇒ L'unique argument de z appartenant à $] -\pi, \pi]$ est noté $\arg z$, argument principal de z .

En particulier, on retiendra que $-1 = e^{i\pi}$.

Écriture sous forme polaire (3.4)

Pour déterminer la forme polaire de $z \in \mathbb{C}^*$, on commencera par calculer $|z|$ puis on recherchera $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{z}{|z|} = \cos \theta + i \sin \theta$. On se souviendra pour cela des valeurs remarquables (en $\pi/2, \pi/3, \pi/6, \pi/4$, etc.) en s'aidant au besoin du cercle.

✕ Soit $z_1 = i$, $z_2 = 1 + i$ et $z_3 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

✓ On a $|z_1| = 1$, $|z_2| = \sqrt{2}$ et $|z_3| = 1$.

✓ Ainsi $z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$, $z_3 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$.

Proposition 3.14. (Propriétés de l'exponentielle) (3.5)

a. $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2, e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha} e^{i\beta}$; b. $\forall \theta \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \overline{e^{i\theta}}$ et $\forall n \in \mathbb{Z}, e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$.

La deuxième relation est appelée *formule de De Moivre*. On en déduit que l'écriture sous forme polaire d'un nombre complexe est *particulièrement adaptée* au calcul de ses puissances.

✕ Soit $\alpha := \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Déterminons les entiers n tels que $\alpha^n \in \mathbb{R}_+^* i$.

✓ On a $1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $1+i\sqrt{3} = 2 e^{i\frac{\pi}{3}}$ d'où $\alpha = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{3} - i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}}$.

✓ Soit $n \in \mathbb{Z}$. On a $\alpha^n = \sqrt{2}^n e^{i\frac{n\pi}{12}}$. Ainsi $\alpha^n \in \mathbb{R}_+^* i$ si et seulement si $n \frac{\pi}{12} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, ce qui équivaut à $n \equiv 6 [24]$.

L'identification d'un nombre complexe par ses parties réelle et imaginaire admet un analogue polaire, une fois le zéro écarté et en prenant garde au « modulo 2π » pour les arguments :

Proposition 3.15. (Identification de deux formes polaires).

Soit r_1, r_2 dans $\mathbb{R}_+^*$ et θ_1, θ_2 dans $\mathbb{R}$. On a $r_1 e^{i\theta_1} = r_2 e^{i\theta_2} \iff \begin{cases} r_1 = r_2 \\ \theta_1 = \theta_2 [2\pi] \end{cases}$

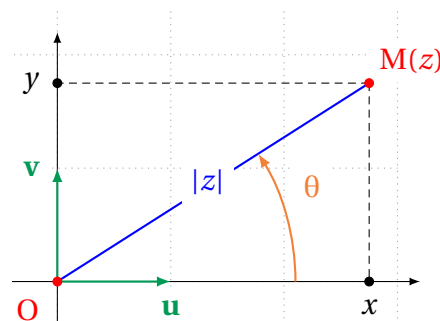
On prendra garde à l'hypothèse de signe sur r_1 et r_2 . Le lecteur méditera les exemples suivants :

$$-e^{2i\pi} = e^{i\pi}, \quad 0 = 0 e^{2i\pi} = 0 e^{i\frac{\pi}{2}}$$

Proposition 3.16. (Propriétés des arguments).

Soit z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}^*$. On note M_1 l'image de z_1 .

- La mesure d'angle $(\mathbf{u}, \mathbf{OM}_1)$ est un argument de z_1 ;
- L'ensemble des arguments de z_1 est $\{\arg z_1 + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$;
- $\arg z_1 z_2 = \arg z_1 + \arg z_2 [2\pi]$;
- $\arg \frac{1}{z_2} = -\arg z_2 [2\pi]$ et $\arg \frac{z_1}{z_2} = \arg z_1 - \arg z_2 [2\pi]$.



1.4. Cercle $\mathbb{U}$, factorisation par angle moitié et prolongement de l'exponentielle à $\mathbb{C}$

L'ensemble $\mathbb{U}$ s'interprète géométriquement comme le cercle trigonométrique.

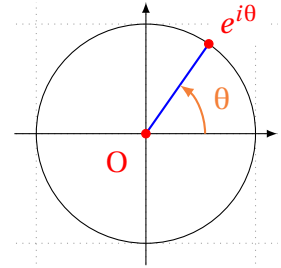
Proposition 3.17. (Description de $\mathbb{U}$).

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$. On a $\mathbb{U} = \{e^{i\theta}; \theta \in \mathbb{R}\}$.

Il faut savoir retrouver les exponentielles « remarquables » :

$$e^{i0} = 1, e^{i\frac{\pi}{6}} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}, e^{i\frac{\pi}{3}} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}, e^{i\frac{\pi}{2}} = i, e^{i\pi} = -1, \text{ etc}$$

Pour tout réel θ , $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \left(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\frac{\theta}{2}}$. Plus généralement :



Factorisation par l'arc moitié (3.6)

Pour p et q dans $\mathbb{R}$, $e^{ip} + e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2 \cos\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$.

✕ Pour $(p, q) \in \mathbb{R}^2$, on a $e^{ip} - e^{iq} = e^{i\frac{p+q}{2}} \left(e^{i\frac{p-q}{2}} - e^{-i\frac{p-q}{2}} \right) = 2i \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) e^{i\frac{p+q}{2}}$ d'où

$$\cos p - \cos q = \operatorname{Re}\left(e^{ip} - e^{iq}\right) = -2 \sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Définition 3.18. Exponentielle complexe

Pour tout z dans $\mathbb{C}$, on pose $e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} e^{i\operatorname{Im}(z)}$.

Cette définition est cohérente (si z est réel ou imaginaire pur, elle recoupe celle de l'exponentielle réelle et la définition 1.3 (cf. page 8).) et c'est le *seul* prolongement de l'exponentielle à l'ensemble $\mathbb{C}$ en une fonction vérifiant $\forall (a, b) \in \mathbb{C}^2, e^{a+b} = e^a e^b$.

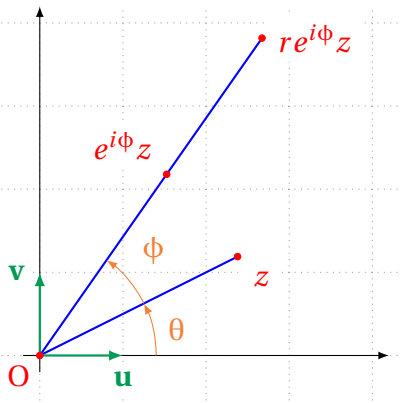
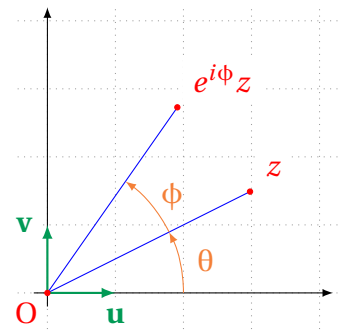
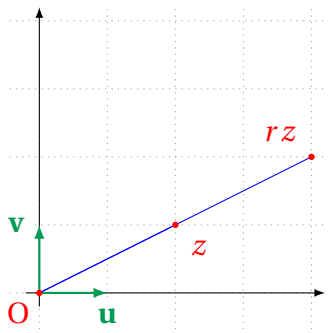
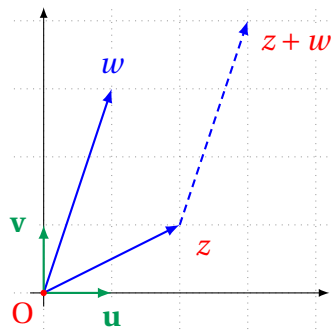
Proposition 3.19. Propriétés de l'exponentielle

$\forall (z, a, b) \in \mathbb{C}^3, e^{a+b} = e^a e^b, e^z \neq 0, 1/e^z = e^{-z}$ et $e^z = 1 \iff z \in 2i\pi\mathbb{Z}$.

2. Nombres complexes et géométrie

2.1. Interprétation géométrique des opérations de $\mathbb{C}$

Comme nous l'avons déjà vu, la somme $z + w$ est l'affixe du translaté du vecteur d'affixe z selon le vecteur d'affixe w .



La multiplication d'un nombre complexe z par un réel r positif a pour résultat un nombre de même argument et de module multiplié par r (d'où la construction géométrique ci-dessus). La multiplication de z par $e^{i\phi}$ n'affecte pas son module mais ajoute ϕ à son argument. En effet, en notant θ un argument de z , on a

$$ze^{i\phi} = |z|e^{i\phi}e^{i\theta} = |z|e^{i(\phi+\theta)}$$

Le point d'affixe $ze^{i\phi}$ s'obtient en appliquant à z la rotation de centre O et d'angle ϕ . La construction générale de zz' où $z' := re^{i\phi}$ s'en déduit aisément (cf. ci-contre).

2.2. Distances et angles

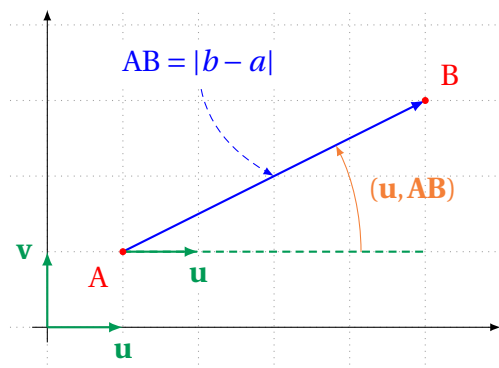
Pour deux vecteurs $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ non nuls, la mesure d'angle orienté entre $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ est notée $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$.

Proposition 3.20. (Distances et angles) (3.7)

Pour tous A, B, C, D de $\mathcal{P}$ d'affixes a, b, c, d :

- L'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est $b - a$ et $AB = |b - a|$.
- Si $A \neq B$, alors $\arg(b - a) = (\mathbf{u}, \overrightarrow{AB}) [2\pi]$.
- Si $A \neq B$ et $C \neq D$, alors

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{d - c}{b - a}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) [2\pi] \quad \text{et} \quad \left|\frac{d - c}{b - a}\right| = \frac{CD}{AB}$$



✕ Déterminons l'ensemble des complexes z tels que $|iz - 1| = |iz + 1|$.

✓ Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme $iz - 1 = i(z + i)$ et $iz + 1 = i(z - i)$, on a

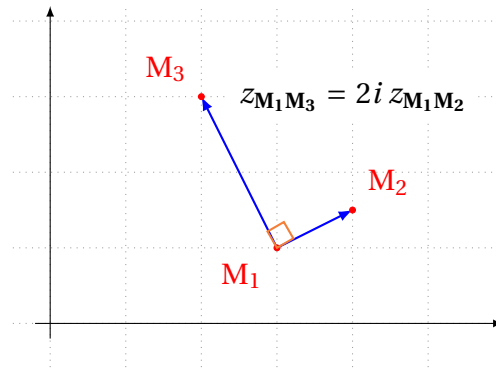
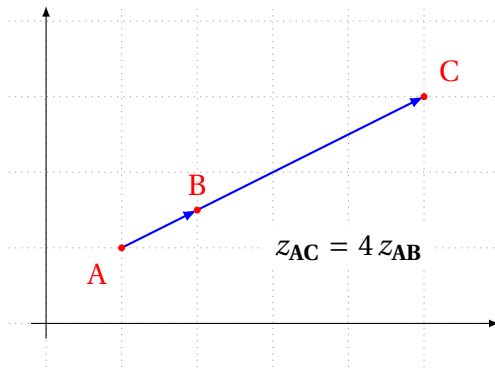
$$\begin{aligned} |iz - 1| = |iz + 1| &\iff |i| \times |z + i| = |i| \times |z - i| \\ &\iff |z + i| = |z - i| \quad \text{car } |i| = 1 \\ &\iff z \text{ est équidistant de } i \text{ et } -i \\ &\iff z \text{ appartient à la médiatrice de } i \text{ et } -i \end{aligned}$$

Puisque cette médiatrice est l'axe réel, l'ensemble des solutions est $\mathbb{R}$.

✓ On peut aussi aborder cet exercice via le calcul analytique. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $z := x + iy$. On a

$$\begin{aligned}
 |iz - 1| = |iz + 1| &\iff |-1 - y + ix| = |1 - y + ix| \\
 &\iff x^2 + (-1 - y)^2 = x^2 + (1 - y)^2 \\
 &\iff 2y = -2y \\
 &\iff y = 0 \quad (\text{on retrouve que l'ensemble des solutions est } \mathbb{R})
 \end{aligned}$$

Il est facile de traduire la colinéarité et l'orthogonalité vectorielles via les affixes :



Colinéarité et orthogonalité

Pour tous vecteurs non nuls $\mathbf{a}$ et $\mathbf{b}$ d'affixes $z_{\mathbf{a}}$ et $z_{\mathbf{b}}$:

$$\Rightarrow \mathbf{a} \perp \mathbf{b} \text{ si et seulement si } \frac{z_{\mathbf{a}}}{z_{\mathbf{b}}} \in i\mathbb{R}; \quad \Rightarrow \mathbf{a} \text{ et } \mathbf{b} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \frac{z_{\mathbf{a}}}{z_{\mathbf{b}}} \in \mathbb{R}.$$

✕ Commençons par les questions d'alignements.

- ✓ Soit A, B et C trois points deux à deux distincts d'affixes a , b et c . Les points A, B et C sont alignés si et seulement si les vecteurs $\mathbf{AB}$ et $\mathbf{AC}$ sont colinéaires, ce qui équivaut encore à

$$\frac{c - a}{b - a} \in \mathbb{R}$$

- ✓ Déterminons l'ensemble $\mathcal{S}$ des $z \in \mathbb{C}$ tels que les points 1, z et z^2 soient alignés.
 - ✦ Afin d'appliquer ce qui précède, on commence par déterminer les $z \in \mathbb{C}$ tels que 1, z , z^2 ne soient pas deux à deux distincts. On trouve facilement les valeurs 0 et 1.
 - ✦ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. On a

$$\begin{aligned}
 1, z \text{ et } z^2 \text{ sont alignés} &\iff \frac{z^2 - 1}{z - 1} \in \mathbb{R} \\
 &\iff z + 1 \in \mathbb{R} \\
 &\iff z \in \mathbb{R}
 \end{aligned}$$

Comme 0 et 1 sont également des solutions, on en conclut que $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

✕ Déterminons les $z \in \mathbb{C}$ tels que le triangle de sommets z , z^2 et z^3 soit rectangle en z .

- ✓ Recherchons les $z \in \mathbb{C}$ tels que les points z , z^2 et z^3 ne sont pas deux à deux distincts. En résolvant successivement les équations $z = z^2$, $z = z^3$ et $z^2 = z^3$, on trouve les solutions 0, 1 et -1 .
- ✓ Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, 0, 1\}$. Notons M_1 , M_2 et M_3 les images de z , z^2 et z^3 . On a

$$\begin{aligned}
z, z^2 \text{ et } z^3 \text{ est rectangle en } z &\iff \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \perp \mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 \\
&\iff \frac{z^3 - z}{z^2 - z} \in i\mathbb{R} \\
&\iff z + 1 \in i\mathbb{R} \quad \text{car } \frac{z^3 - z}{z^2 - z} = \frac{z(z-1)(z+1)}{z(z-1)} \\
&\iff \exists y \in \mathbb{R}, z = -1 + iy
\end{aligned}$$

On reconnaît la droite d'équation $x = -1$.

- ✓ Comme le point d'affixe -1 appartient à cette droite mais n'est pas solution, l'ensemble des solutions est $\{-1 + iy; y \in \mathbb{R}^*\}$.

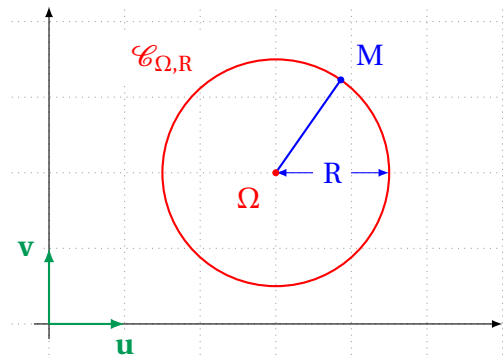
2.3. Cercles

Nous commençons par quelques rappels sur les cercles et leurs équations.

Soit Ω le point de coordonnées (x_0, y_0) et R un nombre réel strictement positif.

Le cercle de centre Ω et de rayon R , noté $\mathcal{C}_{\Omega, R}$, est l'ensemble des points M vérifiant $\Omega M = R$. En notant (x, y) les coordonnées d'un point M du plan, on a donc

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C}_{\Omega, R} &\iff \Omega M^2 = R^2 \\
&\iff (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2
\end{aligned}$$

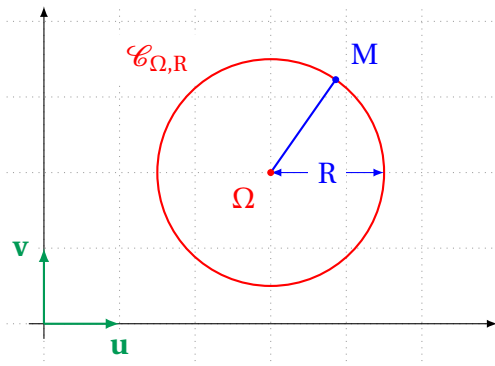


- ✗ Réciproquement, il faut savoir reconnaître l'ensemble $\mathcal{L}$ défini par une équation cartésienne de la forme $x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$ en écrivant sous forme canonique les deux trinômes en x et y :

$$\begin{aligned}
x^2 + y^2 + ax + by + c = 0 &\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4} + c = 0 \\
&\iff \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}
\end{aligned}$$

- ✓ Cas 1 : $a^2 + b^2 - 4c < 0$. On a alors $\mathcal{L} = \emptyset$.
- ✓ Cas 2 : $a^2 + b^2 - 4c = 0$. On a alors $\mathcal{L} = \{\Omega\}$ où Ω est le point de coordonnées $\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}\right)$.
- ✓ Cas 3 : $a^2 + b^2 - 4c > 0$. On a alors $\mathcal{L} = \mathcal{C}_{\omega, R}$ où $R := \sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 4c}{4}}$.

Les nombres complexes, et plus particulièrement la forme trigonométrique, sont très adaptés pour le paramétrage des cercles. Reprenons les notations introduites au début paragraphe.



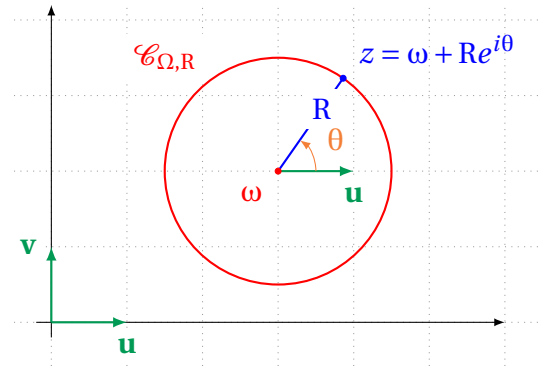
Le point Ω a pour affixe $\omega := x_0 + iy_0$. Pour M d'affixe z , on a

$$\begin{aligned}
M \in \mathcal{C}_{\Omega, R} &\iff |z - \omega| = R \\
&\iff |z - \omega|^2 = R^2 \\
&\iff (z - \omega)(\overline{z - \omega}) = R^2 \\
&\iff (z - \omega)(\bar{z} - \bar{\omega}) = R^2 \\
&\iff |z|^2 - \omega\bar{z} - \bar{\omega}z + |\omega|^2 = R^2 \\
&\iff |z|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{\omega}z) + |\omega|^2 = R^2
\end{aligned}$$

Pour M d'affixe z , on a

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}_{\Omega, R} &\iff |z - \omega| = R \\ &\iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z - \omega = R e^{i\theta} \\ &\iff \exists \theta \in \mathbb{R}, z = \omega + R e^{i\theta} \end{aligned}$$

On retrouve cette expression en translatant le cercle $\mathcal{C}_{O, R}$ selon le vecteur $\mathbf{O}\Omega$ (qui est d'affixe ω).

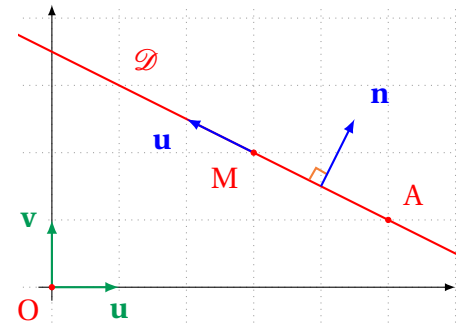


2.4. Droites et demi-plans

Soit A un point et $\mathbf{n}$ un vecteur non nul de coordonnées (x_A, y_A) et (α, β) .

La droite $\mathcal{D}$ passant par A et de vecteur normal $\mathbf{n}$ est l'ensemble des points M du plans tels que $\mathbf{AM}$ et $\mathbf{n}$ soit orthogonaux. En notant $M(x, y)$, on a donc

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \mathbf{AM} \cdot \mathbf{n} = 0 \\ &\iff \alpha(x - x_0) + \beta(y - y_0) = 0 \end{aligned}$$



- ✗ Le vecteur $\mathbf{u}$ de coordonnées $(-\beta, \alpha)$ est dit directeur de la droite $\mathcal{D}$ car un point M appartient à celle-ci *si et seulement si* $\mathbf{AM}$ et $\mathbf{u}$ sont colinéaires.
- ✗ Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $(a, b) \neq (0, 0)$, l'ensemble $\mathcal{L}$ défini par l'équation $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur normal $\mathbf{n}'$ de coordonnées (a, b) .
- ✗ Contrairement au cas des cercles, les nombres complexes n'offrent aucun confort de calcul dans l'étude des droites. Notons n l'affixe de $\mathbf{n}$, a , u celles de A et $\mathbf{u}$.

✓ Pour un point M d'affixe z , on a

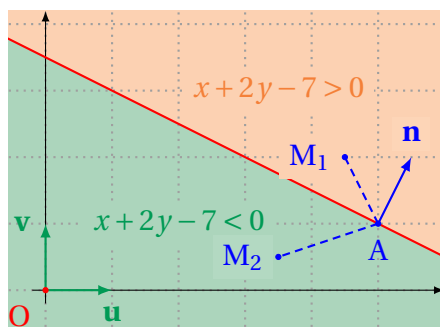
$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \mathbf{AM} \perp \mathbf{n} \\ &\iff \frac{z - a}{n} \in i\mathbb{R} \\ &\iff \frac{z - a}{n} = -\frac{\overline{z - a}}{n} \\ &\iff (z - a)\overline{n} = -(\overline{z} - \overline{a})n \\ &\iff \overline{n}z + n\overline{z} = \overline{n}a + n\overline{a} \end{aligned}$$

d'où une équation cartésienne de $\mathcal{D}$.

✓ On a de même

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{D} &\iff \mathbf{AM} \text{ et } \mathbf{u} \text{ sont colinéaires} \\ &\iff \frac{z - a}{u} \in \mathbb{R} \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{R}, z = a + \lambda u \end{aligned}$$

On obtient alors une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.



Une droite d'équation $ax + by + c = 0$ est la frontière de deux demi-plans ouverts d'inéquations définies par

$$ax + by + c > 0 \quad \text{et} \quad ax + by + c < 0$$

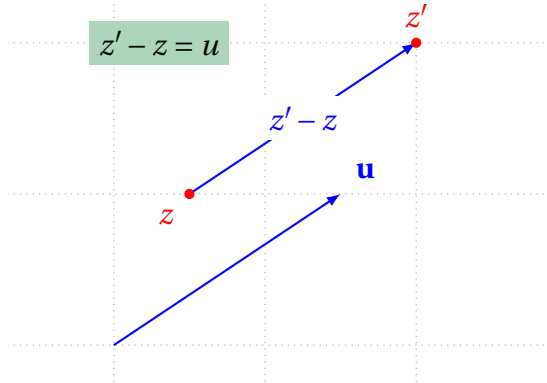
Cela vient du fait que les demi-plans sont définis par les conditions $\mathbf{AM}_1 \cdot \mathbf{n} > 0$ et $\mathbf{AM}_2 \cdot \mathbf{n} < 0$, où A et $\mathbf{n}$ désignent respectivement un point et le vecteur normal de coordonnées (a, b) de la droite.

2.5. Transformations usuelles du plan

Une *transformation* du plan $\mathcal{P}$ est une fonction qui à un point M du plan associe un autre point M' appelé *image* de M. Définir une telle transformation revient à donner l'expression de l'afixe z' de M' en fonction de l'afixe z de M, appelée *expression analytique de la transformation*.

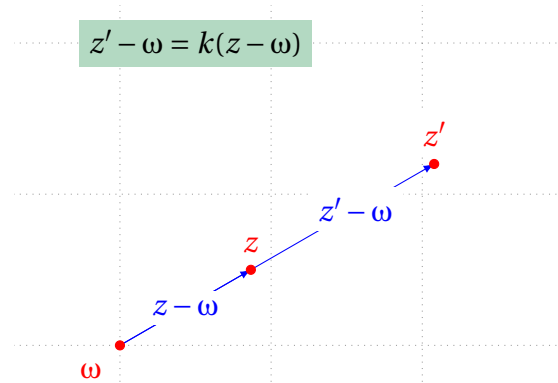
✕ Translation de vecteur $\mathbf{u}$ d'afixe u .

Le point M' est défini par $\mathbf{MM}' = \mathbf{u}$.



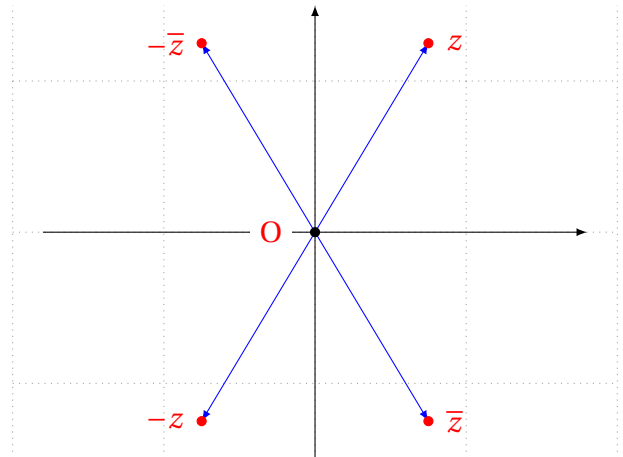
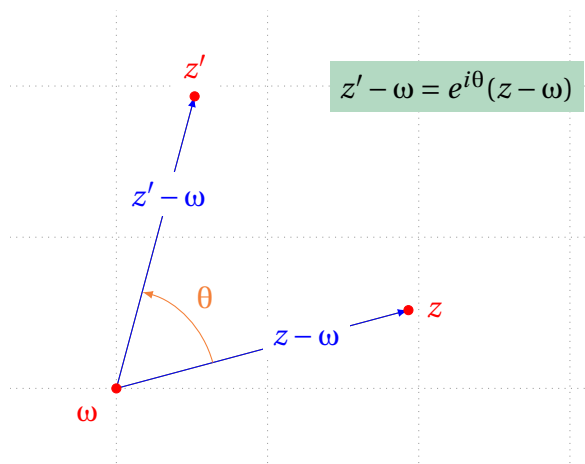
✕ Homothétie de centre Ω et de rapport $k \in \mathbb{R}^*$.

Le point M' est défini par $\mathbf{\Omega M}' = k\mathbf{\Omega M}$.



✕ Rotation de centre Ω d'afixe ω et d'angle θ .

✕ Symétries particulières (cf 3.8)



3. Équations algébriques

3.1. Équations du second degré

Toute équation du second degré se ramène à une équation de la forme $Z^2 = \alpha$ d'inconnue Z . Soient a, b et c trois nombres complexes tels que $a \neq 0$. Pour tout nombre complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a \left(\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right) \quad (*)$$

où $\Delta := b^2 - 4ac$. Cette transformation du trinôme $az^2 + bz + c$ s'appelle *mise sous forme canonique*. En posant $Z := z + b/(2a)$ et $\alpha := \Delta/(4a^2)$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ est équivalente à $Z^2 = \alpha$.

Définition 3.21. Racines carrées d'un nombre complexe

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle racine carrée de α tout nombre complexe z tel que $z^2 = \alpha$.

✕ Tout nombre complexe α non nul admet exactement deux racines carrées.

- ✓ Dans le cas où α est un nombre réel, le calcul des racines carrées de α est direct. Par exemple, $4 = (\pm 2)^2$ et $-3 = (\pm i\sqrt{3})^2$.
- ✓ Passons au cas général. Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$. On a $\alpha = re^{i\theta}$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$. Pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} z^2 = \alpha &\iff z^2 = re^{i\theta} \\ &\iff z^2 - \left(\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)^2 = 0 \\ &\iff \left(z - \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right)\left(z + \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}\right) = 0 \\ &\iff z = \sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \quad \text{ou} \quad z = -\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}} \end{aligned}$$

Comme $\sqrt{r} \neq 0$, on obtient deux solutions distinctes.

✕ Déterminons les racines carrées de $1 + i$ et $3 - 4i$.

- ✓ Comme $1 + i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$, les nombres $\pm\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{8}}$ sont les racines carrées de $1 + i$.
- ✓ Dans le cas où l'argument du nombre n'est pas explicitement connu, on peut trouver ses racines carrées sous forme algébrique. C'est le cas de $3 - 4i$. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 = 3 - 4i &\iff x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i \\ &\iff x^2 - y^2 = 3 \quad \text{et} \quad xy = -2 \end{aligned}$$

On peut alors résoudre la première équation en posant $x' := x^2$ (c'est une équation dite bicarrée) puis en déduire y . On adopte en pratique une méthode plus rapide mais moins naturelle :

$$\begin{aligned} (x + iy)^2 = 3 - 4i &\iff x^2 - y^2 + 2ixy = 3 - 4i \quad \text{et} \quad |(x + iy)^2| = |3 - 4i| \\ &\iff x^2 - y^2 = 3, \quad xy = -2 \quad \text{et} \quad x^2 + y^2 = \sqrt{25} = 5 \\ &\iff x^2 - y^2 = 3, \quad x^2 + y^2 = 5 \quad \text{et} \quad xy = -2 \\ &\iff 2x^2 = 8, \quad 2y^2 = 2 \quad \text{et} \quad xy = -2 \\ &\iff x = \pm 2, \quad y = \pm 1 \quad \text{et} \quad xy = -2 \\ &\iff x + iy = \pm(2 - i) \end{aligned}$$

Explication : on a simplement « ajouté » l'équation $|(x + iy)^2| = |3 - 4i|$, en fait redondante car si $(x + iy)^2 = 3 - 4i$ alors nécessairement $|(x + iy)^2| = |3 - 4i|$. Cette équation superflue a cependant l'avantage de mener à une résolution plus simple : on trouve $x^2 - y^2 = 3$ et $x^2 + y^2 = 5$ qui par somme et différence permet de calculer x et y au signe près, la condition $xy = -2$ permettant de trouver les signes adéquats.

Calcul des racines carrées de $\alpha \in \mathbb{C}^*$

- ⇒ Si $\alpha \in \mathbb{R}$, alors ses racines carrées se calculent directement (cf. plus haut).
- ⇒ Si $\alpha = re^{i\theta}$ avec $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, alors les racines carrées de α sont $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.

$$\Rightarrow \text{Pour } (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x + iy)^2 = \alpha \iff \begin{cases} x^2 - y^2 = \operatorname{Re} \alpha \\ x^2 + y^2 = |\alpha| \\ 2xy = \operatorname{Im} \alpha \end{cases}$$

Les deux premières lignes donnent x^2 et y^2 puis la dernière permet de trouver x et y .

Proposition 3.22. (Résolution des équations du second degré) (3.9)

Soit $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $a \neq 0$. Soit δ une racine carrée du discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ de l'équation $E : az^2 + bz + c = 0$. Les solutions de E sont les nombres $\frac{-b + \delta}{2a}$ et $\frac{-b - \delta}{2a}$.

✕ Résolvons l'équation $iz^2 + (2 + i)z + 2 = 0$.

✓ Le discriminant de ce trinôme vaut $\Delta = (2 + i)^2 - 8i = 3 - 4i = (2 - i)^2$.

✓ On en déduit ses racines : $\frac{-2-i+2-i}{2i} = -1$ et $\frac{-2-i-2+i}{2i} = 2i$.

Proposition 3.23. (Relations coefficients-racines).

Soit $(s, p) \in \mathbb{C}^2$. Deux nombres complexes sont de somme s et de produit p si et seulement si ce sont les solutions de l'équation $z^2 - sz + p = 0$.

3.2. Racines n -ièmes de l'unité

Définition 3.24. Racines n -ième de l'unité

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. On appelle racine n -ième de α tout nombre complexe z tel que $z^n = \alpha$. Lorsque $\alpha = 1$, on emploie plutôt le terme « racine de l'unité ». On note $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C}; z^n = 1\}$.

Proposition 3.24. Description des racines n -èmes de l'unité

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{U}_n = \left\{ e^{2i\frac{k\pi}{n}}; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\} = \left\{ \omega^k; k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \right\}$ où $\omega := e^{2i\frac{\pi}{n}}$.

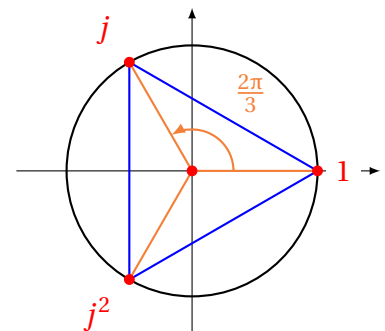
La seule racine première de l'unité est 1. Pour $n = 2$, on retrouve les racines carrées de l'unité qui valent -1 et 1 . Les premières racines n -ièmes de l'unité non-réelles apparaissent à partir de $n = 3$.

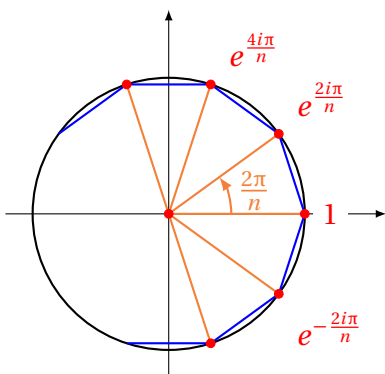
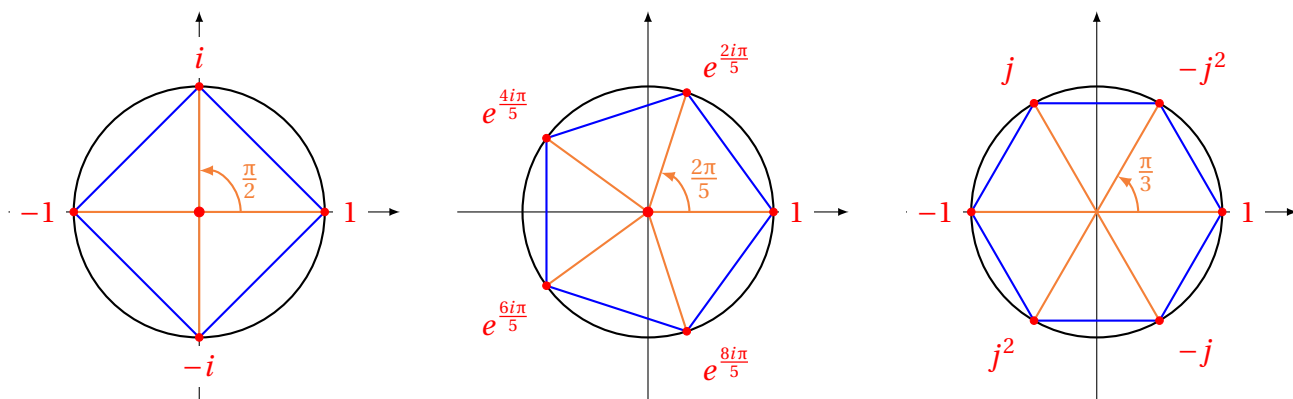
Les racines cubiques de l'unité sont $1, e^{\frac{2i\pi}{3}}, \left(e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^2$ (3.10)

Les images de ces trois nombres forment un triangle équilatéral inscrit dans le cercle trigonométrique.

Définition 3.25. Le nombre j

On note $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$. Les racines cubiques de l'unité sont $1, j$ et j^2 .





Les images $M_0, \dots, M_{n-1}$ des racines n -ièmes de l'unité forment un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle trigonométrique. Posons $\omega := e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

✕ La suite $(\omega^k)_{k \in \mathbb{N}}$ est n -périodique car

$$\forall k \in \mathbb{N}, \omega^{k+n} = \omega^k \omega^n = \omega^k$$

Ainsi $(j^k)_{k \in \mathbb{N}}$ commence par la séquence $1, j, j^2, 1, j, j^2, 1, j$, etc.

✕ Pour $n \geq 2$, la somme des racines n -ièmes de l'unité est nulle :

$$1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{\omega^n - 1}{\omega - 1} = 0 \quad (\text{somme géométrique})$$

✕ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z-1)^n - (z+1)^n = 0$.

✓ Le réel 1 n'étant pas solution de l'équation, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} (z-1)^n - (z+1)^n = 0 &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \frac{z+1}{z-1} = e^{\frac{2ik\pi}{n}} \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, z+1 = e^{\frac{2ik\pi}{n}}(z-1) \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket, \left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)z = 1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}} \quad (\text{équation notée } E_k) \end{aligned}$$

✓ Pour $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, E_k n'admet une unique solution car $e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1 \neq 0$ mais E_0 n'en admet aucune car s'écrit $0 \times z = 2$. Ainsi, les solutions de l'équation initiale sont les nombres de la forme

$$z = \frac{1 + e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1} = \frac{2 \cos \frac{k\pi}{n}}{2i \sin \frac{k\pi}{n}} = -i \cotan \frac{k\pi}{n} \text{ pour } k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$$

Remarque : il n'y a aucune solution si $n = 1$.

✕ On pose $\beta = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $A = \beta + \beta^2 + \beta^4$ et $B = \beta^3 + \beta^5 + \beta^6$. Calculons $A + B$ et AB puis déduisons-en les expressions de A et B à l'aide de radicaux.

✓ Puisque $\beta \neq 1$ et $\beta^7 = 1$, on a

$$A + B = \beta + \dots + \beta^6 = -1 + \beta^0 + \dots + \beta^6 = -1 \quad (\text{somme des racines 7-èmes de l'unité})$$

$$AB = \beta^4 + \beta^6 + \beta^7 + \beta^5 + \beta^7 + \beta^8 + \beta^7 + \beta^9 + \beta^{10}$$

$$= \beta^4 + \beta^6 + 1 + \beta^5 + 1 + \beta + 1 + \beta^2 + \beta^3 \quad (\text{on simplifie les puissances par 7-périodicité})$$

$$= 2 + \beta^0 + \dots + \beta^6 = 2 \quad (\text{somme des racines 7-èmes de l'unité})$$

- ✓ On en déduit que A et B sont les racines de l'équation $z^2 + z + 2 = 0$. Celles-ci sont $\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{2}$. Il faut à présent déterminer le signe de $\text{Im } A$ pour déterminer A et B. On a

$$\text{Im } A = \sin \frac{2\pi}{7} + \sin \frac{4\pi}{7} + \sin \frac{8\pi}{7} = \underbrace{\sin \frac{2\pi}{7} - \sin \frac{\pi}{7}}_{>0} + \underbrace{\sin \frac{4\pi}{7}}_{>0}$$

car $\sin$ est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et positive sur $[0, \pi]$.

3.3. Racines d'un nombre complexe non nul

Abordons plus généralement⁵ l'équation $z^n = \Delta$ où $n \geq 2$ et $\Delta \in \mathbb{C}^*$.

Le principe général est de déterminer une solution particulière, ce qui permet de se ramener aux racines n -èmes.

- ✕ Déterminons les racines cubiques de -1 . Soit $z \in \mathbb{C}$. Comme $z^3 = -1$ équivaut à $z^3 = (-1)^3$ (c'est-à-dire -1 est une solution particulière), on a

$$\begin{aligned} z^3 = -1 &\iff (-z)^3 = 1 \\ &\iff -z \in \mathbb{U}_3 \\ &\iff z \in \{-1, -j, -j^2\} \quad \text{car } \mathbb{U}_3 = \{1, j, j^2\} \end{aligned}$$

- ✕ Calculons à présent les racines quatrièmes de $4i$. On a $4i = 4e^{\frac{i\pi}{2}} = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}\right)^4$. Ainsi, pour $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} z^4 = 4i &\iff z^4 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}\right)^4 \\ &\iff \left(\frac{z}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}}\right)^4 = 1 \\ &\iff \frac{z}{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}} \in \mathbb{U}_4 \\ &\iff z \in \left\{-\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}, \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{8}}, \sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{8}}, -\sqrt{2}e^{\frac{5i\pi}{8}}\right\} \quad \text{car } \mathbb{U}_4 = \{-1, 1, i, -i\} \end{aligned}$$

- ✕ Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^8 + z^4 + 1 = 0$.

- ✓ Soit $z \in \mathbb{C}$. Posons $Z := z^4$. On a

$$\begin{aligned} z^8 + z^4 + 1 = 0 &\iff Z^2 + Z + 1 = 0 \\ &\iff Z = j \text{ ou } Z = j^2 \quad (Z^2 + Z + 1, \text{ de discriminant } -3, \text{ admet pour racines } j \text{ et } j^2) \\ &\iff z^4 = j \text{ ou } z^4 = j^2 \end{aligned}$$

5. On se limite au cas où $\omega \neq 0$ car l'équation $z^n = 0$ n'admet que la solution $z = 0$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

✓ Puisque $j^4 = j^3 \times j = j$, l'équation $z^4 = j$ équivaut à $z^4 = j^4$. Ainsi

$$\begin{aligned} z^4 = j &\iff \left(\frac{z}{j}\right)^4 = 1 \\ &\iff \frac{z}{j} \in \mathbb{U}_4 \\ &\iff z \in \left\{-j, j, -e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{7i\pi}{6}}\right\} \end{aligned}$$

✓ Puisque $j^8 = j^6 \times j^2 = j^2$, l'équation $z^4 = j^2$ équivaut à $z^4 = j^8$. Ainsi

$$\begin{aligned} z^4 = j^2 &\iff \left(\frac{z}{j^2}\right)^4 = 1 \\ &\iff \frac{z}{j^2} \in \mathbb{U}_4 \\ &\iff z \in \left\{-j^2, j^2, -e^{\frac{11i\pi}{6}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\} \end{aligned}$$

✓ L'ensemble des solutions est donc

$$\left\{-j, j, -e^{\frac{7i\pi}{6}}, e^{\frac{7i\pi}{6}}, -j^2, j^2, -e^{\frac{11i\pi}{6}}, e^{\frac{11i\pi}{6}}\right\}$$

Calcul des racines n -ièmes de $\Delta \neq 0$

- ⇒ Rechercher une racine n -ième *particulière* z_0 en écrivant (par exemple) Δ sous forme trigo.
- ⇒ L'équation $z^n = \Delta$ est équivalente à $z^n = z_0^n$, i.e. $\left(\frac{z}{z_0}\right)^n = 1$, i.e. $\frac{z}{z_0} \in \mathbb{U}_n$.
- ⇒ Les racines n -ièmes de Δ sont donc $z_0, z_0\omega, \dots, z_0\omega^{n-1}$ où $\omega := e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

Le lecteur s'entraînera en résolvant les tests (❗ 3.11), (❗ 3.12) et (❗ 3.13)

4. Tests

3.1.

Que pensez-vous de la propriété suivante $\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2, \operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z) \operatorname{Re}(z')$?

3.2.

Établir que, pour tout nombre complexe z ,

$$\text{a. } \operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2} \qquad \text{b. } \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

3.3.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Prouver que $\operatorname{Re} z = |z|$ si et seulement si $z \in \mathbb{R}_+$.

3.4.

Écrire sous forme polaire les nombres $\pm\sqrt{3} \pm 3i$.

3.5.

On pose $j := e^{2i\pi/3}$. Les questions suivantes sont indépendantes : déterminer les entiers n tels que $j^n \notin \mathbb{R}$, calculer un argument de $\alpha = j^2 - j$, exprimer $e^{\pm i\pi/3}$ en fonction de j et j^2 .

3.6.

Écrire sous forme polaire $\alpha = e^{i\pi/4} + e^{7i\pi/5}$ et $\beta = 1 - e^{i\pi/4}$.

3.7.

Déterminer géométriquement l'ensemble des complexes z tels que $|z - 1| = |z + 1 + 3i|$.

3.8.

Donner l'expression analytique de la rotation de centre $A(1)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

3.9.

Résoudre les équations suivantes dans $\mathbb{C}$:

$$\text{a. } z^2 + (-3 + i)z + 4 - 3i = 0; \qquad \text{b. } z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0.$$

3.10.

Exprimer sous forme trigonométrique et algébrique les racines sixièmes de l'unité. Les représenter sur le cercle trigonométrique à la manière des figures de la page 18.

3.11.

Déterminer sous forme polaire les racines sixièmes de j^2 et les représenter.

3.12.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(z - 1)^n + (z + 1)^n = 0$.

3.13.

Soit $\omega \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Montrer que la somme des racines n -ièmes de ω est nulle.

5. Solutions

3.1.

C'est faux : pour $z = z' = i$, $zz' = -1$ donc $\operatorname{Re}(zz') = -1$ mais $\operatorname{Re}(z)\operatorname{Re}(z') = 0$.

3.2.

Écrivons $z = x + iy$ avec x et y dans $\mathbb{R}$. On a $\bar{z} = x - iy$ d'où $2x = z + \bar{z}$ et $2iy = z - \bar{z}$. Ainsi,

$$\operatorname{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

3.3.

Soit $z \in \mathbb{C}$.

⇒ Soit $z \in \mathbb{R}_+$. On a alors $\operatorname{Im} z = 0$ d'où $|z| = |\operatorname{Re} z| = \operatorname{Re} z$.

⇒ Réciproquement, supposons que $\operatorname{Re} z = |z|$. Alors $(\operatorname{Re} z)^2 = |z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$, d'où $\operatorname{Im} z = 0$ et donc $z = \operatorname{Re} z = |z| \in \mathbb{R}_+$.

3.4.

On a

$$\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}e^{i\pi/3}, \quad \sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}e^{-i\pi/3},$$

$$-\sqrt{3} + 3i = 2\sqrt{3}e^{2i\pi/3}, \quad -\sqrt{3} - 3i = 2\sqrt{3}e^{-2i\pi/3}$$

3.5.

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $j^n = e^{2in\pi/3}$ et

$$\begin{aligned} j^n \notin \mathbb{R} &\iff 2n\pi/3 \neq 0[\pi] \\ &\iff 2n \neq 0[3] \\ &\iff n \neq 0[3] \quad (\text{car } 2 \wedge 3 = 1) \end{aligned}$$

⇒ On a $\alpha = -i\sqrt{3}$, donc $\arg(z) = -\pi/2$.

⇒ On a $e^{i\pi/3} = -j^2$ et $e^{-i\pi/3} = -j$.

3.6.

Factorisons par l'angle moitié :

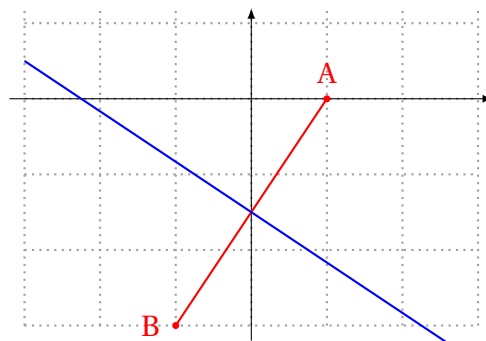
$$\begin{aligned} \alpha &= 2 \cos\left(\frac{23\pi}{40} + \pi\right) e^{33i\pi/40 + i\pi} \\ &= 2 \cos\left(\frac{63\pi}{40}\right) e^{73i\pi/40} \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{>0} \end{aligned}$$

De même, on écrit que

$$\begin{aligned} \beta &= e^{i\pi/8}(e^{-i\pi/8} - e^{i\pi/8}) \\ &= -2i \sin(\pi/8) e^{i\pi/8} = \underbrace{2 \sin(\pi/8)}_{>0} e^{-3i\pi/8} \end{aligned}$$

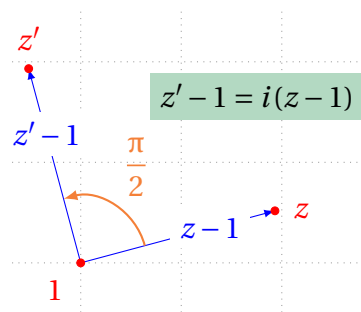
3.7.

Soit A et B les points d'affixes 1 et $-1 - 3i$. Soit $z \in \mathbb{C}$, $|z - 1| = |z + 1 + 3i|$ si et seulement si l'image M(z) de z vérifie AM = BM, i.e. M appartient à la médiatrice de [AB].



3.8.

Une petite figure comme support :



On trouve bien-sûr $z \mapsto z' = 1 + i(z - 1)$.

3.9.

a. Le discriminant vaut $-8 + 6i = (1 + 3i)^2$. Les deux racines sont $1 - 2i$ et $2 + i$.

b. Il s'agit de calculer les racines 4-ièmes de $-2 + i\sqrt{12} = 4e^{i2\pi/3}$. Comme les racines quatrièmes de 1 sont 1, -1 , i et $-i$, ce sont

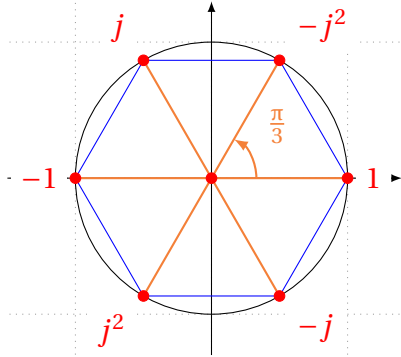
$$\pm\sqrt{2}e^{i\pi/6} \quad \text{et} \quad \pm i\sqrt{2}e^{i\pi/6}$$

3.10.

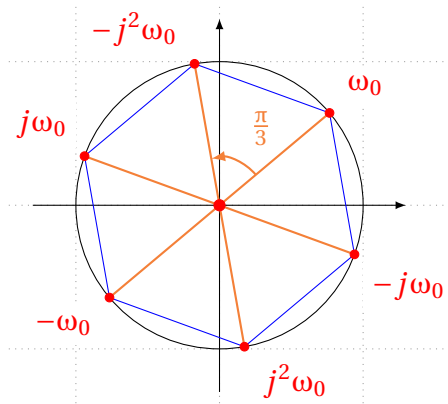
Les racines sixièmes de 1 sont les nombres de la forme $e^{ik\pi/3}$ pour $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$:

$$1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, -1, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

On reconnaît 1, $-j^2$, j , -1 , j^2 et $-j$.

3.11.

Comme $j^2 = e^{4i\pi/3}$, $\omega_0 := e^{2i\pi/9}$ est une racine sixième de j^2 . Les racines sixièmes de 1 étant égales aux $(-j)^k$ pour $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, les racines sixièmes de j^2 sont les nombres $\omega_0(-j)^k$ pour $k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$.

3.12.

Puisque 1 n'est pas solution, on a pour tout $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} (z-1)^n + (z+1)^n &= 0 \iff 1 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = 0 \\ &\iff \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^n = -1 \\ &\iff \left(e^{-i\pi/n} \frac{z+1}{z-1}\right)^n = 1 \end{aligned}$$

Un nombre z est donc solution *si et seulement si* il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que

$$\frac{z+1}{z-1} = e^{(2k+1)i\pi/n}$$

i.e. $(1 - e^{(2k+1)i\pi/n})z = -(1 + e^{(2k+1)i\pi/n})$. À $k \in \mathbb{Z}$ fixé, $e^{(2k+1)i\pi/n} \neq 1$ car $e^{(2k+1)\pi/n}$ est une racine n -ième de -1 . Les solutions sont donc les nombres de la forme (modulo un passage à l'angle moitié) :

$$-\frac{1 + e^{(2k+1)i\pi/n}}{1 - e^{(2k+1)i\pi/n}} = -i \cotan((2k+1)\pi/n)$$

où $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$.

3.13.

Posons $\alpha := e^{2i\pi/n}$ et notons ω_0 une racine n -ième de ω . On sait que les racines n -ièmes de ω sont les nombres $\omega_0 \alpha^k$ pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Il suffit de remarquer que la somme des racines n -èmes de l'unité est nulle.