ALG 4 | Calculs algébriques

Ce chapitre est dédié aux techniques calculatoires fondamentales en Algèbre : sommes, produits et coefficients binomiaux.

L'École d'Athènes, Raphaël

Les notations + et × sont apparues entre le XVe et le XVIIe siècle. Les lettres p et m (initiales de *piu* – plus – et *meno* – moins) utilisées pour l'addition et la soustraction disparurent peu à peu au XVIe siècle, laissant la place aux notations + et – introduites par Johann Widmann en 1489.

François Viète

Les signes = et $>, <$ se sont imposés en Angleterre dans les travaux de Robert Recorde et Thomas Harriot au XVIe siècle avant d'être adoptés par l'ensemble de l'Europe. William Oughtred employa le signe × pour la multiplication au XVIIe siècle. Leibniz préféra utiliser · pour noter les produits, le symbole × pouvant être confondu avec l'inconnue x. François Viète fut à l'origine de l'emploi des lettres a, b, c pour les inconnues (vers 1591). René Descartes fixa la notation algébrique moderne en utilisant les lettres a, b, c, etc., pour les constantes ou les données d'un problème en réservant x, y, z, etc., pour les inconnues. Descartes fut l'inventeur de la notation exponentielle des puissances : a^2, a^3, etc.

Euler est à l'origine de la notation des sommes à l'aide du symbole Σ. La paternité du symbole Π pour signifier *produit* est très controversée. Certains historiens l'attribuent à Carl Friedrich Gauss au XVIIIe siècle alors que d'autres remontent au XVIIe siècle en la personne de René Descartes.

On connaît mal les origines du triangle dit de *Pascal*. Bien avant les travaux du savant français, il était déjà connu et utilisé par les mathématiciens persans, chinois et ceux du Maghreb. En Europe, il apparaît dans l'ouvrage de Peter Apian, *Rechnung*, en 1527. Il est étudié par Michael Stifel, Tartaglia et François Viète. C'est d'ailleurs sous le nom de « *triangle de Tartaglia* » qu'il est connu en Italie. Blaise Pascal lui consacre un ouvrage en 1654, le *Traité du triangle arithmétique*, où il démontre 19 de ses propriétés. Ces dernières étaient pour la plupart connues mais peu avaient été prouvées.

Blaise Pascal

1. Calculer avec le symbole Σ

L'écriture d'une somme telle que $1+2+\cdots+n$ au moyen des trois points $\cdots$ – qui signifient « *et ainsi de suite* » – a ses limites. Par exemple, lors de calculs de sommes de sommes, l'utilisation des $\cdots$ se soldera immanquablement par des ambiguités, voire des confusions.

Le symbole Σ – « on prononce sigma » – est un outil incontournable pour manipuler les sommes avec précision et rigueur.

Notation 4.0. Symbole Σ (ϟ 4.1)

Soit m et n des entiers naturels tels que $m \leqslant n$ et $u_m, \ldots, u_n$ dans $\mathbb{C}$.

⇛ On pose $\displaystyle\sum_{j\in[\![m,n]\!]} u_j := u_m + u_{m+1} + \cdots + u_n$ aussi noté $\displaystyle\sum_{j=m}^{n} u_j$.

⇛ Généralisation : soit J un ensemble fini d'éléments et $(u_j)_{j\in J}$ des complexes indexés par J.

$$\text{On note } \sum_{j\in J} u_j \quad \text{la somme de tous les } u_j \text{ pour } j \text{ parcourant J}$$

Par exemple, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on écrira $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ au lieu de $1+2+\cdots+n$.

Notion d'indice muet

⇛ La valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\ell=0}^{n} u_\ell$ ne dépend que de n (mais pas de k).

⇛ Pour $m \leqslant n$, la somme $\sum_{k=m}^{n} u_k$ comporte $n-m+1$ termes.

Les règles suivantes sont très naturelles (elles sont d'usage courant lorsque J comporte deux éléments) et se démontrent facilement par récurrence sur le cardinal de J.

Proposition 4.1.

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, J fini, $(a_j)_{j\in J}$ et $(b_j)_{j\in J}$ des nombres complexes indexés par J.

a. $\sum_{j\in J}(a_j+b_j) = \sum_{j\in J} a_j + \sum_{j\in J} b_j$

b. $\sum_{j\in J}(\lambda a_j) = \lambda \sum_{j\in J} a_j$

c. $\overline{\sum_{j\in J} a_j} = \sum_{j\in J} \overline{a_j}$

d. $\mathrm{Re}\left(\sum_{j\in J} a_j\right) = \sum_{j\in J} \mathrm{Re}\, a_j$

e. $\mathrm{Im}\left(\sum_{j\in J} a_j\right) = \sum_{j\in J} \mathrm{Im}\, a_j$.

✘ On déduit des deux dernières règles que, pour tout nombre réel θ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right) \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \sin(k\theta) = \mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right)$$

✘ Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$, on a $\overline{\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}} = \sum_{k=0}^{n} e^{-ik\theta}$.

1.1. Changement d'indice

Une somme possède de nombreuses écritures à l'aide du symbole Σ. Ainsi

$$S = 6+8+10+12+\cdots+28 = \sum_{k=3}^{14} 2k = \sum_{k=2}^{13}(2k+2) = \sum_{k=4}^{15}(2k-2)$$

Plus généralement, il est courant de procéder à des changements d'indices dans une somme.

Changement d'indice

Soit un ensemble J fini, $(a_j)_{j\in J}$ une famille de nombres complexes indexés par J.

⇛ Pour toute bijection $\phi : K \to J$, on a $\sum_{j\in J} a_j = \sum_{k\in K} a_{\phi(k)}$.

⇛ On dit que l'on a effectué le changement de variable $j = \phi(k)$ dans la somme $\sum_{j\in J} a_j$.

✘ Parmi tous les changements de variables, deux types se distinguent par leur fréquence dans les démonstrations mathématiques :

- ✔ Les translations d'indice (↯ **4.2**). Par exemple,

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{\ell=1}^{n+1} u_\ell = \sum_{k=1}^{n+1} u_k$$

  En pratique, on se contente de rédiger ainsi : en posant $\ell := k+1$, on trouve que etc.

- ✔ Les symétries. Par exemple, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n} u_{n-k}$. On somme les termes « *à l'envers* ».

✘ Tout autre type de changement de variable devra être explicité et justifié (bijectivité de ϕ).

1.2. La simplification par télescopage

Nous allons à présent aborder une autre formule très usuelle, la simplification par télescopage. Commençons par un calcul *informel* :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) &= u_0 - u_1 + u_1 - u_2 + u_2 - \cdots + \cdots + \cdots - u_{n-1} + u_{n-1} - u_n + u_n - u_{n+1} \\ &= u_0 - u_{n+1}\end{aligned}$$

Ce calcul assez évident peut être justifié par récurrence sur n ou via un changement d'indice :

$$\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=0}^{n} u_{k+1} = \sum_{k=0}^{n} u_k - \sum_{k=1}^{n+1} u_k = u_0 - u_{n+1}$$

Simplification par télescopage dans une somme

Plus généralement, pour $p \leqslant q$, $\displaystyle\sum_{k=p}^{q}(u_{k+1} - u_k) = u_{q+1} - u_p$.

Une simplication par télescopage ne nécessite aucune justification spécifique.

✘ Calculons $\mathrm{S}_n := \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \times k!$ à l'aide d'un télescopage pour $n \in \mathbb{N}$.

- ✔ Un télescopage apparaît en utilisant l'astuce suivante, qualifiée de « *one trick* » dans les pays anglo-saxons : $k = k+1-1$ pour $k \in \mathbb{N}$.
- ✔ On a en effet

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n}(k+1-1)\times k! = \sum_{k=0}^{n}\big((k+1)\times k! - k!\big) = \sum_{k=0}^{n}\big((k+1)! - k!\big) = (n+1) - 0! = (n+1)! - 1$$

✘ Continuons par $\sigma_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- ✔ Un télescopage apparaît en remarquant que $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
- ✔ On a alors pour $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Le lecteur tirera profit des tests (↯ **4.3**)et (↯ **4.4**)

1.3. Sommation par paquets

Nous refermons se paragraphe sur une dernière technique sommatoire usuelle : le regroupement par paquets. Par exemple,

$$1+2+3+4+5+6+7+8 = \sum_{k=1}^{8} k = \sum_{p=1}^{4} s_p \quad \text{où} \quad s_p = 2p-1+2p$$

Plus généralement,

$$\sum_{k=1}^{2n} u_k = (u_1+u_2)+\cdots+(u_{2n-1}+u_{2n}) = \sum_{p=1}^{n} \underbrace{(u_{2k-1}+u_{2k})}_{\text{un « \textit{paquet} »}}$$

✗ Simplifions $\mathrm{S}_n := \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

- ✔ L'examen des premiers termes nous oriente vers une sommation par paires de termes consécutifs :

$$\mathrm{S}_n = \underbrace{-1+2}_{1}\underbrace{-3+4}_{1}\underbrace{-5+6}_{1}+\cdots$$

- ✔ On a $\mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k = \sum_{p=1}^{n} \big(-(2p-1)+2p\big) = \sum_{p=1}^{n} = p$.

On peut énoncer une formule plus générale au moyen de la notion de partition, qui formalise le fait de « *découper en paquets disjoints d'indices* » un ensemble J :

Sommation par paquets

Plus généralement, pour toute partition $\{\mathrm{J}_1,\ldots,\mathrm{J}_m\}$ de J ensemble fini, on a

$$\sum_{j\in \mathrm{J}} a_j = \sum_{p=1}^{m} \sum_{j\in \mathrm{J}_p} a_j \quad (p \text{ désigne l'indice du « \textit{paquet} »})$$

✗ Comme nous l'avons vu au travers des exemples précédents, la partition la plus courante est celle fondée sur la parité des indices :

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ pair}}} u_k + \sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!] \\ k \text{ impair}}} u_k = \sum_{0\leqslant 2\ell\leqslant n} u_{2\ell} + \sum_{0\leqslant 2\ell+1\leqslant n} u_{2\ell+1} = \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} u_{2\ell} + \sum_{\ell=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2}\rfloor} u_{2\ell+1}$$

Il faut maîtriser ces trois expressions.

- ✔ Dans la première, les sommes portent respectivement sur les indices k pairs et impairs compris entre 0 et k.
- ✔ La deuxième forme est plus explicite : on somme les termes de la forme $u_{2\ell}$ tels que $0\leqslant 2\ell\leqslant n$ puis ceux de la forme $u_{2\ell+1}$ tels que $0\leqslant 2\ell+1\leqslant n$.
- ✔ Enfin, la troisième et dernière expression est encore plus explicite en remarquant que les nombres pairs compris entre 0 et n sont exactement de la forme

$$2\ell \quad \text{avec} \quad 0\leqslant \ell\leqslant \left\lfloor \frac{n}{2}\right\rfloor$$

où $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière d'un réel x, i.e. le plus grand des entiers inférieurs ou égaux à x.

2. Sommes arithmétiques et géométriques

- Pour calculer $S := 1+2+\cdots+33$, on peut exploiter que les termes additionnés sont *en progression arithmétique de raison* 1. En regrouppant dans la somme 2S les termes par paquets de deux de la façon suivante
$$2S = \boxed{1} + \boxed{2} + \boxed{3} + \cdots + 33 + 1 + 2 + \cdots + \boxed{31} + \boxed{32} + \boxed{33}$$
on obtient 33 paquets de même somme 34. D'où $2S = 33 \times 44$ puis $S = 33 \times 22$. Nous allons donner une version plus formelle de cette démonstration dans ce qui suit.

- Soit $n \in \mathbb{N}$ et $S_n := \sum_{k=0}^{n} k$. Par une symétrie sur les indices, on a $\sum_{k=0}^{n} (n-k)$ d'où
$$2S_n = \sum_{k=0}^{n} k + \sum_{k=0}^{n} (n-k) = \sum_{k=0}^{n} (k+n-k) = \sum_{k=0}^{n} n = n(n+1) \quad \text{ainsi } S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

- Dans le cas général d'une progression arithmétique de raison r :
$$\begin{tikzcd} u_p \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{p+1} \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{p+2} & \cdots & u_{p+n-1} \arrow[r, bend left, "+r"] & u_{p+n} \\ u_{p+n} \arrow[r, bend right, "-r"'] & u_{p+n-1} \arrow[r, bend right, "-r"'] & u_{p+n-2} & \cdots & u_{p+1} \arrow[r, bend right, "-r"'] & u_p \end{tikzcd}$$
On regroupe en $n+1$ paquets de somme constante

On a donc $2S = (n+1)(u_p + u_{p+n})$ où $S := u_p + \cdots + u_{p+n}$.

Sommes arithmétiques

Somme des termes conséc. d'une suite arith. = nbre de terme(s) $\times \dfrac{\text{premier terme } + \text{dernier terme}}{2}$

Le lecgeur est renvoyé aux tests (↯ **4.5**) et (↯ **4.6**).

Passons au cas des sommes géométriques, plus riche d'applications.

- Soit $r \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}$. Posons $S := \sum_{k=p}^{p+n} q^k$.
  - Si $r = 1$, alors $S = n+1$.
  - Supposons $r \neq 1$. Par télescopage, on a
  $$rS - S = \sum_{k=p}^{p+n} r^{k+1} - \sum_{k=p}^{p+n} r^k = \sum_{k=p}^{p+n} \left(r^{k+1} - r^k\right) = r^{p+n+1} - r^p$$
  Ainsi, lorsque $r \neq 1$, on a $S = r^p \dfrac{r^{n+1}-1}{r-1}$.

Plus généralement, on retiendra que :

Sommes géométriques (↯ **4.7**)

La somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\neq 1$ est donnée par :

$$\text{premier terme} \times \frac{\text{raison}^{\text{nombre de termes}} - 1}{\text{raison} - 1}$$

✘ Écrivons sous forme algébrique $s := (1-i)^{13} + (1-i)^{14} + \cdots + (1-i)^{28}$.

- ✔ On commence par trouver une écriture explicite : $s = \sum_{k=13}^{28} (1-i)^k$.
- ✔ Comme $1 - i n^{\text{o}} = 1$, on en déduit que

$$s = (1-i)^{13} \times \frac{(1-i)^{16}-1}{1-i-1} = -2^6(1-i) \times \frac{2^8-1}{-i} = -2^6\big(2^8-1\big)(1+i)$$

car $(1-i)^2 = -2i$, $(1-i)^4 = -2^2$ et $(1-i)^8 = 2^4$.

✘ Calculons la somme $\mathrm{C}_n := \sum_{k=0}^{n} \cos(k\alpha)$ pour $(n,\alpha) \in \mathbb{N} \times \mathbb{R}$.

- ✔ On a $\mathrm{C}_n = \operatorname{Re} \sigma_n$ où $\sigma_n := \sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}$. L'intérêt est que σ_n est une somme géométrique.
- ✔ Cas 1 : $\theta = 0\,[2\pi]$. On a directement $\mathrm{C}_n = n+1$.
- ✔ Cas 2 : $\theta \neq 0\,[2\pi]$. Comme $e^{i\theta} \neq 1$, on a

$$\sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^k = \frac{\left(e^{i\theta}\right)^{n+1}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{e^{i(n+1)\theta}-1}{e^{i\theta}-1} = \frac{2i\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{2i\sin\frac{\theta}{2}} \times \frac{e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}}{e^{i\frac{\theta}{2}}} = \frac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\, e^{\frac{in\theta}{2}}$$

Ainsi $\mathrm{C}_n = \operatorname{Re}\sigma_n = \dfrac{\sin\frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} \cos\dfrac{n\theta}{2}$.

Le lecteur est renvoyé aux tests (↯ **4.8**) et (↯ **4.9**) pour s'entraîner.

La formule de factorisation suivante peut être vue comme une généralisation de la formule des sommes géométriques

$$r^n - 1 = (r-1)\sum_{k=0}^{n-1} r^k \quad \text{pour } r \neq 1 \text{ et } n \in \mathbb{N}^*$$

Proposition 4.2. Formule de factorisation

Pour tous $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

On mémorisera facilement cette factorisation en se souvenant qu'elle s'obtient en additionnant tous les termes de la forme $a^k b^\ell$ avec $k + \ell = n-1$. Ainsi :

$$a^7 - b^7 = (a-b)\big(a^6 + a^5 b + a^4 b^2 + a^3 b^3 + a^2 b^4 + ab^5 + b^6\big) \qquad (\text{↯ } \mathbf{4.10})$$

3. Les sommes doubles

En Mathématiques, les tableaux de nombres sont appelés *matrices*. Voici l'exemple d'une matrice notée A à 2 lignes et 3 colonnes :

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 1 & -8 & 3 \end{pmatrix}$$

Une matrice A à n lignes et p colonnes est définie par la donnée de ses $n \times p$ coefficients notés, par exemple, $a_{i,j}$ pour $i \in [\![1,n]\!]$ et $j \in [\![1,p]\!]$. La convention est la suivante[1] : $a_{i,j}$ est le coefficient se trouvant sur la i-ème ligne en partant du haut et la j-ième colonne en partant de la gauche.

Ainsi, une matrice à 3 lignes et à 5 colonnes est de la forme :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & a_{1,5} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & a_{2,5} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & a_{3,5} \end{pmatrix}$$

Dans ce paragraphe, nous allons nous intéresser à des sommes dont les termes sont repérés par deux indices, i.e. sont extrait d'une matrice. Par exemple :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{pmatrix}$$

Somme de tous les coefficients de la matrice

$$\mathrm{S} = \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]} a_{i,j} \quad \text{aussi notée} \quad \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} \quad \text{ou, si } n=p, \quad \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{pmatrix}$$

Plus généralement pour un sous-ensemble Δ de $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, la somme des termes d'indices i et j tels que $(i,j) \in \Delta$ s'écrit

$$\mathrm{S} = \sum_{(i,j)\in\Delta} a_{i,j} \qquad \left(\begin{array}{l} \mathrm{S} = a_{1,1} + a_{3,1} + a_{2,3} + a_{4,2} \\ \Delta = \{(1,1),(3,1),(2,3),(4,2)\} \end{array} \ \text{ci-contre} \right)$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

Très souvent, on adopte une notation plus souple en indiquant sous le signe somme les conditions sur les indices i et j définissant l'ensemble Δ

$$\mathrm{S} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{(i,j)\in\Delta} a_{i,j} \quad \text{où} \quad \Delta := \left\{(i,j)\in\mathbb{N}^2 \,;\, 1\leqslant i\leqslant j\leqslant n\right\}$$

On adapte ces notations aux sommes indexées sur un produit cartésien $\mathrm{I}\times\mathrm{J}$:

Notation 4.3. Sommes doubles

La somme des nombres complexes $u_{\ell,k}$ indexés par $(\ell,k)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}$ est notée

$$\sum_{(\ell,k)\in\mathrm{I}\times\mathrm{J}} u_{\ell,k}\,; \text{ plus généralement pour un sous-ensemble } \Delta \text{ de } \mathrm{I}\times\mathrm{J} \ : \quad \sum_{(\ell,k)\in\Delta} u_{\ell,k}$$

1. On adaptera sans peine cette représentation au cas où les indices i et j prennent la valeur 0, le seul effet étant un décalage de la numérotation des lignes des colonnes : la colonne repérée par l'indice $j = 3$ sera la quatrième, etc.

On peut également écrire sous le signe somme des conditions sur les indices.

Dans le cas des matrices, les ensembles I et J sont des intervalles d'entiers du type $[\![1,n]\!]$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour calculer une somme double, on peut regrouper ses termes par paquets.

- On peut par exemple additionner les coefficients dans chacune des lignes puis sommer le tout, ou procéder de même avec les colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \\ a_{5,1} & a_{5,2} & a_{5,3} & a_{5,4} \end{pmatrix}$$

$$\sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} a_{i,j}$$

Somme des termes de la ligne i
Idem pour la colonne j

- Traitons à présent le cas de la somme $\mathrm{S} := \displaystyle\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n} a_{i,j}$.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{S} = \sum_{i=2}^{n}\sum_{j=i+1}^{p} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$$

Somme des termes sur la ligne i
Idem pour la colonne j

Détaillons un peu ces expressions.

- Le calcul en lignes.
  - On détermine les valeurs extrémales de i en fonction de n : au minimum 2 et au maximum n.
  - Ensuite, à i fixé dans $[\![2,n]\!]$, on détermine les valeurs extrémales de j en fonction de i : au minimum 1 et au maximum $i-1$.
  - Dans les deux cas, on a utilisé les inégalités $1 \leqslant j < i \leqslant n$. On en déduit $\mathrm{S} = \displaystyle\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}$.
- Le calcul en colonnes.
  - Les valeurs extrémales de j en fonction de n sont 1 et $n-1$. Puis, à j fixé dans $[\![1,n-1]\!]$, on calcule les valeurs extrémales de i en fonction de j : au minimum $j+1$ et au maximum n.

Le passage d'une somme en lignes à une somme en colonnes s'appelle une interversion.

Effectuer une interversion dans une somme double (↯ 4.11)

Pour une interversion dans une somme double, il est plus simple de l'écrire d'abord au moyen d'un seul Σ :

$$\sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}$$

On retiendra que tout est contenu dans les inégalités $1 \leqslant i < j \leqslant n$. Par exemple, i peut prendre la valeur 1 et vaut au maximum $n-1$(car pour $j = n$, i peut prendre la valeur $n-1$). De plus, à i fixé, j varie de $i+1$ à n car $i < j \leqslant n$ équivaut à $i+1 \leqslant j \leqslant n$ puisque j est un entier.

Une interversion peut « *débloquer* » un calcul mal engagé.

- Simplifions $\mathrm{S}_n := \displaystyle\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} \frac{i}{j}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\mathrm{S}_n = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} = \sum_{i=1}^{n} i \sum_{j=i}^{n} \frac{1}{j} \quad \text{car } i \text{ est une constante dans la somme sur l'indice } j$$

  L'absence dans notre cours d'une formule pour une somme d'inverses d'entiers consécutifs nous poussent à changer de point de vue :

$$\mathrm{S}_n = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{j} \times \frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{(2+n+1)n}{4} = \frac{n(n+3)}{4}$$

  par la formule des sommes arithmétiques.

Revenons un instant à l'idée de sommer par paquets. Le choix de ceux-ci dépend fortement du contexte (cf. l'exemple-dessus de S_n où il était plus simple de sommer par paquets de lignes). On peut bien-sûr varier le type de « paquets ».

- Reprenons le calcul de la somme S (cf. les exemples initiaux ci-dessus) en regroupant selon les diagonales.

$$\begin{array}{l} \\ k=1 \\ k=2 \\ k=3 \end{array} \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{pmatrix} \qquad \mathrm{S} = \sum_{1 \leqslant j < i \leqslant n} a_{i,j} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=1}^{n-k} a_{k+j,j} = \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k+1}^{n} a_{i,i-k}$$

Somme des termes sur la diagonale d'équation $i - j = k$

Proposition 4.4. Produit de deux sommes (↯ 4.12)

Pour tous $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_p$ dans $\mathbb{C}$:

a. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right) \times \left(\sum_{j=1}^{p} b_j\right) = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} a_i b_j$;

b. $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} a_i a_j.$

Plus généralement, $\displaystyle\left(\sum_{\ell \in \mathrm{I}} a_\ell\right) \times \left(\sum_{k \in \mathrm{J}} b_j\right) = \sum_{(\ell,k) \in \mathrm{I} \times \mathrm{J}} a_\ell b_k.$

- On a $\mathrm{S}_n := \displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Calculer avec le symbole Π

Notation 4.5. Symbole Π

Comme pour les sommes, on note $\prod_{j\in J} a_j$ et $u_p \times u_{p+1} \times \cdots \times u_q = \prod_{k=p}^{q} u_k$.

De nombreuses remarques concernant les sommes restent valables pour les produits : indices muets, changements d'indices, regroupement par paquets, produits doubles, etc. Le télescopage prend la forme suivante :

$$\prod_{k=p}^{q} \frac{u_{k+1}}{u_k} = \frac{u_{p+1}}{u_p} \times \frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} \times \frac{\cdots}{u_{p+2}} \times \cdots \times \frac{u_{q-1}}{\cdots} \times \frac{u_q}{u_{q-1}} \times \frac{u_{q+1}}{u_q} = \frac{u_{q+1}}{u_p}$$

Les fonctions logarithme et exponentielle permettent d'ailleurs (après quelques précautions d'usage) de passer des produits aux sommes et réciproquement.

Proposition 4.5.

Soit $a \in \mathbb{C}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, J un ensemble fini, des nombres complexes $(a_j)_{j\in J}$ et $(b_j)_{j\in J}$ indéxés par J. Lorsque les expressions suivantes ont un sens, on a

$$\prod_{j\in J} a_j b_j = \left(\prod_{j\in J} a_j\right) \times \left(\prod_{j\in J} b_j\right), \quad \prod_{j\in J} e^{a_j} = e^{\left(\sum_{j\in J} a_j\right)}, \quad \prod_{j\in J} a_j^{\alpha} = \left(\prod_{j\in J} a_j\right)^{\alpha}, \quad \sum_{j\in J} \ln(a_j) = \ln\left(\prod_{j\in J} a_j\right)$$

$\prod_{j\in J}(a x_j) = a^{|J|} \prod_{j\in J} x_k$, où $|J|$ désigne le cardinal de J, ie le nombre d'éléments de l'ensemble J

✗ On a par exemple $\prod_{k=5}^{45} \frac{2k}{k+1} = 2^{41} \prod_{k=5}^{45} \frac{k}{k+1} = \frac{2^{41} \times 5}{46} = \frac{2^{40} \times 5}{23}$.

5. Coefficients binomiaux

Les aspects combinatoires seront étudiés ultérieurement, on se limite ici aux calculs.

Définition 4.6. Factorielle et coefficients binomiaux

Soit $n \in \mathbb{N}$.

⇛ On note $n! = 1$ si $n = 0$, $n! = 1$ si $n = 1$, et, si $n \geqslant 2$, $n! = n \times (n-1) \times 2 \times 1$ (factorielle de n).

⇛ On pose $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ si $k \in [\![0, n]\!]$, $\binom{n}{k} = 0$ si $k > n$ (coefficient k parmi n).

✗ Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times (n-k) \times (n-k+1) \times \cdots \times n}{(n-k)!} = \begin{cases} (n-k+1) \times \cdots \times n & \text{si } k \neq 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Ainsi $\binom{n}{k} = \dfrac{(n-0)(n-1)\times\big(n-(k-1)\big)}{k!}$ si $k \neq 0$ et $\binom{n}{k} = n$ si $k = 0$
- Cette forme simplifiée est plus économique à manipuler. Par exemple, $\binom{6}{3} = \dfrac{6\times5\times4}{3!}$ et

$$\binom{n}{0} = 1\,,\quad \binom{n}{1} = n\,,\quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}\,,\quad \binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-3)}{3!} \quad\text{et}\quad \binom{n}{4} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

Proposition 4.7. (Symétrie et relation de Pascal).

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $k \in [\![0,n]\!]$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k+1} = \binom{n}{k+1}$.

Pour effectuer le calcul des coefficients binomiaux *de proche en proche* à partir de cette formule, on adoptera une présentation sous forme de tableau, appelée *triangle de Pascal* :

$$\begin{array}{cccc}
\binom{0}{0} & & & \\
\binom{1}{0} & \binom{1}{1} & & \\
\binom{2}{0} & \binom{2}{1} & \binom{2}{2} & \\
\binom{3}{0} & \binom{3}{1} & \binom{3}{2} & \binom{3}{3}
\end{array}$$

Le coefficient $\binom{n}{k}$ est situé sur la ligne n et la colonne k (la numérotation commence à 0). On remplit par la relation :

$$\begin{array}{ccc}
\binom{n-1}{k-1} & + & \binom{n-1}{k} \\
 & & \downarrow \\
 & & \binom{n}{k}
\end{array}$$

Par exemple :

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
1 & 1 & & & \\
1 & 2 & 1 & & \\
1 & 3 & 3 & 1 & \\
1 & 4 & 6 & 4 & 1
\end{array}$$

La propriété de symétrie des cœfficients binomiaux entraînent que les lignes du triangle de Pascal sont des palindromes (ie elles sont symétriques par rapport à leur milieu).

- Sens de variation des cœfficients binomiaux. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [\![0,n-1]\!]$.
  - Pour étudier le sens de variation des coefficients du binôme, il est intéressant de former le quotient suivant :

$$\rho_k := \frac{\binom{n}{k+1}}{\binom{n}{k}} = \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} \times \frac{k!(n-k)!}{n!} = \frac{n-k}{k+1}$$

  On a $\rho_k > 1 \iff \frac{n-1}{2} > k$.

  - On en déduit que les coefficients binomiaux croissent jusqu'au « milieu » de chaque ligne puis décroissent (symétriquement d'après la relation $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$).

5.1. Formule du binôme

La formule du binôme généralise à une puissance entière quelconque n les identités remarquables :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad\text{et}\quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

Proposition 4.8. (Formule du binôme)

Pour $(a,b)\in\mathbb{C}^2$ et $n\in\mathbb{N}$, $(a+b)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^kb^{n-k}$.

Le triangle de Pascal permet de calculer rapidement les coefficients binomiaux et donc d'obtenir *efficacement* le développement de $(a+b)^n$ lorsque la valeur de l'exposant n est petite. Il suffit d'utiliser la ligne n du triangle de Pascal sur laquelle on lit les $n+1$ coefficients $\binom{n}{k}$ apparaissant dans la formule du binôme. On multiplie chacun d'entre eux par a^kb^{n-k} et on additionne les résultats afin d'obtenir l'identité souhaitée. Par exemple, grâce à la septième ligne du triangle de Pascal 1 6 15 20 15 6 1, nous obtenons en un éclair la formule

$$(a+b)^6=1a^6b^0+6a^5b^1+15a^4b^2+20a^3b^3+15a^2b^4+6a^1b^5+1a^0b^6$$

- Déterminons le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans $(a-b+2c)^9$.
  - ✔ Par la formule du binôme, on a

$$(a-b+2c)^9=\sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i}(a-b)^i2^{9-i}c^{9-i}=\sum_{i=0}^{9}\binom{9}{i}\sum_{j=0}^{i}\binom{i}{j}a^i(-1)^{i-j}b^{i-j}2^{9-i}c^{9-i}$$

  - ✔ Ainsi le coefficient de $a^4b^2c^3$ dans cette expression vaut $\binom{9}{6}\binom{6}{4}(-1)^{6-4}2^{9-6}=\frac{9!}{3!^2}$.

Le lecteur traitera avec profit les tests (⚡ **4.13**) et (⚡ **4.14**)

5.2. Variations binomiales

Le caractère polynomial du développement binomial est à la source de nombreuses techniques de calcul.

Proposition 4.9. (Polynôme générateur des coefficients binomiaux).

Pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $n\in\mathbb{N}$, $(1+x)^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k$.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_n : x\longmapsto(1+x)^n$.

- Pn a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}=\mathrm{P}_n(1)=(1+1)^n=2^n$ (somme des coefficients binomiaux sur la ligne n) pour $n\in\mathbb{N}$.
- Pour x réel et n dans $\mathbb{N}^*$, on déduit de $(\star)$ que

$$\begin{aligned}(1+x)^n+(1-x)^n&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^kx^k=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(1+(-1)^k\right)x^k\\&=2\sum_{\substack{k\in[\![0,n]\!]\\k\text{ pair}}}\binom{n}{k}x^k=2\sum_{0\leqslant 2\ell\leqslant n}\binom{n}{2\ell}x^{2\ell}\end{aligned}$$

  et de même

$$(1+x)^n-(1-x)^n=2\sum_{0\leqslant 2\ell+1\leqslant n}\binom{n}{2\ell+1}x^{2\ell+1}$$

d'où, pour $x=1$, $\sum_{0\leqslant 2\ell\leqslant n}\binom{n}{2\ell}=\frac{2^n+0^n}{2}=2^{n-1}$ car $n\in\mathbb{N}^*$ et $\displaystyle\sum_{0\leqslant 2\ell+1\leqslant n}\binom{n}{2\ell+1}=2^{n-1}$.

- En dérivant P_n, on obtient

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ \mathrm{P}_n'(x)\ =\ n(1+x)^{n-1}\ =\ \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}kx^{k-1}$$

En évaluant en $x=1$, on trouve $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\mathrm{P}_n'(1)\ =\ n2^{n-1}$.

- Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $\mathrm{P}_{2n}(x)\ =\ (1+x)^{2n}\ =\ \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}x^k$ mais aussi

$$\mathrm{P}_{2n}(x)\ =\ \big((1+x)^n\big)^2=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\right)^2\ =\sum_{0\leqslant i,j\leqslant n}\binom{n}{i}\binom{n}{j}x^{i+j}$$

Par unicité des coefficients d'un polynôme, en identifiant le coefficient de x^n dans ces deux expressions, on obtient :

$$\binom{2n}{n}=\sum_{\substack{0\leqslant i,j\leqslant n\\ i+j=n}}\binom{n}{i}\binom{n}{j}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\binom{n}{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}^2$$

d'où la formule de Vandermonde : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}$.

Outre la formule de Pascal, les coefficients binomiaux vérifient une autre relation de récurrence, souvent intéressante.

Proposition 4.10. (La formule comité-président).

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $k\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle\binom{n}{k}=\frac{n}{k}\binom{n-1}{k-1}$.

L'appellation fait référence à une autre démonstration classique de cette formule par des arguments combinatoire.

- Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Revenons au calcul de $\mathrm{S}:=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}$. On a

$$\mathrm{S}\ =\ \sum_{k=1}^{n}k\binom{n}{k}=\sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1}\ =\ n\sum_{\ell=0}^{n}\binom{n-1}{\ell}\ =\ n(1+1)^{n-1}\ =\ n2^{n-1}\quad\text{(formule du binôme)}$$

La formule de Pascal permet de calculer des sommes de coefficients binomiaux situés sur une même colonne du triangle.

- Soit $(p,n)\in\mathbb{N}^2$ tel que $n\geqslant p$. On a

$$\sum_{\ell=p}^{n}\binom{\ell}{p}=\sum_{\ell=p}^{n}\left(\binom{\ell+1}{p+1}-\binom{\ell}{p+1}\right)=\binom{n+1}{p+1}-\binom{p}{p+1}=\binom{n+1}{p+1}\quad\text{(télescopage)}$$

✔ Par exemple, pour $p=1$, $\binom{\ell}{p}=\ell$ pour tout ℓ. On retrouve donc

$$\sum_{\ell=1}^{n}\ell=\sum_{\ell=p}^{n}\binom{\ell}{1}=\binom{n+1}{2}=\frac{(n+1)n}{2}$$

✔ De même, $\binom{\ell}{2}=\frac{\ell(\ell-1)}{2}$ d'où $\ell^2=2\binom{\ell}{2}+\ell$ et donc

$$\sum_{\ell=1}^{n}\ell^2=\sum_{\ell=1}^{n}\ell+2\sum_{\ell=2}^{n}\binom{\ell}{2}=\frac{n(n+1)}{2}+2\binom{n+1}{3}=\frac{(n+1)n}{2}+2\frac{(n+1)n(n-1)}{6}=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Proposition 4.11. Sommes de Newtons remarquables

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}\ ,\quad \sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\ ,\quad \sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

5.3. Application à la linéarisation des produits trigonométriques

Linéariser un produit de fonctions trigonométriques $f(x)=\sin^n(x)\cos^m(x)$ consiste à écrire $f(x)$ sous la forme d'une somme de fonctions du type $x\mapsto\lambda\cos(kx)+\mu\sin(kx)$, avec λ et μ réels. Ainsi transformées, ces expressions se dérivent et s'intègrent bien plus facilement.

✘ Linéarisons le produit $\cos^3 x$ par deux méthodes différentes.

✔ Commençons par utiliser la trigonométrie usuelle. Pour $x\in\mathbb{R}$, on a $\cos^2 x=\frac{\cos 2x+1}{2}$ d'où

$$\cos^3 x=\frac{(\cos x)(\cos 2x)+\cos x}{2}=\frac{\frac{\cos(2x+x)+\cos(2x-x)}{2}+\cos x}{2}=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$

✔ Utilisons à présent les nombres complexes. Pour un réel x :

$$\cos^3 x=\left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\frac{e^{3ix}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-3ix}}{8}=\frac{\cos 3x+3\cos x}{4}$$

Rappelons au passage les formules de linéarisation issues de celles d'addition :

$$\cos a\cos b=\frac{\cos(a+b)+\cos(a-b}{2}\quad,\quad \sin a\sin b=\frac{\cos(a-b)-\cos(a+b}{2}$$
$$\text{et}\quad \sin a\cos b=\frac{\sin(a+b)+\sin(a-b}{2}$$

En les itérant, on peut linéariser par abaissement successif du degré. On retiendra également la méthode générale de linéarisation via les nombres complexes :

Linéarisation par passage sur $\mathbb{C}$

Pour linéariser l'expression $f(x)=\sin^n(x)\cos^m(x)$, on procèdera comme suit.

⇛ Ecrire $f(x)$ en fonction de e^{ix} et e^{-ix} en utilisant les formules d'Euler.

- ⇛ Développer les parenthèses aux puissances m et n en utilisant le formule du binôme. Dans le cas de petits exposants, on utilisera avec profit le triangle de Pascal.
- ⇛ Développer le produit des deux parenthèses.
- ⇛ Regrouper les exponentielles conjuguées et appliquer à nouveau (mais en sens inverse) les formules d'Euler.

Le lecteur est renvoyé au tests (⚡ **4.15**) et (⚡ **4.16**)

6. Tests

4.1.

Calculer $S = \sum_{k=1789}^{2017} 1$. Écrire à l'aide de Σ la somme $S' = 1+3+5+7+\cdots+777$.

4.2.

Compléter l'égalité $\sum_{k=3}^{n} u_{k+2} = \sum_{k=\bullet}^{\bullet} u_k$.

4.3.

Soit $4 \leqslant p \leqslant q$. Simplifier la somme $\sum_{k=p-3}^{q-1} (u_{k+1} - u_{k-1})$.

4.4.

Pour tout $n \geqslant 2$, on pose $v_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$.

Montrer que $\exists(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall t > 1$, $\frac{1}{t^2-1} = \frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1}$. En déduire une simplification de v_n.

4.5.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme S_n des n premiers entiers impairs.

4.6.

Calculer les sommes $A = \sum_{k=0}^{n} 2n$ et $B = 2+6+10+14+\cdots+98$.

4.7.

Écrire sous forme algébrique $s = i^{22} + i^{24} + i^{26} + \cdots + i^{46}$.

4.8.

On cherche à calculer $S = \cos^2\left(\frac{\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{14}\right) + \cos^2\left(\frac{5\pi}{14}\right)$.

a. Rappeler la formule de duplication du cosinus. En déduire une expression de S en fonction de

$$S' = \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{7}\right) + \cos\left(\frac{5\pi}{7}\right)$$

b. Montrer que $S' = \frac{1}{2}$ et en déduire la valeur de S.

4.9.

Prouver la formule $S = \cos(\theta) + \cos(2\theta) + \cdots + \cos(8\theta) = -\frac{1}{2}$ où $\theta = 2\pi/17$.

4.10.

Factoriser $a^5 + b^5$ par $a+b$ en appliquant la proposition 2 (cf. 7).

4.11.

Compléter les interversions suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet}\sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}$

b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet}\sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}$

c. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet}\sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}$

d. $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = \sum_{\bullet} a_{i,j} = \sum_{j=\bullet}^{\bullet}\sum_{i=\bullet}^{\bullet} a_{i,j}$

4.12.

Que pensez-vous de la formule suivante $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k$?

4.13.

Calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k 2^{k-1}$;

b. $\displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\cos(k\pi/3)$.

4.14.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k} i^k$.

4.15.

Linéariser $\cos^5(x)$.

4.16.

En linéarisant $\sin^4(x)$, simplifier $\sin^4\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^4\left(\frac{7\pi}{8}\right)$.

7. Solutions

4.1.

On a S = 229 et $S' = \sum_{k=0}^{388}(2k+1)$.

4.2.

On a $\sum_{k=3}^{n} u_{k+2} = \sum_{k=5}^{n+2} u_k$.

4.3.

On trouve $u_q + u_{q-1} - u_{p-4} - u_{p-3}$.

4.4.

Puisque pour tout $t \neq \pm 1$,

$$\frac{\alpha}{t-1} + \frac{\beta}{t+1} = \frac{(\alpha+\beta)t + \alpha - \beta}{t^2-1}$$

il suffit de choisir α et β tels que $\alpha+\beta = 0$ et $\alpha - \beta = 1$, c'est-à-dire $\alpha = -\beta = 1/2$. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k-1} - \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k+1} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+1}\frac{1}{k} \\ &= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

4.5.

On a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n}(2k-1) = \frac{1+2n-1}{2} \times n = n^2$$

d'après la formule de la série arithmétique.

4.6.

On reconnaît des sommes arithmétiques :

$$A = \sum_{k=0}^{n} 2n = 2n\sum_{k=0}^{n} 1 = 2n(n+1)$$
$$B = \sum_{k=0}^{24}(4k+2) = \frac{25}{2}(2+98) = 1250$$

4.7.

On a $s = \sum_{k=11}^{23} i^{2k} = \sum_{k=11}^{23}(-1)^k = -\frac{(-1)^{13}-1}{-1-1} = -1$.

4.8.

a. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1, \text{ ie } \cos^2(\theta) = \frac{\cos(2\theta)+1}{2}$$

On en déduit que $S = \frac{S'+3}{2}$.

b. On a $S' = \mathrm{Re}(\Sigma)$ où $\Sigma = e^{i\pi/7} + e^{3i\pi/7} + e^{5i\pi/7}$. Or

$$\Sigma = e^{i\pi/7}\frac{e^{6i\pi/7}-1}{e^{2i\pi/7}-1} = e^{3i\pi/7}\frac{\sin(3\pi/7)}{\sin(\pi/7)}$$

d'où

$$S' = \cos(3\pi/7)\frac{\sin(3\pi/7)}{\sin(\pi/7)} = \frac{\sin(6\pi/7)}{2\sin(\pi/7)} = \frac{1}{2}$$

Ainsi $S = \frac{S'+3}{2} = \frac{7}{4}$.

4.9.

S est la partie réelle de $\sigma = e^{i\theta} + e^{2i\theta} + \cdots + e^{8i\theta}$. Puisque $e^{i\theta} \neq 1$, on peut appliquer la formule de la série géométrique et

$$\sigma = e^{i\theta}\frac{(e^{i\theta})^8 - 1}{e^{i\theta}-1} = e^{i\theta}\frac{e^{16i\pi/17}-1}{e^{i\theta}-1}$$

Comme $e^{16i\pi/17} = -e^{-i\pi/17}$, on a

$$\begin{aligned} \sigma &= e^{2i\pi/17}\frac{-1-e^{-i\pi/17}}{e^{i2\pi/17}-1} \\ &= e^{2i\pi/17}\frac{-1-e^{-i\pi/17}}{e^{i\pi/17}2i\sin(\pi/17)} \\ &= \frac{-1-e^{i\pi/17}}{2i\sin(\pi/17)} = \frac{i + i\cos(\pi/17) - \sin(\pi/17)}{2\sin(\pi/17)} \end{aligned}$$

et donc $S = \mathrm{Re}(\sigma) = -\frac{1}{2}$.

4.10.

On a

$$\begin{aligned} a^5+b^5 &= a^5-(-b)^5 \\ &= (a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right) \end{aligned}$$

4.11.

On a

a. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} a_{i,j}$

b. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant i< j\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_{i,j}$

c. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j}^{n} a_{i,j}$

d. $\displaystyle\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} = \sum_{1\leqslant j< i\leqslant n} a_{i,j} = \sum_{j=1}^{n-1}\sum_{i=j+1}^{n} a_{i,j}$

4.12.

C'est faux pour $n \geqslant 2$. En général

$$(a_0+a_1)(b_0+b_1) \neq a_0b_0+a_1b_1$$

4.13.

On notera à chaque fois S la somme à calculer.

a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} \mathrm{S} &= \sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-1)^k 2^{k-1} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2n}\binom{2n}{k}(-2)^k \\ &= \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}(-2)^k\right)-1\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((-2+1)^{2n}-1\right) = 0 \end{aligned}$$

b. On a $\mathrm{S} = \mathrm{Re}(u)$ où $u := \displaystyle\sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}e^{ik\pi/3}$, d'où

$$\begin{aligned} u &= \sum_{k=0}^{6}\binom{6}{k}\left(e^{i\pi/3}\right)^k = \left(1+e^{i\pi/3}\right)^6 \\ &= e^{i6\pi/6}\left(e^{i\pi/6}+e^{-i\pi/6}\right)^6 = -2^6\cos^6(\pi/6) \\ &= -2^6\left(\sqrt{3}/2\right)^6 = -27 \end{aligned}$$

Ainsi $\mathrm{S} = -27$.

4.14.

D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}i^k &= (1+i)^{4n} = \left((1+i)^2\right)^{2n} \\ &= (2i)^{2n} = (4i^2)^n = (-4)^n \end{aligned}$$

4.15.

Pour un réel x :

$$\begin{aligned} \cos^5(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 \\ &= \frac{e^{5ix}+5\left(e^{3ix}+e^{-3ix}\right)}{32} \\ &\quad + \frac{10\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)+e^{-5ix}}{32} \\ &= \frac{\cos(5x)+5\cos(3x)+10\cos(x)}{16} \end{aligned}$$

4.16.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \sin^4(x) &= \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \\ &= \frac{e^{i4x}+e^{-i4x}-4e^{i2x}-4e^{-i2x}+6}{2\times 8} \\ &= \frac{\cos(4x)-4\cos(2x)+3}{8} \end{aligned}$$

Donc

$$\sin^4\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right) = \frac{-4\cos\left((2k+1)\pi/4\right)+3}{8}$$

Ainsi $\displaystyle\sum_{k=0}^{3}\sin^4\left(\frac{(2k+1)\pi}{8}\right) = \frac{3}{2}$.