ALG 5 | Calcul matriciel

L'algèbre linéaire, que nous étudierons dans la suite du cours, est née de la théorie des systèmes linéaires. Ces chapitres constituent une introduction aux matrices à coefficients dans le corps $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Matrice de gravure (Albrecht Dürer)

L'idée de matrice s'est lentement forgée au fil de siècles. Elle est naturellement née de l'étude des systèmes d'équations linéaires, et on en retrouve la trace jusqu'à l'époque babylonienne. **Cardan** énonça dans son *Ars Magna* dès règles générales permettant la résolution des systèmes d'équations linéaires à deux inconnues.

Dès lors, tous les développements concernant les systèmes linéaires, ont tourné autour de la notion de déterminant. Aprés les travaux de **Leibniz**, **Laplace**, **Vandermonde** et d'autres savants, **Gauss** introduit le mot *déterminant* et propose une technique générale de résolution des systèmes d'équations linéaires, la méthode du pivot.

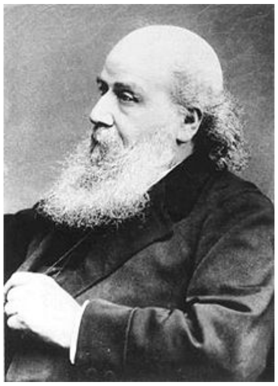
Le premier savant à employer le mot *matrice* fut cependant **Sylvester** en 1850. Ce dernier fit partager ses découvertes à **Cayley** qui publia en 1858 son *Memoir on the theorie of matrices* dans lequel il énonça le résultat aujourd'hui appelé *théorème de Cayley-Hamilton* (mais qui ne fut prouvé dans le cas général que par **Frobenius** en 1896). Dans cet ouvrage, Arthur Cayley définit les opérations usuelles sur les matrices (addition, multiplications interne et externe, passage à l'inverse) et expose le calcul explicite de l'inverse à l'aide du déterminant.

Vandermonde

Gauss

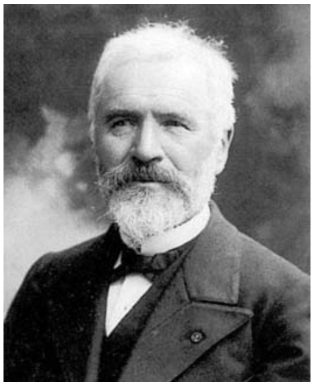
Il fallut cependant attendre la première moitié du XX$^{\text{e}}$ siècle pour que la théorie des matrices devienne un des piliers de l'enseignement des mathématiques, notamment grâce aux cours de **Camille Jordan** à Paris.

Cayley



Sylvester

Frobenius



Jordan

Depuis l'avènement du calcul numérique et de l'informatique, les systèmes linéaires ont connu un regain d'intérêt. Les capacités et la vitesse de calcul ont ouvert la voie à la résolution de systèmes linéaires de taille gigantesque. Des méthodes de discrétisation fondées sur l'idée de linéarisation ont vu le jour pour la résolution approchée d'équations différentielles et d'équations aux dérivées partielles. Nous évoquerons ces aspects dans la dernière section de ce cours, mais seulement à titre culturel.

1. Calcul matriciel

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Dans ce cadre, les éléments de $\mathbb{K}$ sont traditionnellement qualifiés de « *scalaires* ».

Définition 5.0. Vocabulaire sur les matrices

Soit p et n dans $\mathbb{N}^*$.

- On appelle matrice à n ligne(s) et p colonne(s) à coefficient(s) dans $\mathbb{K}$ toute famille d'éléments de $\mathbb{K}$ indexée par le produit cartésien $[\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.
- Une matrice est dite carrée si elle compte autant de ligne(s) que de colonne(s). Sa taille est alors par définition son nombre de ligne(s).
- L'ensemble de ces matrices $\mathbb{K}^{[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ est noté plus simplement $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- L'ensemble $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ des matrices carrées de taille n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
- Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, le nombre $a_{i,j}$ est appelé coefficient d'indices (i,j) de A (on peut aussi dire de position (i,j)).
- La matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls est appelée matrice nulle. On la note $0_{n,p}$ ou plus simplement 0, s'il n'y pas d'ambiguité sur les valeurs n et p.

D'une manière moins formelle, une matrice A à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est la donnée de np éléments de $\mathbb{K}$ répartis dans un tableau à n lignes et p colonnes.

Par convention, $A_{i,j}$ est le coefficient sur la ligne i et la colonne j de la matrice A.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{cc} \text{Colonne } j & \\ \begin{pmatrix} & & \\ & a_{i,j} & \\ & & \end{pmatrix} & \text{Ligne } i \end{array}$$

Notation des coefficients d'une matrice

Afin de mener des démonstrations et des calculs efficacement, il est conseillé de noter $a_{i,j}$, $A_{i,j}$, $(A)_{i,j}$ ou encore $[A]_{i,j}$, les coefficients d'une matrice A.

Pour $A := (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, les matrices

$$\begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{i,1} & \cdots & a_{i,p} \end{pmatrix} \quad \text{sont respectivement appelées } j\text{-ème colonne et } i\text{-ème ligne de A}$$

Lorsque $n = p$, on appelle diagonale de A, la n-liste suivante :

$$(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n})$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}$$

Dans le cadre du calcul matriciel, le symbole de Kronecker sera très largement utilisé :

Définition 5.1. Symbole de Kronecker

On note δ la famille indexée par $\mathbb{N}^2$ à valeurs dans $\{0,1\}$ définie par

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2,\ \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

1.1. Sommes et combinaisons linéaires

Définition 5.2. Somme, produit par un scalaire

On considère deux matrices $A := (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B := (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ ainsi qu'un scalaire λ.

⇛ La matrice somme de A et B est la matrice, notée $A+B$, définie par $A+B = (a_{i,j}+b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

⇛ On. note λA la matrice définie par $\lambda A = (\lambda a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$.

En particulier, avec les notations de la définition et des scalaires λ, μ :

$$\lambda A + \mu B = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1}+\mu b_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p}+\mu b_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{n,1}+\mu b_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p}+\mu b_{n,p} \end{pmatrix}$$

Proposition 5.2. Règles de calculs

Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$. Ces deux opérations vérifient les propriétés suivantes :

a. Élément neutre : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A+0 = 0+A = A$.

b. Associativité : $\forall (A,B,C)\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$, $(A+B)+C = A+(B+C)$;

c. Commutativité : $\forall (A,B)\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, $A+B = B+A$;

d. Distributivité : $\forall (A,B,C)\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^3$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$.

Ces règles de calcul, analogues à celles vérifiées par les nombres complexes, nous permettent d'utiliser le symbole Σ dans le cadre des matrices avec une généralisation (par récurrence sur le nombre de matrices) des règles précédentes :

$$\sum_{i=1}^{n} (\lambda A_i + \mu B_i) = \lambda \sum_{i=1}^{n} A_i + \mu \sum_{i=1}^{n} B_i$$

pour des matrices $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et des scalaires λ, μ.

Définition 5.3. Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

⇛ Pour $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$, on note $\mathrm{E}_{i,j}$ la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui d'indices (i,j).

⇛ La famille $(\mathrm{E}_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est appelée base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Attention, la notation $\mathrm{E}_{i,j}$ est incomplète puisqu'elle ne fait pas référence au couple (n,p).

✗ Par exemple, pour $n = p = 2$, on a

$$\mathrm{E}_{1,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{E}_{1,2} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathrm{E}_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \ \text{ et } \ \mathrm{E}_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 2} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$, on a

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} = a_{1,1}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{1,2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,1}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + a_{2,2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

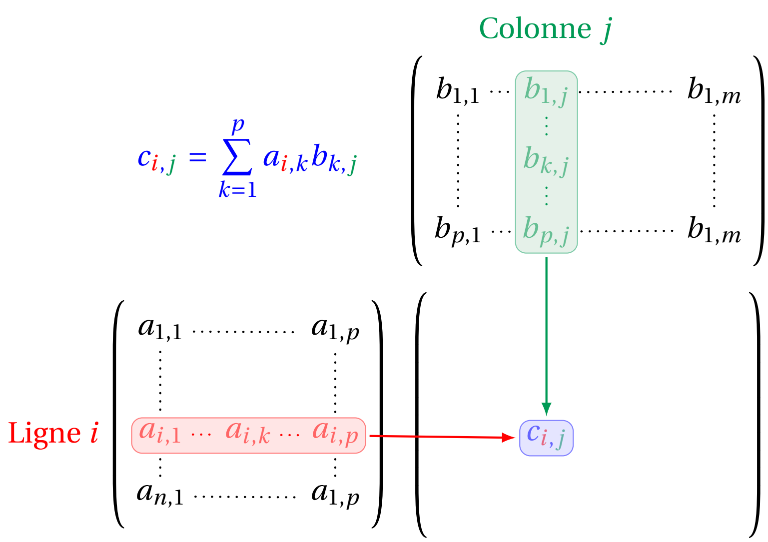
✗ Plus généralement, pour $\mathrm{A} = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{A} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} a_{i,j}\mathrm{E}_{i,j}$.

1.2. Produit matriciel

Définition 5.4. Produit matriciel

Soit $\mathrm{A} := (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\mathrm{B} := (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant m}}$ une matrice de $\mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$.
Le produit de A par B est la matrice, notée AB, de $\mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ dont le coefficient d'indices (i,j) est :

$$\sum_{k=1}^{p} a_{i,k}b_{k,j}$$



Le produit AB n'est défini que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

En cas d'existence, AB hérite de A son nombre de ligne(s) et de B son nombre de colonne(s).

On peut « poser » le produit AB en positionnant A et B comme ci-contre et en remplissant coefficient par coefficient le tableau.

On calcule $c_{i,j}$ à partir de « *la ligne de gauche* et de « *la colonne du dessus* ».

✘ Par exemple,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b & -a+b \\ c+2d & -c+d \end{pmatrix}$$

Il faut connaître les relations suivantes, qui se démontrent (voire se retrouvent) facilement « en posant » les produits :

Proposition 5.4. Produits canoniques

On note $(\mathrm{E}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la base canonique de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout (i,j) et (k,ℓ) dans $[\![1,n]\!]^2$, on a $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,\ell}$. Cette formule se généralise facilement à un produit de matrices de tailles respectives (n,p) et (p,m).

Le produit matriciel n'est pas commutatif et admet des diviseurs de zéros, c'est-à-dire qu'il existe des matrices non nulles dont le produit est nul :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$$

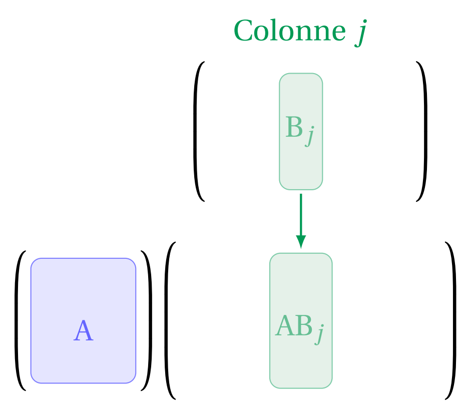
Revenons à l'exemple, ci-dessus. Nous remarquons que

$$\begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} -a+b \\ -c+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le produit AB peut donc aussi se calculer *colonne par colonne* (au lieu de la définition *coefficient par coefficient*) en calculant les produits $\mathrm{AB}_1, \ldots, \mathrm{AB}_m$ où $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m$ désignent les colonnes de B.

Proposition 5.5.

Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$. Les colonnes de AB sont AB_1, …, AB_m où $\mathrm{B}_1, \ldots, \mathrm{B}_m$ sont celles de B.



De même en désignant par $\mathrm{A}'_1, \ldots, \mathrm{A}'_n$ les lignes de A, les lignes de AB sont $\mathrm{A}'_1\mathrm{B}, \ldots, \mathrm{A}'_m\mathrm{B}$.

L'expression du produit matriciel au moyen des colonnes aura une grande importance en théorie et en pratique dans l'ensemble du cours d'Algèbre linéaire.

Le produit AX, avec $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et X une colonne de taille p, s'interprète comme *une combinaison linéaire* des colonnes de A dont les coefficients sont ceux de X :

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2b \\ c+2d \end{pmatrix} = 1\cdot\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} + 2\cdot\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

Plus généralement :

$$\begin{pmatrix} \mathrm{A}_1 & \cdots & \mathrm{A}_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_p \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathrm{A}_j \quad \text{(combinaison linéaires des colonnes } \mathrm{A}_1, \ldots, \mathrm{A}_p\text{)}$$

$$\begin{pmatrix}\mu_1 & \cdots\cdots & \mu_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A'_1 \\ \vdots \\ A'_n\end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \mu_i A'_i \quad \text{(combinaison linéaires des lignes } A'_1,\ldots,A'_n\text{)}$$

En particulier, il est important de savoir que $\forall j \in [\![1,p]\!]$ et $\forall i \in [\![1,n]\!]$:

$$A_j = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots\cdots & A_p \end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \to j \\ \\ \\ \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c}\begin{array}{ccccc} & & i & & \\ & & \uparrow & & \end{array}\\ \begin{pmatrix}0 & \cdots & 1 & \cdots & 0\end{pmatrix}\end{array}\begin{pmatrix} A'_1 \\ \vdots \\ A'_n\end{pmatrix} = A'_i$$

Définition 5.6. Matrice identité de taille p

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On note $I_p := \left(\delta_{i,j}\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ (matrice identité de taille p).

Proposition 5.7. Règles de calculs (↯ 5.1)

Soit n, m, p et q dans $\mathbb{N}^*$.

a. Élément neutre : $\forall A \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})$, $I_n A = A$ et $AI_m = A$.

b. Associativité : $\forall (A,B,C) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $A(BC) = (AB)C$;

c. Distributivité :

$$\forall (A,B,C,D) \in \mathscr{M}_{n,m}(\mathbb{K})^2 \times \mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})^2,\ (\lambda A+\mu B)C = \lambda(AC)+\mu(BC),\ A(\lambda C+\mu D) = \lambda(AC)+\mu(AD)$$

1.3. Puissances d'une matrice carrée

L'associativité du produit matriciel permet de définir les puissances d'une matrice carrée :

Définition 5.8. Puissances d'une matrice carrée (↯ 5.2)

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, on pose $M^0 := I_p$ et $M^n = \underbrace{M \times \cdots \times M}_{n \text{ termes}}$.

- Calculons les puissances de la matrice $U := (1)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$. On obtient facilement par la définition que $U^2 = pU$. On a alors $U^3 = U^2 \times U = pU^2 = p^2 U$ et, par une récurrence facile, $U^n = p^{n-1}U$ pour tout entier naturel n non nul et $U^0 = I_p$.

On vérifie facilement que les propriétés usuelles sur $\mathbb{C}$ restent valables dans ce cadre, et se démontrent essentiellement par récurrence en utilisant l'associativité mentionnée ci-dessus :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})^2,\ \forall (n,m) \in \mathbb{N}^2,\ \begin{cases} \left(A^n\right)^m = A^{nm} \\ A^n A^m = A^{n+m}\end{cases} \quad \text{et} \ \text{, si } AB = BA,\ \forall n \in \mathbb{N},\ (AB)^n = A^n B^n$$

On notera la condition nécessaire $AB = BA$ pour la dernière propriété. Par exemple, on a

$$\left(E_{1,2}E_{2,1}\right)^2 = E_{1,1}^2 = E_{1,1} \quad \text{et} \quad E_{1,2}^2 E_{2,1}^2 = 0 \times 0 = 0$$

Définition 5.9. Commutation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit que des éléments A et B de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ commutent si $AB = BA$.

Considérons deux matrices A et B de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$. Si $AB \neq BA$, alors

$$\begin{aligned}(A+B)\times(A+B) &= A^2+AB+BA+B^2 \neq A^2+2AB+B^2\\(A+B)\times(A-B) &= A^2-AB+BA+B^2 \neq A^2-B^2\end{aligned}$$

Mais, en cas de commutation, les formules de factorisation et du binôme (démontrées pour les nombres complexes dans ALG 3) sont applicables.

Proposition 5.10. Fomules du binôme et de factorisation

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ qui commutent.

a. $\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}$;

b. $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n - B^n = (A-B)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^{n-1-k}B^k$.

La formule du binôme permet de calculer les puissances d'une matrice s'écrivant comme somme de deux matrices qui commutent[1].

- Calculons par exemple les puissances de la matrice $A := \begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

  On a $A = I_3 + N$ où $N := \begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$. Comme $N^2 = \begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$, on a $N^3 = 0$, puis $N^k = 0$ pour tout $k \geqslant 3$.

  De plus, $I_n N = N I_n = N$ donc on peut appliquer la formule du binôme :

$$A^n = (I_3+N)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}N^k = \binom{n}{0}N^0 + \binom{n}{1}N + \binom{n}{2}N^2 = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2 = \begin{pmatrix}1 & n & \dfrac{n(n-1)}{2}\\ 0 & 1 & n\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- Cette technique se généralise bien à $A = \lambda I_p + N$ où N est une matrice nilpotente.

Définition 5.11. Nilpotence

Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'un élément N de $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$ est nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $N^n = 0$.

La formule de factorisation admet un cas particulier important, celui des sommes géométriques. En l'absence d'inversibilité, la formule des sommes géométriques s'écrit sans passage à l'inverse.

Sommes géométriques matricielles

Pour $A \in \mathscr{M}_m(\mathbb{K})$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a $(A - I_m)\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} A^k = A^n - I_m$.

1. Mais cela n'a bien-sûr d'intérêt que si les puissances de ces deux matrices sont simples à calculer.

1.4. Matrices carrées triangulaires

Les matrices diagonales et triangulaires jouent un rôle important dans la théorie des Matrices.

Définition 5.12. Matrices diagonales, triangulaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice carrée $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$.

- ⇛ On dit que A est une matrice diagonale lorsque $a_{i,j} = 0$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$.
- ⇛ On dit que A est une matrice triangulaire supérieure lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i > j \implies a_{i,j} = 0$.
- ⇛ On dit que A est une matrice triangulaire inférieure lorsque $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j > i \implies a_{i,j} = 0$.

On note respectivement $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ et $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ les ensembles des matrices diagonales, triangulaires supérieures et triangulaires inférieures. On a bien-sûr $\mathscr{D}_n(\mathbb{K}) = \mathscr{T}_n^-(\mathbb{K}) \cap \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$.

✘ Par exemple, $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ sont respectivement triangulaires supérieure et inférieure.

Proposition 5.13. Stabilité de $\mathscr{T}_n^{\pm}(\mathbb{K})$ par les opérations matricielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ est stable par combinaison linéaire et par produit :

$$\forall (A,B) \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})^2,\ \forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2,\ \lambda A + \mu B \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K}) \ \text{ et } \ AB \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$$

Pour $(A,B) \in \mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})^2$ et $i \in [\![1,n]\!]$, $(AB)_{i,i} = A_{i,i}B_{i,i}$. Le même résultat vaut pour $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$.

1.5. Transposition

Définition 5.14. Matrice transposée

Pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on note $A^\top := (a_{j,i})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$. C'est un élément de $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

C'est la matrice obtenue « *en mettant en colonne* » les lignes de A (ou inversement d'ailleurs), elle est appelée transposée de A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 5 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans le cas d'une matrice carrée A, la matrice $A^\top$ s'obtient en effectuant la symétrie par rapport à la diagonale de A :

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix} \quad \text{par la symétrie} \quad \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Proposition 5.14. Propriétés de la transposition

a. Pour toute matrice A, on a $(A^\top)^\top = A$.

b. Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et λ, μ des scalaires, on a

$$(\lambda A + \mu B)^\top = \lambda A^\top + \mu B^\top \quad \text{(linéarité de la transposition)}$$

c. Pour $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m}}$ dans $\mathscr{M}_{p,m}(\mathbb{K})$, on a $(AB)^\top = B^\top A^\top$.

Définition 5.15. Matrices symétriques ou antisymétriques

Soit A une matrice carrée.

- On dit que A est *symétrique* si $A = A^\top$;
- On dit que A est *antisymétrique* si $A = -A^\top$.

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ (resp. $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

- Par exemple, les matrices $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ sont respectivement symétrique et antisymétrique.
- Plus généralement, la diagonale d'une matrice antisymétrique A est toujours nulle car la condition $A^\top = -A$ impose $A_{i,i} = -A_{i,i}$ pour tout indice i.

1.6. Trace d'une matrice

Définition 5.16. Trace d'une matrice carrée

Pour toute matrice carrée $A = (a_{i,j})$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} a_{i,i}$.

Ce nombre est appelé trace de la matrice A.

- On a $\operatorname{tr}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a + d$.
- Par exemple, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on a $\operatorname{tr} I_n = n$. La trace de la matrice nulle est nulle quelque soit sa taille.

Proposition 5.16. Propriétés de la trace (⚡5.3)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a. La trace est linéaire : pour tous A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(A + \lambda B) = \operatorname{tr}(A) + \lambda \operatorname{tr}(B)$.

b. Pour tous A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

c. Pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}\left(A^\top\right)$.

En particulier, $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr}(A)$ pour tout $(\lambda, A) \in \mathbb{K} \times \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

2. Systèmes linéaires

Le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ x + 2z = 0 \end{cases}$$

d'inconnues x, y, z réelles peut se reformuler au moyen du calcul matriciel :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2.1. Vocabulaire sur les systèmes linéaires

Définition 5.17. Système linéaire à n équations et p inconnues

Soit n et p dans $\mathbb{N}^*$.

- On appelle système linéaire à n équation(s) et p inconnue(s), toute équation s'écrivant sous la forme $AX = B$ où $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont des données et $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ est l'inconnue.
- La matrice A est appelée matrice du système linéaire.
- Le système linéaire d'équation $AX = 0$ est appelé système linéaire homogène associé à $AX = B$.
- L'ensemble des solutions du système $AX = B$ est par définition $\{X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})\,;\, AX = B\}$.
- Un système linéaire est dit compatible si l'ensemble de ses solutions est non vide.

On remarque que si $\widetilde{X}$ est une solution du système $\mathscr{E}$: $AX = B$, alors pour tout $X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$:

$$\begin{aligned} X \text{ est solution de } \mathscr{S} &\iff AX = B \\ &\iff AX = A\widetilde{X} \\ &\iff A(X-\widetilde{X}) = 0 \\ &\iff X-\widetilde{X} \text{ est solution du système homogène } \mathscr{E}_0 \text{ associé à } \mathscr{E} \end{aligned}$$

Proposition 5.17. Structure de l'ensemble des solutions d'un système linéaire

Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(K)$ et $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Considérons le système linéaire $\mathscr{E}$: $AX = B$.

a. Le système $\mathscr{E}$ est compatible si et seulement si B est combinaison linéaire des colonnes de A, i.e. :

$$\exists (x_1, \ldots, x_p) \in \mathbb{K}^p,\ B = \sum_{i=1}^{p} x_i A_i \quad \text{où } A_1, \ldots, A_p \text{ sont les colonnes de A}$$

b. Si $\mathscr{E}$ est compatible, alors l'ensemble de ses solutions est

$$\mathscr{S} := \{\widetilde{X} + X_H\,;\, X_H \in \mathscr{S}_0\}$$

où $\widetilde{X}$ désigne une solution particulière de $\mathscr{E}$ et $\mathscr{S}_0$ l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $\mathscr{E}_0$: $AX = 0$ associé à $\mathscr{E}$.

2.2. Algorithme du pivot

La résolution d'un système linéaire à deux équations et deux inconnues peut être effectuée au moyen de substitutions :

$$\begin{cases} x+y &= 1 \\ 2x-y &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 1-x \\ 2x-y &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 1-x \\ 2x-(1-x) &= 2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

Cette technique se généralise mal à un nombre d'inconnues et d'équations supérieures. La résolution d'un système linéaire général s'effectue facilement au moyen de l'algorithme du pivot de Gauss que nous allons décrire dans la suite de ce paragraphe. Celui-ci nécessite l'introduction d'opérations usuelles sur les lignes d'un système linéaire.

Notation 5.18. Opérations élémentaires sur les lignes

Considérons une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ou un système linéaire à n lignes et p colonnes dont on note $L_1, \dots, L_n$ les lignes.

- Le fait permuter deux lignes L_i et L_j se note $L_i \leftrightarrow L_j$.
- Le fait de multiplier L_i par $\lambda \neq 0$ se note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- Le fait d'ajouter $\lambda \cdot L_j$ à L_i, pour $i \neq j$, se note $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$.

Comme chacune de ses opérations est réversible, on en déduit le résultat suivant :

Opérations élémentaires sur les lignes un système linéaire

Effectuer un nombre fini d'opérations élémentaires successives sur un système linéaire n'en change pas l'ensemble des solutions.

L'algorithme du pivot permet d'aboutir, à l'aide d'opérations élémentaires sur les lignes, à un système linéaire *échelonné*.

- Considérons par exemple le système

$$\begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \\ x + y + 2z = 3 \end{cases}$$

La première étape consiste à choisir l'une des trois équations qui va nous servir à supprimer l'inconnue x dans les autres. Il faut pour cela trouver une équation où le coefficient de x est non nul et le plus simple possible pour la suite des calculs. Le choix d'un coefficient égal à 1 est optimal :

$$\begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = 3 \\ 2x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} \boxed{x} + y + 2z = 3 \\ - y - 3z = -5 \\ y - z = -1 \end{cases} \text{ par } L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 - L_1$$

On ne touche plus désormais à la première ligne et on recommence en considérant le système formé par des deux dernières lignes, i.e. on utilise le terme en y de la seconde équation pour supprimer cette inconnue de la troisième équation :

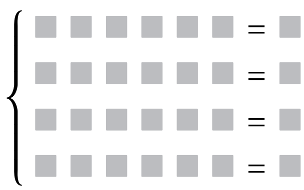
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ \quad - y - 3z = -5 \\ \quad\;\; y - z = -1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ \quad -y - 3z = -5 \\ \quad\;\; 0 - 4z = -6 \end{cases} \text{par } L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

Il sufit de « remonter » le système pour le résoudre en calculant successivement z, y puis x :

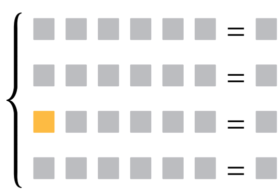
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3 \\ \quad -y - 3z = -5 \\ \quad\;\; 0 \quad -4z = -6 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{2} \\ z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

Algorithme du pivot de Gauss (⚡ 5.4)

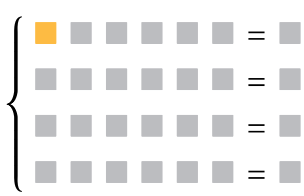
- On retiendra l'algorithme suivant pour résoudre un système linéaire général (⚡ 5) :



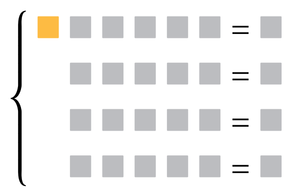
- **Étape 1.** On suppose qu'il y a un coefficient non nul dans la première colonne, sinon on passe à l'inconnue suivante :



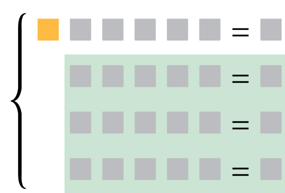
Ce coefficient est appelé pivot (en doré dans les schémas). On permute la première ligne et la ligne contenant le pivot :



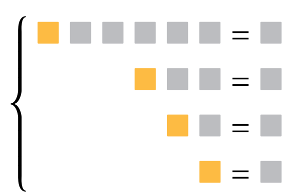
- **Étape 2.** En utilisant le pivot et des opérations du type $L_i \leftarrow L_i - \lambda L_1$, on supprime la première inconnue des autres équations :



- **Étape 3.** On revient à l'étape 1 avec le sous-système formé par les lignes restantes (s'il y en a) :



- **En fin d'algorithme.** On obtient un système *au profil échelonné* :



que l'on résout « en remontant ».

- Résolvons le système $\mathscr{E}$: $\begin{cases} -2x + y + z = 1 \\ x - 2y + z = 1 \\ x + y - 2z = -2 \end{cases}$ en suivant cette méthode :

$$\mathscr{E} \iff \begin{cases} \quad x + \quad y - 2z = -2 \\ \quad x - 2y + \quad z = \quad 1 \\ -2x + \quad y + \quad z = \quad 1 \end{cases} \quad \text{par } L_3 \leftrightarrow L_1$$

$$\iff \begin{cases} x + \quad y - 2z = -2 \\ \quad - 3y + 3z = \quad 3 \\ \quad + 3y - 3z = -3 \end{cases} \quad \text{par } L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \text{ et } L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1$$

$$\iff \begin{cases} x + y - 2z = -2 \\ \quad y - \quad z = -1 \end{cases} \quad \text{par } L_2 \leftarrow -\tfrac{1}{3}L_2$$

On en déduit l'ensemble de ses solutions $\mathscr{S} = \{(-1+z, z-1, z)\,;\, z \in \mathbb{R}\}$.

3. Matrices inversibles

Parmi les règles de calcul très usuelles dans $\mathbb{K}$, le lecteur connaît bien la propriété suivante :

$$\forall a \in \mathbb{K}^*,\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{K}^2,\ ax_1 = ax_2 \implies x_1 = x_2 \quad (\star)$$

On peut simplifier par un scalaire non nul dans une égalité. Il n'en va pas de même pour les matrices, par exemple dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

$$E_{1,1}E_{2,1} = E_{1,1}E_{2,2} = 0 \quad \text{mais bien que } E_{1,1} \neq 0, \text{ on a } E_{2,1} \neq E_{2,2}$$

Considérons une égalité de la forme $AX_1 = AX_2$ où $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(X_1, X_2) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Nous allons chercher à *neutraliser* A dans chacun des deux membres en multipliant par un analogue du scalaire a^{-1} dans la propriété $(\star)$, c'est-à-dire une matrice A' telle que $A'A = I_n$. En effet, sous réserve d'existence d'une telle matrice A', on a bien

$$AX_1 = AX_2 \text{ donc } A'(AX_1) = A'(AX_2),\ \text{d'où } (A'A)X_1 = (A'A)X_2,\ \text{c'est-à-dire } X_1 = X_2$$

par associativité du produit matriciel. On parle d'une simplification par A à gauche.

Considérons à présent une égalité de la forme $Y_1A = Y_2A$. La neutralisation à droite par A nous conduit à considérer une matrice A'' telle que, sous réserve d'existence, $AA'' = I_n$. Supposons l'existence d'un couple (A', A'') de matrices vérifiant $A'A = I_n = AA''$. On a alors, par associativité du produit matriciel :

$$A' = A'(AA'') = (A'A)A'' = A''$$

Nous allons nous intéresser dans ce paragraphe aux matrices A « *neutralisables à gauche et à droite* », c'est-à-dire telles qu'il existe A' vérifiant $AA' = A'A = I_n$.

3.1. Le groupe linéaire d'ordre n

L'importance de la simplification dans les calculs motive la définition qui suit.

Définition 5.19. Matrice inversible, inverse d'une matrice inversible

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

- $\Rrightarrow$ On dit qu'une matrice A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible lorsqu'il existe une matrice A' de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que l'on ait $\mathrm{AA}' = \mathrm{A}'\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$.
- $\Rrightarrow$ Dans ce cas, la matrice A' est unique. On l'appelle l'inverse de A et on la note A^{-1}.
- $\Rrightarrow$ L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et est appelé le groupe linéaire d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Pour $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ inversible, on a

$$\forall (\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{AX}_1 = \mathrm{AX}_1 \iff \mathrm{X}_1 = \mathrm{X}_2 \quad \text{et} \quad \forall (\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2) \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})^2,\ \mathrm{Y}_1\mathrm{A} = \mathrm{Y}_1\mathrm{A} \iff \mathrm{Y}_1 = \mathrm{Y}_2$$

Proposition 5.20. Propriétés des matrices inversibles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

- **a.** A^{-1} est inversible d'inverse A;
- **b.** AB est inversible et $(\mathrm{AB})^{-1} = \mathrm{B}^{-1}\mathrm{A}^{-1}$;
- **c.** $\mathrm{A}^\top$ est inversible et on a $\left(\mathrm{A}^\top\right)^{-1} = \left(\mathrm{A}^{-1}\right)^\top$.

Par une démonstration par récurrence facile, on déduit du a. que tout produit de matrices inversibles est inversible.

La notion de matrice inversible est fortement connectée à la théorie des systèmes linéaires. Par exemple, un système linéaire de la forme $\mathrm{AX} = \mathrm{B}$ où A appartient à $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ admet pour unique solution $\mathrm{X} = \mathrm{A}^{-1}\mathrm{B}$. La réciproque est vraie moyennant une quantification universelle sur le second membre B.

Proposition 5.21. Caractérisation de l'inversibilité par les systèmes linéaires

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Les propositions suivantes sont équivalentes :

- **a.** A est inversible;
- **b.** Pour tout $\mathrm{Y} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système linéaire d'équation $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ (d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathbb{K}^n$) admet une unique solution.

Ce théorème présente un intérêt pratique de taille : il ouvre la voie au calcul de A^{-1} (pour A inversible) via la résolution du système linéaire $\mathrm{AX} = \mathrm{Y}$ pour un Y quelconque.

✗ Considérons $\mathrm{A} := \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Pour $(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\begin{cases} x + 2y = y_1 \\ 2x + y = y_2 \end{cases} &\iff \begin{cases} x + 2y = y_1 \\ \quad - 3y = y_2 - 2y_1 \end{cases} \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - 2\mathrm{L}_1 \\
&\iff \begin{cases} x + 2y = y_1 \\ y = \dfrac{2y_1 - y_2}{3} \end{cases} \qquad \mathrm{L}_2 \leftarrow -\tfrac{1}{3}\mathrm{L}_2 \\
&\iff \begin{cases} x = \dfrac{-y_1 + 2y_2}{3} \\ y = \dfrac{2y_1 - y_2}{3} \end{cases}
\end{aligned}$$

On en déduit que $AX = Y$ équivaut à $X = BY$ où $B := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$. Par le théorème précédent, on a donc que A est inversible. Mais alors, $AX = Y$ équivaut à $X = A^{-1}Y$ donc

$$\forall Y \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{K}),\ BY = A^{-1}Y$$

Pour $Y_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, on en déduit que B et A^{-1} ont des premières colonnes identiques puis grâce à $Y_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, on conclut qu'il en est de même pour leur seconde colonne.

À ce stade du cours, nous pouvons caractériser facilement les matrices inversibles de $\mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

Proposition 5.22. Matrices inversibles de taille deux

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{K}^4$.

a. La matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

b. En cas d'inversibilité, $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

On note $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc$. Ce scalaire est appelé déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.

Nous généraliserons ce résultat dans la suite du cours d'Algèbre.

3.2. Opérations élémentaires sur les matrices

On peut généraliser les opérations élémentaires définies sur les lignes d'un système linéaire aux lignes et aux colonnes d'une matrice $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. En effet, la combinaison linéaire $L_i + \lambda L_j$ de deux lignes de A (resp. $C_i + \lambda C_j$ de deux colonnes de A) a un sens puisque ces lignes appartiennent à $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ (resp. à $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$). Nous reprendrons les notations employées pour les systèmes linéaires.

Définition 5.23. Matrices équivalentes

Pour $(A, B) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})^2$, on écrira respectivement

$$A \underset{L}{\sim} B\,,\ A \underset{C}{\sim} B \ \text{ et } \ A \sim B$$

si B se déduit de A par un nombre fini d'opérations élémentaires sur les lignes, sur les colonnes, sur les lignes et les colonnes. On dit alors que A et B sont équivalentes par lignes, par colonnes ou équivalentes dans le dernier cas.

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \underset{C}{\sim} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} C_3 \leftarrow C_3 + C_2$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ L_1 \leftrightarrow L_3 \end{matrix}$$

Définition 5.24. Matrices élémentaires

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(i, j) \in [\![1, n]\!]^2$.

⇛ Dans le cas où $i \neq j$, on note $P_{i,j}$ la matrice obtenue à partir de I_n en effectuant l'opération $L_i \leftrightarrow L_j$.

⇛ Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on note $D_i(\lambda)$ la matrice obtenue à partir de I_n en effectuant l'opération $L_i \leftarrow \lambda L_i$.

⇛ Lorsque $i \neq j$ et pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)$ la matrice obtenue à partir de I_n en effectuant l'opération du type $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$.

⇛ Les matrices des trois types précédents sont appelées matrices élémentaires de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Ces matrices sont qualifiées de matrices de permutation, de dilatation et de transposition.

Pour $1 \leqslant i < j \leqslant n$ et un scalaire λ, les matrices $\mathrm{P}_{i,j}$, $\mathrm{D}_i(\lambda)$ et $\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)$ s'écrivent respectivement :

$$\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & & & & & \\
 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & 0 & & & & 1 & & & \\
 & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & & & 0 & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & \\
 & & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & & i & & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & & & \\
 & & & \lambda & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
 & \begin{matrix} & & i & & j & & \end{matrix} \\
\begin{matrix} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{matrix} & \begin{pmatrix}
1 & & & & & & \\
 & \ddots & & & & & \\
 & & 1 & & \lambda & & \\
 & & & \ddots & & & \\
 & & & & 1 & & \\
 & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & 1
\end{pmatrix}
\end{array}$$

Il faut retenir qu'effectuer une opération de pivot sur les lignes d'une matrice revient à la *multiplier à gauche* par un de ces trois types de matrices élémentaires.

Proposition 5.25. Traductions matricielles des opérations élémentaires

Soit $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

a. Permutation : $\mathrm{P}_{i,j}\mathrm{A}$ est la matrice obtenue après l'opération $\mathrm{L}_i \leftrightarrow \mathrm{L}_j$ (avec $i \neq j$) sur A.

b. Dilatation : $\mathrm{D}_i(\lambda)\mathrm{A}$ est la matrice obtenue après l'opération $\mathrm{L}_i \leftarrow \lambda \mathrm{L}_i$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$) sur A.

c. Transvection : $\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)\mathrm{A}$ est la matrice après l'opération $\mathrm{L}_i \leftarrow \mathrm{L}_i + \lambda \mathrm{L}_j$ (avec $i \neq j$) sur A.

De plus, sous les hypothèses indiquées ci-dessus, les matrices $\mathrm{P}_{i,j}$, $\mathrm{D}_i(\lambda)$ et $\mathrm{T}_{i,j}(\lambda)$ sont inversibles et d'inverses respectives :

$$\mathrm{P}_{i,j}\ ,\ \mathrm{D}_i\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{et} \quad \mathrm{T}_{i,j}(-\lambda)$$

Ainsi, sans surprise, une matrice élémentaire est inversible et son inverse est la matrice de l'opération « inverse », i.e. celle qui défait la modification effectuée. Comme dans le cas des opérations sur les lignes, on vérifie que si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors :

- la matrice obtenue à partir A par l'opération $\mathrm{C}_i \leftrightarrow \mathrm{C}_j$ (avec $i \neq j$) est la matrice $\mathrm{AP}_{i,j}$;
- la matrice obtenue à partir A par l'opération $\mathrm{C}_i \leftarrow \lambda \mathrm{C}_i$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}^*$) est la matrice $\mathrm{AD}_i(\lambda)$;
- la matrice obtenue à partir A par l'opération $\mathrm{C}_i \leftarrow \mathrm{C}_i + \lambda \mathrm{C}_j$ (avec $i \neq j$) est la matrice $\mathrm{AT}_{j,i}(\lambda)$.

L'algorithme du pivot, généralisé aux lignes d'une matrice, aboutit à la proposition suivante.

Proposition 5.26. Echelonnement d'une matrice carrée

$$\forall A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})\,,\ \exists(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n\,,\ A\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star & \cdots & \star\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \star\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}$$ (le symbole $\star$ désignant des coefficients arbitraires)

Cette proposition, jointe à la suivante, nous offre un algorithme basé sur celui du pivot pour déterminer l'inversibilité d'une matrice carrée et calculer son inverse le cas échéant.

Proposition 5.27. Caractérisation des matrices inversibles

Soit $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Soit B telle que $A\sim B$. La matrice A est inversible *si et seulement si* B est inversible.

b. Soit $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{K}^n$. On a que

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \star & \cdots & \star\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \star\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}\text{ est inversible }\ \textit{si et seulement si}\quad \forall i\in[\![1,n]\!]\,,\ \lambda_i\neq 0$$

c. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si on peut la transformer en I_n au moyen d'un nombre fini d'opérations élémentaires successives sur les lignes.

d. Une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement elle est produit de matrices d'opérations élémentaires.

Le b. vaut aussi pour des opérations sur les colonnes.

✘ Par exemple :

$$A:=\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-2&1\\-2&1&1\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&3\\0&3&-3\end{pmatrix}\underset{L}{\sim}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\quad\text{par}\quad\begin{cases}L_2\leftrightarrow L_3\\ L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3+2L_1\\ L_3\leftarrow L_3+L_2\end{cases}$$

Comme la matrice $\left(\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&-3&3\\0&0&0\end{smallmatrix}\right)$ est triangulaire supérieure avec un zéro sur la diagonale, elle n'est pas inversible donc A non plus par la proposition précédente.

Considérons une matrice M inversible et O_1, ..., O_m les matrices élémentaires codant une séquence finie d'opérations de pivot sur les lignes permettant de transformer M en I_n. Par la proposition 3.2, on a donc

$$O_m\cdots O_1M=I_n$$

On en déduit que $M^{-1}=I_nM^{-1}=O_m\cdots O_1MM^{-1}=O_m\cdots O_1$. Comme $M^{-1}=O_m\cdots O_1I_n$, on obtient M^{-1} en effectuant la même séquence d'opérations de pivot sur les lignes de I_n.

✗ Par exemple :

$$\mathrm{M} := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{par} \quad \begin{cases} \mathrm{L}_2 \leftarrow \mathrm{L}_2 - \mathrm{L}_1 \\ \mathrm{L}_3 \leftarrow \mathrm{L}_3 - \mathrm{L}_1 \end{cases} \quad \text{puis} \quad \begin{cases} \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_3 \\ \mathrm{L}_1 \leftarrow \mathrm{L}_1 - \mathrm{L}_2 \end{cases}$$

En effectuant les mêmes opérations à I_3, on en déduit M^{-1} :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \underset{\mathrm{L}}{\sim} \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \mathrm{M}^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

On peut bien-sûr aussi procéder par des opérations sur les colonnes, mais il ne faut en aucun cas mélanger des opérations en lignes et en colonnes.

Le lecteur s'entraînera à ce type de calcul grâce au test (⚡ **5.5**).

4. Quelques applications des systèmes linéaires

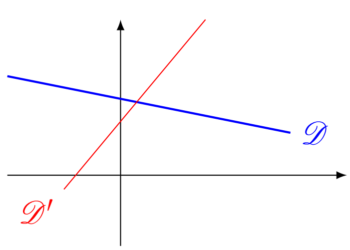
Outre leur indéniable intérêt historique et académique comme introduction à une forme d'algèbre plus abstraite, les systèmes linéaires ont principalement deux cadres d'applications :

⇛ *La résolution exacte de problèmes d'algèbre linéaire en dimension finie* : nous reviendrons en détail sur ce point mais le lecteur connaît déjà le cadre de la géométrie euclidienne du plan et de l'espace; une fois un repère choisi, les systèmes linéaires apparaissent naturellement lors des études d'intersection.

⇛ *La résolution approchée de problèmes en dimension infinie ou de problèmes non-linéaires* : cet aspect est beaucoup plus récent que le précédent et s'est beaucoup développé depuis l'avénement de l'informatique et de l'analyse numérique; nous donnerons un exemple plus bas et le lecteur est renvoyé au cours d'informatique pour de plus amples développements.

4.1. Géométrie du plan, de l'espace et au-delà

Position relative de deux droites du plan



Considérons un système de deux équations à deux inconnues réelles :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

On suppose le plan muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O}, \mathbf{e_1}, \mathbf{e_2})$. Notons respectivement $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les droites d'équations $ax + by = c$ et $a'x + b'y = c'$ alors les solutions de $\mathscr{E}$ correspondent aux coordonnées des points d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$.

Ainsi :

⇛ si les triplets (a, b, c) et (a', b', c') sont proportionnels alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont confondues et il y a une infinité de solutions;

- ⇛ si les triplets (a,b,c) et (a',b',c') ne sont pas proportionnels mais que les couples (a,b) et (a',b') le sont alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont parallèles et distinctes et il n'y a pas de solution ;
- ⇛ si les couples (a,b) et (a',b') ne sont pas proportionnels alors les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont sécantes et il y a donc une unique solution au système.

Finalement, pour que $\mathscr{E}$ admette une unique solution, il faut et il suffit que $ab'-a'b \neq 0$ d'où l'équivalence :

$$\mathscr{E} \text{ admet une unique solution} \iff \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} \neq 0$$

Position relative de deux plans de l'espace

Considérons maintenant un système de deux équations à trois inconnues réelles :

$$\mathscr{E} : \begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

On suppose l'espace muni d'un repère orthonormal $(\mathrm{O},\mathbf{e_1},\mathbf{e_2},\mathbf{e_3})$ et on note respectivement $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ les plans d'équations $ax+by+cz=d$ et $a'x+b'y+c'z=d'$ alors les solutions de $\mathscr{E}$ correspondent aux coordonnées des points d'intersection des plans $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$.

- ⇛ Tout d'abord, si les quadruplets (a,b,c,d) et (a',b',c',d') sont proportionnels alors les deux plans sont confondus donc le système admet une infinité de solutions.
- ⇛ Supposons que ces quadruplets ne sont pas proportionnels. L'intersection de $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ est alors soit vide (lorsque P et P$'$ sont parallèles non confondus), soit une droite (lorsque $\mathscr{P}$ et $\mathscr{P}'$ ne sont pas parallèles). Cela signifie que le système :

  $$\begin{cases} ax+by+cz=d \\ a'x+b'y+c'z=d' \end{cases}$$

  n'admet pas de solutions (cas des plans parallèles) ou bien en admet une infinité (cas des plans non parallèles).

4.2. Utilisation en analyse numérique

La température $(x,y,t) \mapsto \mathrm{T}(x,y,t)$ d'un milieu bidimensionnel[2] soumis à une source de chaleur est régie par l'équation suivante, dite *de la chaleur*[3] :

$$\frac{\partial \mathrm{T}}{\partial t} = \kappa\Delta\mathrm{T}+\mathrm{S} = \kappa\left(\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\mathrm{T}}{\partial y^2}\right)+\mathrm{S}$$

où la fonction S modélise la source de chaleur.

Si l'on s'intéresse au régime stationnaire, ie à une solution ϕ n'évoluant plus au cours du temps, on obtient l'équation :

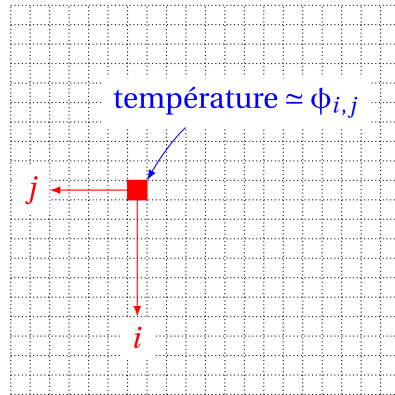
$$\kappa\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\right) = -\mathrm{S}$$

Ne disposant pas en général d'une solution explicite, on cherche pour une solution approchée en discrétisant l'espace. Par exemple si $(x,y)\in[0,1]^2$, on découpe le carré $[0,1]^2$ en un malliage de n^2

2. Les deux premières variables sont spaciales, la trosième est temporelle.
3. L'opérateur Δ est appelé *laplacien* et apparaît dans de nombreuses équations de la physique (chaleur, ondes, etc).

carrés élémentaires de même surface. Lorsque n est grand, la température sur le carré en position (i, j) est à peu près constante et notée $\phi_{i,j}$.

On note $x_{i,j} = (i/n, j/n)$. La formule de Taylor permet d'écrire que



$$\begin{cases} \phi(i+1,j) \simeq \phi(i,j) + \dfrac{1}{n}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x_{i,j}) + \dfrac{1}{2n^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x_{i,j}) \\ \\ \phi(i-1,j) \simeq \phi(i,j) - \dfrac{1}{n}\dfrac{\partial\phi}{\partial x}(x_{i,j}) + \dfrac{1}{2n^2}\dfrac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x_{i,j}) \end{cases}$$

En additionnant ces deux « *égalités* », on obtient donc une approximation de la dérivée seconde partielle de ϕ par rapport à la première variable :

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}(x_{i,j}) \simeq n^2\left(\phi_{i+1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i-1,j}\right)$$

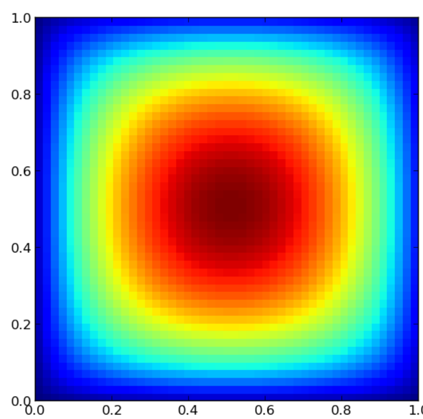
En procédant de même pour approcher la dérivée seconde par rapport à la seconde variable, on obtient une linéarisation de l'équation initiale :

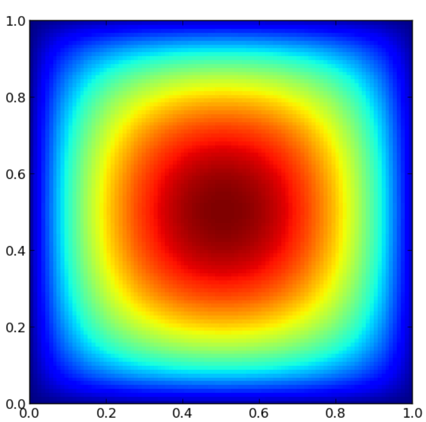
$$\kappa n^2\left(\phi_{i-1,j} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} + \phi_{i,j-1} - 2\phi_{i,j} + \phi_{i,j+1}\right) = -S_{i,j}$$

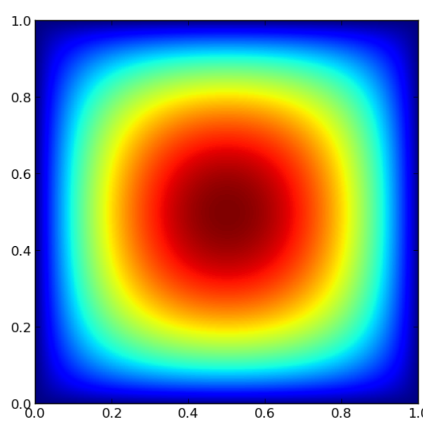
⇛ On obtient un système linéaire d'inconnues $\phi_{i,j}$ qui peut être résolu en ajoutant quelques équations représentant les conditions *aux bords* du carré.

⇛ On peut prouver que, lorsque n tend vers l'infini, la distribution de temptérature $\phi_{i,j}$ obtenue est une bonne approximation de la *solution exacte* ϕ.

⇛ En adoptant une convention de colorisation, on peut visualiser les approximations obtenues en faisant varier n afin d'améliorer la résolution.







5. Tests

5.1.

On considère dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ les matrices $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$, et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ définies par $a_{i,j} = i + j$ et $b_{i,j} = i - j$. Calculer le terme général des matrices $C = A - B$ et $D = AB$.

5.2.

On considère les deux matrices $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a. Calculer A^2, B^2 et B^3. En déduire A^n et B^n pour tout entier $n \geqslant 1$.

b. Calculer AB, AB^2, BA et B^2A.

5.3.

Soit A et B dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que $A = \lambda I_n + B$. Calculer λ en fonction de A, B et n.

5.4.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$ on note $\mathscr{S}_a$ l'ensemble de solutions du système suivant.

$$\begin{cases} -x + 2y + z = 2 \\ ax + 3y - z = 3 \\ 5x - 8y - 9z = -9 \end{cases}$$

Pour quels $a \in \mathbb{R}$ est-ce que $\mathscr{S}_a$ est vide ? contient un unique élément ? une infinité ?

5.5.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Prouver l'inversibilité et calculer l'inverse des matrices suivantes :

a. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **b.** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; **c.** $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; **d.** $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

6. Solutions

5.1.

Notons

$$C = (c_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \text{ et } D = (d_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$$

⇛ *Calcul de* C : pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a

$$c_{i,j} = a_{i,j} - b_{i,j} = 2j$$

⇛ *Calcul de* D : pour tous $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on a

$$\begin{aligned} d_{i,j} &= \sum_{k=1}^{n} a_{i,k}b_{k,j} = \sum_{k=1}^{n}(i+k)(k-j) \\ &= (i-j)\sum_{k=1}^{n} k + \sum_{k=1}^{n} k^2 - ij\sum_{k=1}^{n} 1 \\ &= (i-j)\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - nij \end{aligned}$$

5.2.

a. On a $A^2 = I_3$, $B^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$ et $B^3 = I_3$. On en déduit les calculs suivants :

⇛ *Puissances de* A : si n est pair $A^n = I_3$, sinon $A^n = A$.

⇛ *Puissances de* B : si $n \equiv 0\,[3]$, $B^n = I_3$; si $n \equiv 1\,[3]$, $B^n = B$; si $n \equiv 2\,[3]$, $B^n = B^2$.

b. On a

$$AB = \begin{pmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix},\quad BA = \begin{pmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

puis $AB^2 = \left(\begin{smallmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{smallmatrix}\right)$ et $B^2A = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{smallmatrix}\right)$.

5.3.

Par linéarité de la trace,

$$\operatorname{tr} A = n\lambda + \operatorname{tr} B$$

d'où $\lambda = \dfrac{\operatorname{tr} A - \operatorname{tr} B}{n}$.

5.4.

On applique la méthode du pivot de Gauss. En notant $\mathscr{E}$ ce système, on a

$$\mathscr{E} \iff \begin{cases} -x+2y+z &= 2\\ ax+3y-z &= 3\\ 5x-8y-9z &= -9 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y+z &= 2\\ (3+2a)y+(a-1)z &= 3+2a\\ 2y-4z &= 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y+z &= 2\\ 2y-4z &= 1\\ (3+2a)y+(a-1)z &= 3+2a \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -x+2y+z &= 2\\ 2y-4z &= 1\\ (5a+5)z &= \frac{3}{2}+a \end{cases}$$

Le système de l'énoncé est donc équivalent au système

$$\begin{cases} -x+2y+z = 2\\ 2y-4z = 1\\ 5(a+1)z = \frac{3}{2}+a \end{cases}$$

⇛ Si $a = -1$ la dernière ligne se lit $0 = \frac{1}{2}$ et donc $\mathscr{S}_{-1} = \varnothing$.

⇛ Si $a \neq -1$ on résout en remontant du bas vers le haut et on trouve une solution unique (dont le calcul n'est pas demandé).

Ainsi $\mathscr{S}_a$ n'est jamais un ensemble infini.

5.5.

On applique à chaque fois la méthode du pivot en effectuant les opérations sur la matrice identité en parallèle.

a. On a

$$\begin{pmatrix} 1&0&1\\2&-1&1\\-1&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + L_1$,

$$\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&-1&-1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\-2&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$$

puis, en effectuant $L_2 \leftrightarrow L_3$,

$$\begin{pmatrix} 1&0&1\\0&1&0\\0&-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&0&0\\1&0&1\\-2&1&1\end{pmatrix}$$

continuons par $L_3 \leftrightarrow -(L_3 \leftarrow L_3 + L_2)$,

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

enfin, par $L_1 \leftrightarrow L_1 - L_3$,

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

La matrice A est donc inversible d'inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

b. On a

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\2&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$,

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&-2&3\\0&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-2&0&1\end{pmatrix}$$

puis, en effectuant $L_2 \leftrightarrow -L_3$ et $L_3 \leftarrow L_2$,

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&-2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\-2&0&1\\-2&1&0\end{pmatrix}$$

continuons par $L_3 \leftrightarrow L_3 \leftarrow L_3 + 2L_2$,

$$\begin{pmatrix}1&1&-1\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\2&0&-1\\2&1&-2\end{pmatrix}$$

puis, par $L_2 \leftrightarrow L_2 + L_3$ et $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3$,

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&1&-3\\2&1&-2\end{pmatrix}$$

enfin, par $L_2 \leftrightarrow L_1 \leftrightarrow L_1 - L_2$,

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0&1\\4&1&-3\\2&1&-2\end{pmatrix}$$

La matrice B est donc inversible d'inverse

$$B^{-1} = \begin{pmatrix}-1&0&1\\4&1&-3\\2&1&-2\end{pmatrix}$$

c. On a

$$\begin{pmatrix}2&0&1\\-1&1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

et, par l'opération $L_1 \leftrightarrow L_3$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\-1&1&1\\2&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$$

puis, en effectuant les opérations $L_2 \leftrightarrow L_2 + L_1$ et $L_3 \leftarrow (L_3 - 2L_1)/3$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&1\\1/3&0&-2/3\end{pmatrix}$$

enfin, par $L_1 \leftrightarrow L_1 + L_3$,

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/3&0&1/3\\0&1&1\\1/3&0&-2/3\end{pmatrix}$$

La matrice C est donc inversible d'inverse

$$C^{-1} = \begin{pmatrix}1/3&0&1/3\\0&1&1\\1/3&0&-2/3\end{pmatrix}$$

d. On a

$$\begin{pmatrix}2&1&1&3\\1&0&-1&0\\0&2&1&1\\4&3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

et, par l'opération $L_1 \leftrightarrow L_2$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\2&1&1&3\\0&2&1&1\\4&3&2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&3\\0&2&1&1\\0&3&6&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&1&0\\0&-4&0&1\end{pmatrix}$$

et, par $L_4 \leftarrow L_4 - (L_2 + L_3)$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&3\\0&2&1&1\\0&0&2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-2&0&0\\0&0&1&0\\-1&-2&-1&1\end{pmatrix}$$

continuons par les opérations $L_4 \leftarrow L_4/2$ et $L_3 \leftarrow -(L_3 - 2L_2)/5$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&3\\0&0&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-2&0&0\\2/5&-4/5&-1/5&0\\-1/2&-1&-1/2&1/2\end{pmatrix}$$

puis par $L_3 \leftrightarrow L_4$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&3\\0&0&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-2&0&0\\-1/2&-1&-1/2&1/2\\2/5&-4/5&-1/5&0\end{pmatrix}$$

effectuons $L_4 \leftarrow L_4 - L_3$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&3&3\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\1&-2&0&0\\-1/2&-1&-1/2&1/2\\9/10&1/5&3/10&-1/2\end{pmatrix}$$

puis $L_2 \leftarrow L_2 - 3(L_3 + L_4)$,

$$\begin{pmatrix}1&0&-1&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1/5&2/5&3/5&0\\-1/2&-1&-1/2&1/2\\9/10&1/5&3/10&-1/2\end{pmatrix}$$

et enfin $L_1 \leftarrow L_1 + L_3$,

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/2&0&-1/2&1/2\\-1/5&2/5&3/5&0\\-1/2&-1&-1/2&1/2\\9/10&1/5&3/10&-1/2\end{pmatrix}$$

La matrice D est donc inversible d'inverse

$$D^{-1} = \begin{pmatrix}-1/2&0&-1/2&1/2\\-1/5&2/5&3/5&0\\-1/2&-1&-1/2&1/2\\9/10&1/5&3/10&-1/2\end{pmatrix}$$