



*La combinatoire s'intéresse aux méthodes permettant de compter les éléments dans des ensembles finis (combinatoire énumérative ou analyse combinatoire) et à la recherche des optima dans les configurations ainsi qu'à leur existence (combinatoire extrémale).*



*Troupeau de moutons dans le Nivernais, Rosa Bonheur*

<b>6</b>	<b>Dénombrement</b>	<b>1</b>
1	Théorie des cardinaux	4
1.1	Cardinal d'un ensemble	4
1.2	Applications et cardinaux	5
2	Analyse combinatoire	7
2.1	Intersection, réunion et différence d'ensembles	7
2.2	Le lemme des berger	8
2.3	Produit cartésien et $p$ -listes	9
2.4	Injections entre ensembles finis et arrangements	10
2.5	Parties d'un ensemble et combinaisons	11
3	Les trois grandes stratégies de dénombrement	14
3.1	Dénombrer via des bijections	14
3.2	Dénombrer au moyen d'une construction	15
3.3	Dénombrer par récurrence	17
4	Combinaisons avec répétitions	18
4.1	Modélisation par billes et bâtons	18
4.2	Stratégie de la récurrence	19
5	Tests	21
6	Solutions	23

**L**A combinatoire remonte à l'Antiquité : *Plutarque* rapporte ainsi un débat entre *Chrysippe* et *Hipparche* sur le nombre de façons de combiner dix propositions, le résultat n'ayant été compris qu'au XXe siècle.

Parmi, les autres précurseurs, on peut citer *Bha-skara II* au XIIe siècle (nombre de choix de p éléments parmi n), *Raymond Lulle* au XIIIe siècle, *Gersonide* au début du XIVe siècle (rapport entre le nombre d'arrangements et le nombre de combinaison dans le traité « *L'art du calcul* »), *Michael Stifel* au XVIe siècle (première approche du triangle de Pascal).

Elle se développe de façon significative à partir du XVIIe siècle, en même temps que le calcul des probabilités avec *Blaise Pascal* et *Pierre de Fermat*.

Initialement, elle avait pour objet la résolution des problèmes de dénombrement, provenant de l'étude des jeux de hasard. Plus tard, elle se lia à la théorie des nombres et à la théorie des graphes.



**Blaise Pascal**



**Fermat**



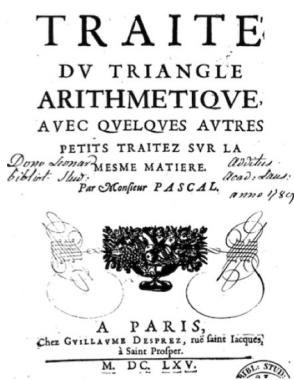
**Lulle**



**Gersonide**



**Stifel**



**Un traité de Pascal**



**Bha-skara II**



**L'art du calcul**

## 1. Théorie des cardinaux

L'objectif de cette section est de fonder théoriquement la notion de cardinal.

Tous les énoncés que nous allons y rencontrer sont des évidences. Plus que les démonstrations qu'il est raisonnable d'admettre en première lecture, nous incitons le lecteur à donner du sens, notamment à travers des diagrammes sagittaux, aux différentes propositions.

On adopte la convention classique suivante :  $\llbracket 1, n \rrbracket = \emptyset$  si  $n = 0$ .

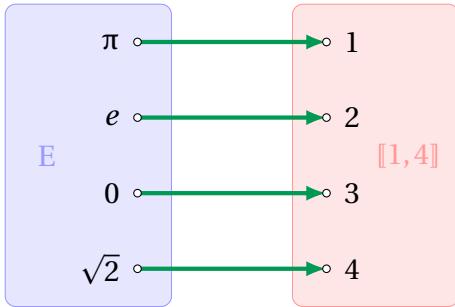
### 1.1. Cardinal d'un ensemble

L'idée de la définition du cardinal est simple, un ensemble  $E$  est fini si on peut le mettre en bijection avec un ensemble de la forme  $\llbracket 1, n \rrbracket$  où  $n \in \mathbb{N}$ .

#### Définition 6.0. Ensemble fini, cardinal

Soit  $E$  un ensemble.

- ⇒ On dit que  $E$  dit fini (ou encore de cardinal fini) s'il existe  $n \in \mathbb{N}$  et  $\phi : E \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$  bijective.
- ⇒ Un tel entier naturel  $n$  est alors unique et appelé cardinal de  $E$ . On le note  $\text{card}(E)$ ,  $\#E$  ou encore  $|E|$ .
- ⇒ Un ensemble  $E$  qui n'est pas fini est dit infini.



D'un point de vu intuitif, une bijection

$$\phi : E \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$$

est tout simplement *une numérotation des éléments de  $E$*  : à tout élément de  $E$ , on associe bijectivement un élément de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ .

On trouvera ci-contre une illustration des relation

$$E := \{\pi, e, 0, \sqrt{2}\} = 4 \text{ et } |E| = 4$$

Pour tout couple d'entiers naturels  $(n, m)$  tels que  $m \leq n$ , les ensembles  $\llbracket 1, n \rrbracket$  et  $\llbracket m, n \rrbracket$  sont finis de cardinaux respectifs  $n$  et  $n - m + 1$ .

L'unicité dans la définition précédente est une conséquence du lemme suivant, que nous généraliserons par la suite.

#### Lemme 6.1.

Soit  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ . S'il existe une injection  $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ , alors  $n \leq m$ .

Le lemme suivant préfigure les opérations sur les cardinaux que nous allons établir dans la suite du cours.

#### Lemme 6.2.

Soit  $E$  un ensemble fini et  $x_0 \in E$ . L'ensemble  $E \setminus \{x_0\}$  est fini de cardinal  $|E| - 1$ .

Ce résultat suivant nous offre un nouveau moyen<sup>1</sup> de démontrer l'égalité de deux ensembles lorsqu'ils sont finis.

### Proposition 6.3. Parties d'un ensemble fini

Soit  $E$  un ensemble fini et  $A$  une partie de  $E$ .

Alors  $A$  est finie et  $|A| \leq |E|$ . De plus  $A = E$  si et seulement si  $|A| = |E|$ .

### Prouver que deux ensembles finis sont égaux

Pour montrer que des ensembles finis  $A$  et  $B$  sont égaux il suffit d'établir que  $A \subset B$  et que  $|A| = |B|$ .

La conclusion de ce premier paragraphe est un théorème qui offre une première méthode de dénombrement : pour calculer le cardinal d'un ensemble, il suffit *de le mettre en bijection* avec un ensemble de cardinal connu.

### Proposition 6.4. Ensemble en bijection avec un ensemble fini

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles. Si  $E$  est fini et il existe  $\phi : E \rightarrow F$  bijective, alors  $F$  est fini et  $|E| = |F|$ .

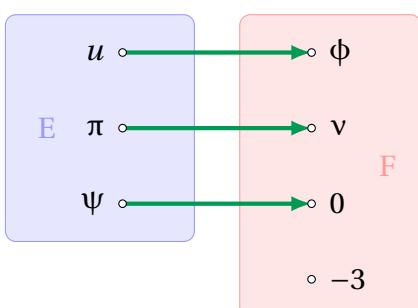
Par exemple, pour  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$  tels que  $m \leq n$ , on déduit de la bijectivité de l'application

$$\begin{aligned} \llbracket m, n \rrbracket &\longrightarrow \llbracket 1, n - m + 1 \rrbracket \\ x &\longmapsto x - m + 1 \end{aligned}$$

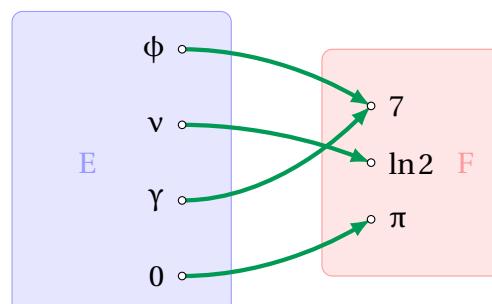
que  $\llbracket m, n \rrbracket$  admet  $n - m + 1$  pour cardinal.

## 1.2. Applications et cardinaux

D'un point de vue intuitif, l'existence d'une injection de  $E$  dans  $F$ , ensembles finis, impose l'inégalité  $|E| \leq |F|$ . De même, l'existence d'une surjection de  $E$  sur  $F$ , entraîne l'inégalité  $|F| \leq |E|$ . On méditera les schémas suivants.



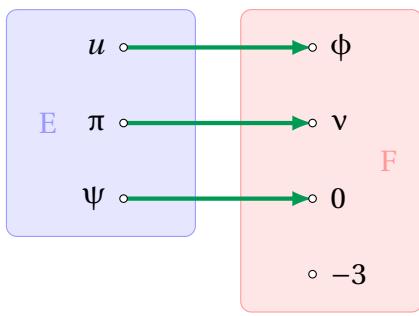
On ne peut « injecter »  $E$  dans  $F$  que si  $|E| \leq |F|$  : il y a au maximum  $|F|$  flèches (par injectivité de  $f$ ) or il y en a  $|E|$  (par définition d'une application).



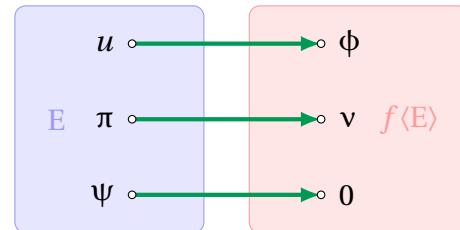
On ne peut construire une surjection  $E$  sur  $F$  que si  $|F| \leq |E|$  : il faut au moins  $|F|$  flèches (par surjectivité de  $f$ ) or il y en a exactement  $|E|$  (par définition d'une application).

1. Autre que la double inclusion.

D'une manière générale, si  $f : E \rightarrow F$  est injective, alors  $f$  réalise une bijection de  $E$  sur  $f\langle E \rangle$ .



En effet, la co-restriction  $f|^{f\langle E \rangle}$  de  $f$  à  $f\langle E \rangle$  est une bijection de  $E$  sur  $f\langle E \rangle$ ;  $f\langle E \rangle$  peut se voir comme « une copie » de  $E$  dans  $F$ .



### Proposition 6.5. Injections

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis et  $f : E \rightarrow F$  une injection. On a  $|f\langle E \rangle| = |E|$  et donc  $|E| \leq |F|$ .

Cette proposition permet de formaliser le fameux principe des tiroirs :

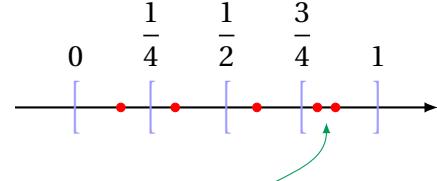
### Proposition 6.6. Principe des tiroirs (§ 6.1)

Si  $n+1$  chaussettes sont rangées dans  $n$  tiroirs, alors deux chaussettes au moins se retrouvent dans le même tiroir.

Soit  $(a_i)_{1 \leq i \leq 5}$  cinq réels de  $[0, 1]$ . On déduit du lemme des tiroirs l'existence de  $(i, j) \in \llbracket 1, 5 \rrbracket^2$  tel que  $i \neq j$  et

$$0 \leq a_i - a_j \leq \frac{1}{4}$$

Les quatre tiroirs sont  $[0, \frac{1}{4}[$ ,  $[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}[$ ,  $[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}[$ ,  $[\frac{3}{4}, 1]$  et les cinq chaussettes sont les  $a_i$ .



Deux réels à une distance inférieure à  $\frac{1}{4}$

### Proposition 6.7. Surjections

Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles finis et  $f : E \rightarrow F$  une application surjective, alors  $|F| \leq |E|$ .

En particulier, pour une application quelconque  $f : E \rightarrow F$ , on a  $|f\langle E \rangle| \leq |E|$  car  $f$  réalise une surjection de  $E$  sur  $f\langle E \rangle$ .

Dans le cas d'ensembles finis, on dispose de la caractérisation suivante des bijections.

### Proposition 6.8. Bijections

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles de même cardinal fini et  $f : E \rightarrow F$ . Alors  $f$  est bijective si et seulement si  $f$  est injective, si et seulement si  $f$  est surjective.

### Définition 6.9. Fonction indicatrice d'une partie

Soit  $E$  un ensemble et  $A \in \mathcal{P}(E)$ . On appelle fonction indicatrice de  $A$ , notée  $\mathbb{1}_A$  ou  $\chi_A$ , l'application définie par :

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow \{0, 1\} \\ x &\longmapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

### Calcul du cardinal d'une partie par la fonction indicatrice

Pour tout ensemble fini et  $A \subset E$ , on a

$$|A| = \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x), \quad \text{où } \mathbb{1}_A \text{ est la fonction indicatrice de } A$$

## 2. Analyse combinatoire

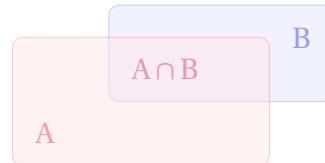
Dans ce paragraphe, nous allons développer des outils permettant de calculer :

- ⇒ des cardinaux d'ensembles construits au moyen d'opérations ;
- ⇒ des cardinaux d'ensembles d'applications<sup>2</sup>.

### 2.1. Intersection, réunion et différence d'ensembles

On ne peut rien dire en général de  $A \cap B$  si ce n'est que  $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$ . En revanche, on dispose de la formule « *d'inclusion-exclusion* » :

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



On la comprend facilement : en calculant  $|A| + |B|$ , on compte deux fois les éléments de  $A \cap B$ , ce que l'on rectifie en retranchant  $|A \cap B|$ .

### Proposition 6.10. Réunion et différence de deux ensembles finis (§ 6.2)

Pour tous ensembles finis  $E$  et  $F$  :

- Si  $E$  et  $F$  sont disjointes, alors  $E \cup F$  est fini et  $|E \cup F| = |E| + |F|$ ;
- $E \setminus F$  est fini et  $|E \setminus F| = |E| - |E \cap F|$ ;
- Si  $F \subset E$ , alors  $C_E F$  est fini et  $|C_E F| = |E| - |F|$ ;
- $E \cup F$  est fini et  $|E \cup F| = |E| + |F| - |E \cap F|$ .

On pourra aborder ici le test (§ 6.3). On généralise sans peine à une réunion finie d'ensembles disjoints.

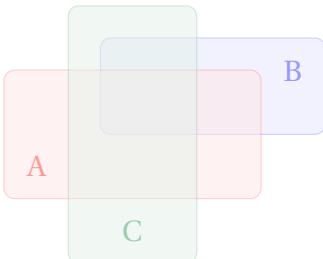
2. Par exemple  $F^E$ .

### Proposition 6.11. Extension à une réunion disjointe finie (§ 6.4)

Pour des ensembles  $A_1, \dots, A_n$  deux à deux disjoints, on a  $\left| \bigsqcup_{i=1}^n A_i \right| = \sum_{i=1}^n |A_i|$ .

En particulier, si  $\mathcal{M}$  est une partition d'un ensemble fini  $E$ , alors  $|E| = \sum_{A \in \mathcal{M}} |A|$ .

La formule d'inclusion-exclusion admet une généralisation intéressante mais hors programme. Commençons par le cas de trois ensembles finis  $A$ ,  $B$  et  $C$ .



On trouve

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

En calculant  $|A| + |B| + |C|$ , on compte deux fois les éléments de  $A \cap B$ , de  $B \cap C$  et de  $C \cap A$ , et après avoir retrancher  $|A \cap B|$ ,  $|B \cap C|$  et  $|C \cap A|$ , on a retrancher une fois de trop les éléments de  $A \cap B \cap C$ .

### Proposition 6.12. Formule d'inclusion-exclusion, du crible ou encore de Poincaré

Pour des ensembles finis  $A_1, \dots, A_m$ , on a

$$\left| \bigcup_{i=1}^m A_i \right| = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subseteq [1, m] \\ |I|=k}} \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right| = \sum_{k=1}^m (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq m} \left| \bigcap_{j=1}^k A_{i_j} \right|$$

## 2.2. Le lemme des bergers

Le théorème précédent admet un cas particulier très important connu sous le nom *lemme des bergers*. Il s'agit d'un outil fondamental pour dénombrer de façon rigoureuse mais moins formelle qu'avec les bijections.

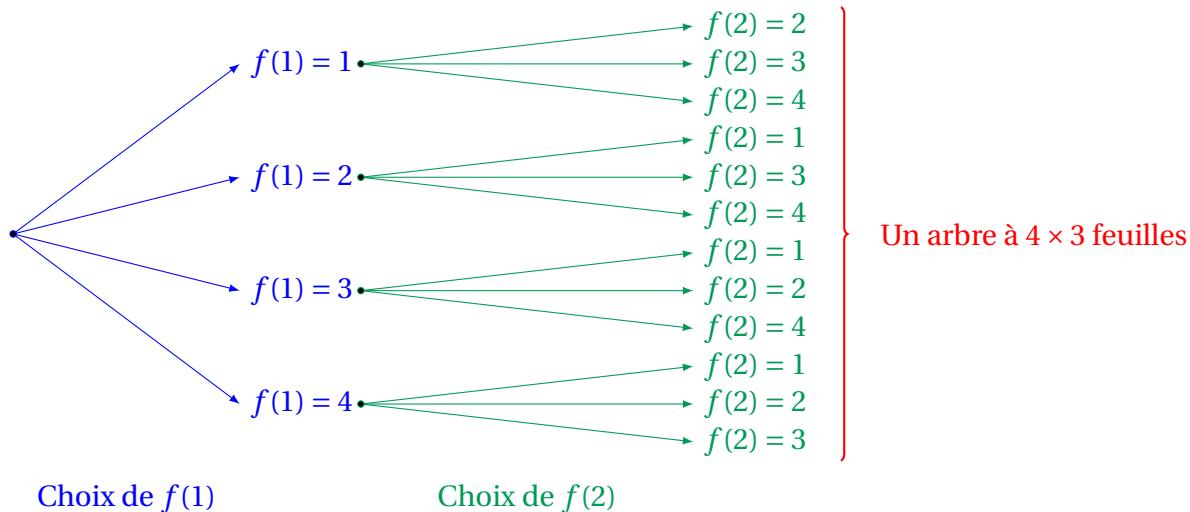
### Lemme 6.13. des Bergers

Pour des ensembles  $A_1, \dots, A_n$  deux à deux disjoints de même cardinal  $p$ , on a  $\left| \bigsqcup_{i=1}^n A_i \right| = np$ .

L'appellation « *lemme des bergers* » mérite une petite explication : pour compter le nombre de pattes de son troupeau, un berger peut se contenter de multiplier par quatre le nombre de moutons<sup>3</sup>.

Nous allons l'illustrer par le dénombrement des injections de  $[1, 2]$  dans  $[1, 4]$ . Pour construire une telle injection  $f : [1, 2] \rightarrow [1, 4]$ , on commence par choisir  $f(1)$  dans  $[1, 4]$  (quatre choix possibles). Pour chacun de ces choix, il faut ensuite choisir  $f(2)$  parmi les 3 valeurs restantes (3 choix possibles). Au total, on obtient  $4 \times 3$ . Cette construction d'une injection de  $[1, 2]$  dans  $[1, 4]$  se visualise bien au moyen d'un arbre :

3. Ici  $n$  est le nombre de moutons et  $p = 4$ .



C'est bien le lemme des berger que l'on applique ici. Pour  $i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ , on note  $A_i$  l'ensemble des injections de  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$  telles que  $f(1) = i$ . On a  $\forall i \in \llbracket 1, 4 \rrbracket$ ,  $\#A_i = 3$ . Ainsi  $|A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4| = 4 \times 3$  et  $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$  est l'ensemble des injections de  $\llbracket 1, 2 \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, 4 \rrbracket$ . Bien-sûr, dans la pratique, on ne formalise pas nos raisonnements en revenant à la forme ensembliste du lemme du berger et on ne trace pas des arbres.

### Dénombrement par lemme des berger (§ 6.5)

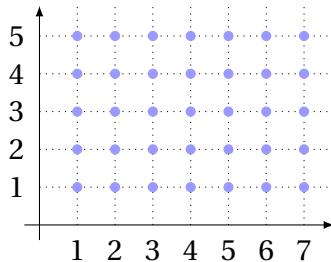
On pourra appliquer le lemme des berger pour dénombrer des objets à partir d'une construction en plusieurs étapes successives avec le même nombre de choix à chaque fois.

## 2.3. Produit cartésien et $p$ -listes

L'interprétation géométrique d'un couple  $(a, b)$  permet de deviner que, si  $A$  et  $B$  sont finis, alors  $A \times B$  aussi et

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

Voir l'exemple de  $\llbracket 1, 7 \rrbracket \times \llbracket 1, 5 \rrbracket$  ci-contre.



### Proposition 6.14. Produit cartésien

- a. Si  $E$  et  $F$  deux ensembles finis, alors  $E \times F$  est fini et  $|E \times F| = |E| \times |F|$ .
- b. Si  $A_1, \dots, A_m$  sont des ensembles finis, alors  $\prod_{i=1}^m A_i$  est fini et  $\left| \prod_{i=1}^m A_i \right| = \prod_{i=1}^m |A_i|$ .
- c. Si  $E$  est fini et  $p \in \mathbb{N}$ , alors  $E^p$  est fini et  $|E^p| = |E|^p$ .

### Définition 6.15. Listes, $p$ -listes

Soient  $E$  un ensemble et  $p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $p$ -liste (ou  $p$ -uplet) de  $E$  tout élément de  $E^p$ .

Dans une liste, l'ordre des éléments est important contrairement aux ensembles. Ainsi,  $(5, 2, 1) \neq (2, 5, 1)$ . Un même élément peut figurer plusieurs fois dans une liste. Par exemple,  $(1, 1, 2, 3)$  est une 4-liste de l'ensemble  $\{1, 2, 3\}$ .

### Modélisation d'un tirage avec remise

Les listes sont utilisées pour modéliser des tirages successifs avec remise dans une urne ou un jeu de cartes – avec remise car les répétitions sont autorisées.

On dénombre par exemple  $32^4$  tirages avec remise possibles de 4 cartes parmi 32.

Le calcul du cardinal de  $F^E$  en fonction de ceux de  $E$  et  $F$  est une application de ce qui précède. C'est d'ailleurs cette propriété qui est à l'origine de la notation  $F^E$ .

### Proposition 6.16. Applications entre deux ensembles finis

Si  $E$  et  $F$  sont deux ensembles finis, alors  $F^E$  est fini et  $|F^E| = |F|^{|E|}$ .

## 2.4. Injections entre ensembles finis et arrangements

Soit  $n$  et  $p$  deux entiers naturels tels que  $1 \leq p \leq n$ . Une injection de  $[1, p]$  dans  $[1, n]$  se construit en choisissant  $f(1)$  dans  $[1, n]$  ( $n$  possibilités), puis en choisissant  $f(2)$  ( $n - 1$  possibilités car  $f(1)$  est déjà choisi), puis en choisissant  $f(3)$  ( $n - 2$  possibilités car  $f(1)$  et  $f(2)$  sont déjà choisis), etc. On trouve finalement

$$n(n-1)\cdots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$$

Ce type de raisonnement consiste à appliquer *en cascade* le lemme des bergeres.

Les arrangements sont aux listes ce que les injections sont aux applications.

### Définition 6.17. Arrangements

Soit  $E$  un ensemble et  $p \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $p$ -arrangement de  $E$  toute  $p$ -liste de  $E$  formée d'éléments distincts de  $E$ .

### Proposition 6.18. Injections, bijections et permutations (§ 6.6)

Soit  $E$  et  $F$  deux ensembles finis de cardinaux respectifs  $p$  et  $n$ . Le nombre d'injections de  $E$  dans  $F$  est égal à :

$$\begin{cases} 0 & \text{si } n < p \\ \frac{n!}{(n-p)!} & \text{sinon} \end{cases}$$

C'est aussi le nombre de  $p$ -arrangement de  $E$ .

Les arrangements sont importants car ils modélisent l'une des situations typiques de tirage.

### Arrangements et modélisation

Les  $p$ -arrangements de  $E$  ensemble à  $n$  éléments sont utilisés pour modéliser :

- ⇒ des tirages successifs sans remise dans une urne ou un jeu de cartes – sans remise car les répétitions sont interdites.
- ⇒ le choix de  $p$  objets parmi  $n$  avec ordre et sans répétition.

Par exemple, on compte  $32 \times 31 \times 30 \times 29$  tirages sans remise possibles de 4 cartes parmi 32.

### Définition 6.19. Permutation

Soit  $E$  un ensemble. On appelle permutation de  $E$  toute bijection de  $E$  sur  $E$ . On note  $\mathcal{S}(E)$  ou encore  $\mathfrak{S}(E)$  l'ensemble des permutations de  $E$ .

### Proposition 6.20. Bijections, permutations

Soient  $E$  et  $F$  des ensembles finis de même cardinal  $n$ .

- a. Le nombre de bijections de  $E$  dans  $F$  est égal à  $n!$ .
- b. En particulier,  $|\mathfrak{S}(E)| = n!$ .

## 2.5. Parties d'un ensemble et combinaisons

### Proposition 6.21. Ensemble des parties d'un ensemble

Si  $E$  est un ensemble fini, alors  $\mathcal{P}(E)$  est fini et  $|\mathcal{P}(E)| = 2^{|E|}$ .

### Définition 6.21. Combinations

Soit  $E$  un ensemble fini de cardinal  $n$  et  $k \in \mathbb{N}$ .

- ⇒ On appelle  $k$ -combinaison de  $E$  toute partie de  $E$  de cardinal  $k$ .
- ⇒ On note  $\binom{n}{k}$  le nombre de  $k$ -combinaison de  $E$ .

La différence entre  $k$ -arrangements et  $k$ -combinaisons de  $E$  est que les premiers sont ordonnés contrairement aux seconds. Pour construire un  $k$ -arrangement de  $E$ , on commence par :

- ✓ On choisit *sans ordre* les éléments qui vont y figurer : il y a  $\binom{n}{k}$  possibilités;
- ✓ puis on ordonne ces  $k$  éléments : il y a  $k!$  permutations possibles de ces éléments.

On conclut donc par le lemme des bergers que  $\binom{n}{k} k! = \frac{n!}{(n-k)!}$ .

### Proposition 6.22. Parties à $k$ éléments

Soit  $E$  un ensemble,  $n := |E|$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . Le nombre de  $k$ -combinaisons de  $E$  vaut  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ .

### Combinaisons et modélisation (§ 6.7)

Les combinaisons sont utilisées pour modéliser :

- ⇒ Le choix de  $k$  objet(s) parmi  $n$  sans ordre ni répétition.
- ⇒ Les tirages simultanés dans une urne ou un jeu de cartes.

Voici quelques situations où les combinaisons interviennent.

- ✗ On compte  $\binom{32}{4}$  tirages simultanés de 4 cartes parmi 32.
- ✗ Le nombre d'anagramme du mot ANAGRAMME est égal à  $\binom{9}{3}\binom{6}{1}\binom{5}{1}\binom{4}{2}\binom{2}{1}\binom{1}{1} = \frac{9!}{3!2!}$ .
  - ✓ Construisons un anagramme de ce mot. On considère l'emplacement des neuf lettres du mot à construire :



- ✓ Puis on place successivement les différentes lettres :

$$\underbrace{\binom{9}{3}}_{\text{choix des positions des 3 «A»}}, \underbrace{\binom{6}{1}}_{\text{du «N»}}, \underbrace{\binom{5}{1}}_{\text{du «G»}}, \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{des 2 «M»}}, \underbrace{\binom{2}{1}}_{\text{du «E»}}, \underbrace{\binom{1}{1}}_{\text{du «R»}}$$

choix des positions des 3 «A», du «N», du «G», des 2 «M», du «E», du «R»

- ✓ On conclut par le lemme des bergers.
- ✗ Pour  $k \leq n$ , le nombre d'applications strictement croissantes de  $\llbracket 1, k \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$  est égal à  $\binom{n}{k}$ .

En effet, définir une telle application revient à choisir  $k$  éléments distincts de  $E$  sans ordre ( $\binom{n}{k}$  possibilités) puis à les ranger dans l'ordre croissant (une seule possibilité).

Le lecteur est renvoyé au cours ALG 3 pour les aspects numériques comme le triangle de Pascal ou les preuves au moyen de l'expression comme quotient de factorielles. On retiendra les propriétés suivantes :

### Proposition 6.23. Propriétés des coefficients binomiaux

- a. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on a  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ .

b. Pascal : pour tout  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ , on a  $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$ .

c. Vandermonde : pour  $(p, n, m) \in \mathbb{N}^*$ ,  $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{m+n}{p}$  en part.  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .

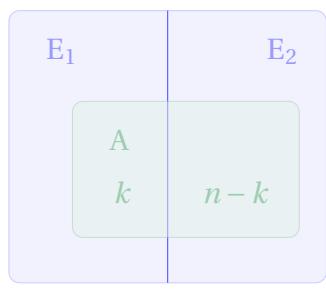
Ces formules peuvent être obtenues par du calcul sur les factorielles mais également par des arguments combinatoires. La méthode est classique et très largement répandue :

### Prouver une formule par double comptage (§ 6.8)

On calcule de deux manières différentes un même cardinal.

Prenons l'exemple du cas particulier de la formule de Vandermonde :  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$  et  $E$  un ensemble de cardinal  $2n$ . On dénombre les parties à  $n$  éléments de  $E$ . Notons  $\mathcal{E}_n$  l'ensemble formé de ces parties. D'après le cours, il y en a  $\binom{2n}{n}$ . On va compter ces parties d'une autre façon en partitionnant  $E$  en deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$  de cardinal  $n$ . Pour  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $\mathcal{E}_{n,k}$  l'ensemble des parties  $A$  de  $E$  à  $n$  éléments telles que  $\#(A \cap E_1) = k$ .



- ✓ On a  $\mathcal{E}_n = \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{E}_{n,k}$ .
- ✓ On construit  $A \in \mathcal{E}_{n,k}$  en choisissant d'abord  $A \cap E_1$  : il y a  $\binom{n}{k}$  possibilités ; puis en choisissant  $A \cap E_2$  : il y a  $\binom{n}{n-k}$  possibilités. On a donc  $\#\mathcal{E}_{n,k} = \binom{n}{k} \binom{n}{n-k}$  par le lemme des bergers.
- ✓ Ainsi  $\binom{2n}{n} = \left| \bigsqcup_{k=0}^n \mathcal{E}_{n,k} \right| = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{n}{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2$ .

Newton démontra la formule du binôme par des arguments combinatoires. Commençons par le cas où  $n = 3$ . En développant  $(a+b)^3$  par distributivité, on obtient  $2^3$  termes :

$$\begin{aligned} (a+b)^3 &= (\textcolor{red}{a}+\textcolor{blue}{b})(\textcolor{red}{a}+\textcolor{blue}{b})(\textcolor{red}{a}+\textcolor{blue}{b}) = \textcolor{red}{a}\textcolor{blue}{a}\textcolor{red}{a} + \textcolor{red}{a}\textcolor{blue}{a}\textcolor{blue}{b} + \textcolor{red}{a}\textcolor{blue}{b}\textcolor{red}{a} + \textcolor{red}{a}\textcolor{blue}{b}\textcolor{blue}{b} + \textcolor{blue}{b}\textcolor{red}{a}\textcolor{red}{a} + \textcolor{blue}{b}\textcolor{red}{a}\textcolor{blue}{b} + \textcolor{blue}{b}\textcolor{blue}{b}\textcolor{red}{a} + \textcolor{blue}{b}\textcolor{blue}{b}\textcolor{blue}{b} \\ &= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \end{aligned}$$

Plus généralement, le développement de  $(a+b)^n$  comporte  $2^n$  termes de la forme  $F_1 F_2 \cdots F_n$  avec  $F_i = a$  ou  $b$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Le nombre de termes  $F_1 F_2 \cdots F_n$  où  $a$  apparaît  $k$  fois est  $\binom{n}{k}$  (on choisit les  $k$  facteurs  $F_i$  valant  $a$  parmi les  $n$ ). Pour un tel terme, on a  $F_1 F_2 \cdots F_n = a^k b^{n-k}$ . On en déduit la formule du binôme.

### Proposition 6.24. Formule du binôme

Pour tout  $(a, b, n) \in \mathbb{C}^2 \times \mathbb{N}$ , on a  $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ .

### 3. Les trois grandes stratégies de dénombrement

On peut dégager trois grandes stratégies de dénombrement d'un ensemble E :

- ⇒ mettre en bijection E avec un ensemble de cardinal connu;
- ⇒ décomposer la construction d'un élément quelconque de E en plusieurs choix élémentaires où l'on reconnaît une des situations type (listes, combinaisons, etc). Le lemme des bergers et la formule du cardinal d'une union disjointe permettent de conclure.
- ⇒ rechercher une relation de récurrence.

Nous avons déjà abondamment illustré ces différentes méthodes au travers des démonstrations données dans le paragraphe d'analyse combinatoire. Dans cette section, nous allons revenir sur ces différentes approches de façon plus systématique, en mettant en évidence leurs intérêts et leurs dangers.

Les trois approches seront chacune illustrées par plusieurs situations classiques.

#### Un conseil pour apprendre à compter

Pour bien compter les éléments d'un ensemble, il est indispensable d'en avoir une représentation (géométrique ou plus abstraite) au moyen d'objets connus. D'où l'importance des schémas, des arbres, etc.

#### 3.1. Dénombrer via des bijections

D'un point de vue pratique, pour dénombrer un ensemble F, on réduit le problème au dénombrement d'un autre ensemble E au moyen d'une modélisation des éléments de F, par exemple par l'intermédiaire d'un codage ou d'une représentation. La théorie des cardinaux nous a fourni la proposition 1.1 qui justifie cette approche : il s'agit de mettre en bijection F et E.

#### Utilisation d'une bijection

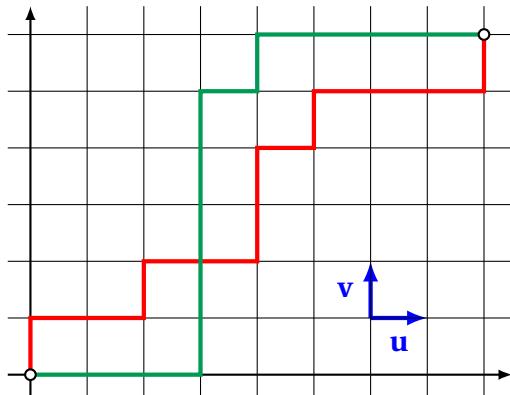
Si E est fini et s'il existe  $\phi : E \rightarrow F$  bijective, alors F est fini et  $|E| = |F|$ . Pour calculer le cardinal d'un ensemble F, le principe est donc de le mettre en bijection avec un ensemble E de cardinal connu.

Pour un ensemble A quelconque, l'application

$$\begin{aligned}\phi : \mathcal{P}(A) &\longrightarrow \{0, 1\}^A \\ X &\longmapsto \mathbb{1}_X\end{aligned}$$

est bijective. On peut en déduire que, si A est fini, alors le cardinal de  $\mathcal{P}(A)$  est égal à celui de  $\{0, 1\}^A$ , qui vaut  $2^{|A|}$ .

Cependant, dans de nombreux cas, il n'est pas indispensable d'expliciter avec précision la bijection : en un mot, il ne faut pas formaliser à l'excès.



Pour  $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ , calculons le nombre de chemins du plan de  $(0, 0)$  à  $(n, m)$ , les déplacements s'effectuant exclusivement selon  $+u$  ou  $+v$  (i.e. on se déplace vers la droite ou le haut).

Nous avons représenté dans la figure ci-contre deux exemples de chemins joignant les points  $(0, 0)$  et  $(8, 6)$ .

Un chemin de  $(0, 0)$  à  $(n, m)$  peut être codé par une liste de  $n + m$  déplacements selon les directions  $+u$  ou  $+v$ , où  $u$  figure  $n$  fois et  $v$   $m$  fois.

Par exemple, les chemins rouge et vert sont respectivement codés par les listes :

$$(v, u, u, v, u, u, v, v, u, v, u, u, v) \text{ et } (u, u, u, v, v, v, v, u, v, u, u, u, u)$$

On remarque que tous les chemins de  $(0, 0)$  à  $(n, m)$  sont ainsi codés de façon unique. Il suffit donc de dénombrer les  $(n + m)$ -listes comportant  $n$  fois  $u$  et  $m$  fois  $v$ . Pour construire une telle liste, il suffit de choisir les positions des  $n$  déplacements  $u$ , on complète alors par  $m$  déplacement selon  $v$ . On dénombre donc

$$\binom{n+m}{n} \text{ chemins de } (0, 0) \text{ à } (n, m)$$

Dans cet exemple, nous faisons bien appel à une bijection, celle qui associe à un chemin son code. Simplement, nous n'insistons pas sur les aspects formels, la bijectivité sous-jacente étant assez évidente.

### 3.2. Dénombrer au moyen d'une construction

Commençons par un exemple très concret. Tirons au hasard et simultanément 5 cartes d'un jeu classique de 52 cartes<sup>4</sup>. On obtient ce qu'on appelle *une main de cinq cartes* : cinq cartes distinctes mais non ordonnées.

- ✗ On compte  $\binom{52}{5}$  mains au total.
- ✗ Dénombrons les mains comprenant exactement un as. Pour construire une telle main, on commence par choisir la couleur de l'as : il y a 4 possibilités. On complète ensuite une choisissant une main quelconque de 4 cartes parmi les 48 restantes (toutes les cartes sauf les as). On obtient  $4 \binom{48}{4}$  possibilités par le lemme des bergers.
- ✗ Intéressons-nous à présent aux mains comprenant au moins un valet.

- ✓ Il est plus simple de dénombrer le complémentaire, i.e. le nombre de mains sans valets : on choisit une mains de 5 cartes parmi les 48 cartes qui ne sont pas des valets. On trouve donc  $\binom{48}{5}$  et finalement

$$\binom{52}{5} - \binom{48}{5}$$

- ✓ On aurait également pu opérer par disjonction de cas. On distingue :

- Les mains comportant exactement un valet :  $4 \binom{48}{4}$  (même calcul que pour un seul as).

4. Rappelons qu'un jeu de 52 cartes comporte une carte par couleur (pique, trèfle, cœur et carreau) parmi les treize valeurs suivantes : as, roi, dame, valet, dix, neuf, huit, sept, six, cinq, quatre, trois et deux.

- Les mains comportant exactement deux valets : on choisit ces deux valets sans ordre,  $\binom{4}{2}$  possibilités; puis on complète en choisissant une main de 3 cartes parmi les 48 cartes restantes,  $\binom{48}{3}$  possibilités. On obtient donc  $\binom{4}{2}\binom{48}{3}$  au total.
- Les mains comportant exactement trois valets : on obtient de façon analogue  $\binom{4}{3}\binom{48}{2}$ .
- Les mains comportant exactement quatre valets : on obtient de même 48.

Le nombre de mains de 5 cartes comportant au moins un as vaut donc aussi :

$$4\binom{48}{4} + \binom{4}{2}\binom{48}{3} + \binom{4}{3}\binom{48}{2} + 48$$

Comme nous le voyons sur cet illustration, exhiber des bijections afin de dénombrer est parfois long et inutilement formel. Il est souvent plus naturel et efficace de se ramener aux trois cas typiques (listes, arrangements, combinaisons) au moyen du lemme de bergers ou de disjonctions.

### Somme ou produit ?

Pour dénombrer un ensemble A :

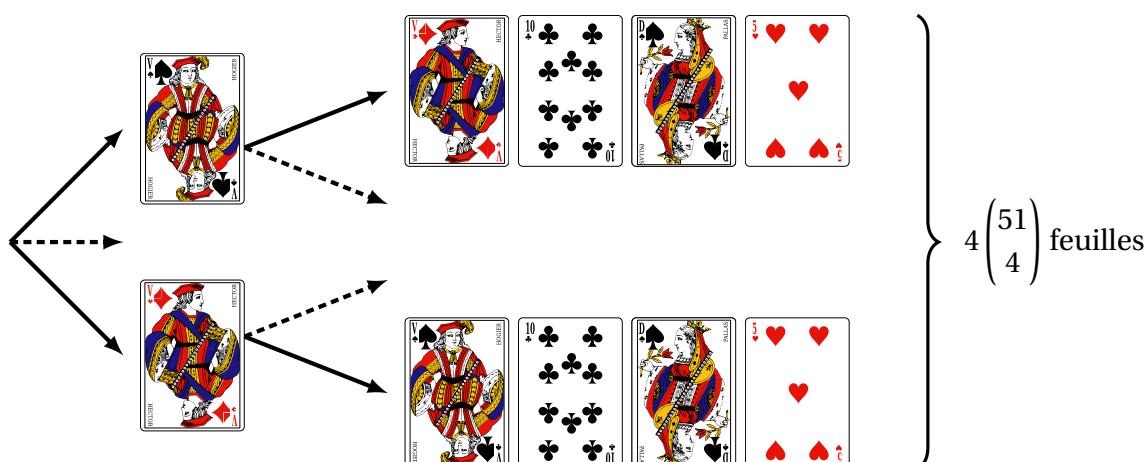
- ⇒ Si l'on effectue une disjonction de cas en discriminant les éléments de A selon un critère, alors on doit sommer les résultats (on a décomposé A en une réunion disjointe de parties).
- ⇒ Si l'on effectue une construction par choix successifs avec le même nombre de possibilités à chaque étape, alors on doit faire le produit de ces nombres (on applique le lemme des bergers).

Comme nous l'avons vu ci-dessus, on emploie le plus souvent *un mélange* de ces deux techniques.

Les deux grands types d'erreur en matière de dénombrement sont :

- ⇒ sous-estimer le nombre final en oubliant des cas (le plus souvent dans une disjonction);
- ⇒ sur-estimer le nombre final en comptant trop de configurations, i.e. en comptant plusieurs fois certaines configurations (le plus souvent dans une application incorrecte du lemme des bergers).

Revenons à l'exemple d'une main de 5 cartes comportant au moins un valet. Il est incorrect de choisir d'abord un valet (4 possibilités) puis de compléter par une main de 4 cartes parmi les 51 restantes. Certes, en s'y prenant de la sorte, nous allons bien construire toutes les solutions mais pas de façon unique! Certaines configurations seront en effet construites en plusieurs exemplaires, par exemple :



Les mains avec exactement un, deux, trois et quatre valets sont respectivement construites une, deux, trois et quatre fois. On ne peut donc même pas diviser ce résultat pour obtenir la bonne réponse. En revanche, comme l'exemple suivant l'illustrera, dans les cas où l'on compte en trop chaque configuration *un même nombre de fois*, on peut diviser pour conclure. Dans ces cas de figures, le lemme des bergers s'utilise plutôt sous la forme d'un quotient (c'était le cas pour passer des arrangements aux combinaisons) : dans ce cadre, on compte à dessein trop de configurations puis on divise le résultat.

Revenons à l'exemple des anagrammes du mot « ANAGRAMME », déjà résolu dans le paragraphe dédié aux combinaisons. Imaginons écrites sur une feuille les  $9!$  permutations des 9 lettres d'« ANAGRAMME ». Du fait des lettres identiques « A » et « M », on obtient des doublons. C'est par exemple le cas d'« ANAGRAMME » obtenu en permutant les deux premiers « A » et « ANAGRAMME » obtenu en permutant les deux derniers « A ». Il y a donc moins de  $9!$  anagrammes. Cependant, chaque anagramme d'« ANAGRAMME » apparaît le même nombre de fois dans la liste des  $9!$  permutations initiales :  $3! \times 2!$  fois par le lemme de bergers ( $3!$  pour le nombre de permutation des trois « A »,  $2!$  pour le nombre de permutations des deux « M »). On en déduit le nombre total d'anagrammes :

$$\frac{9!}{3!2!}$$

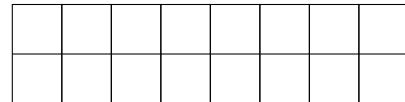
### Construire pour dénombrer (§ 6.9)

Tout dénombrement d'un ensemble  $A$  par construction de ses éléments cache une bijection : il s'agit de générer tous ses éléments en un seul exemplaire. Comme dans le cas des bijections, il n'est pas nécessaire de justifier la validité du procédé choisi mais il faut expliquer clairement le mode opératoire.

Le lecteur abordera avec profit les tests (§ 6.10) et (§ 6.11).

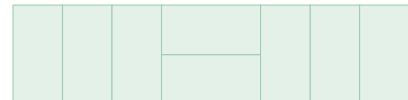
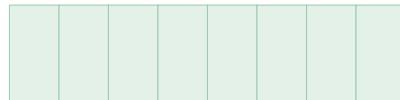
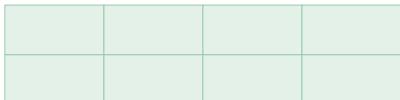
### 3.3. Dénombrer par récurrence

On souhaite dénombrer *les pavages sans recouvrements* d'un damier  $2 \times n$  par des dominos  $2 \times 1$  :



Le damier  $2 \times n$

On notera  $u_n$  le nombre de configurations possibles. Quelques exemples pour commencer :



Pour tout  $n \geq 1$ , notons  $u_n$  le nombre de pavages du damier  $2 \times n$ . Il est clair que  $u_1 = 1$  et  $u_2 = 2$ . Soit  $n \geq 3$ . On s'intéresse aux pavages d'un damier  $2 \times n$ . Il y en a de deux types :

- ⇒ Ceux qui finissent par : on en dénombre  $u_{n-1}$ .
- ⇒ Ceux qui finissent par : on en dénombre  $u_{n-2}$ .

Ainsi,  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ . Cette relation de récurrence peut ensuite être résolue par les méthodes classiques.

## Dénombrer par récurrence

Il est parfois possible de déterminer une relation de récurrence pour faciliter le dénombrement. Le plus souvent, il faut effectuer des disjonctions de cas afin de se ramener à des indices strictement inférieurs.

### 4. Combinaisons avec répétitions

On veut modéliser le choix de  $p$  objets parmi  $n$ , sans ordre comme pour les combinaisons, mais avec la possibilité de prendre plusieurs fois le même élément. Par exemple, les trois-combinaisons avec répétitions des deux objets  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$  sont :

$$[\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1], [\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2], [\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2], [\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1]$$

Attention, la notation entre crochets n'est absolument pas standard. Contrairement aux listes, aux arrangements ou aux combinaisons, il n'est pas immédiat de définir abstrairement la notion de  $k$ -combinaisons avec répétitions. La définition que nous avons retenue (parmi quelques variables usuelles) vient de la modélisation d'une trois-combinaison avec répétitions de  $\{\alpha_1, \alpha_2\}$  par la liste des « effectifs »  $(x_1, x_2)$  :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } i \in \llbracket 1, 2 \rrbracket, x_i \text{ est égal au nombre de fois que l'on choisit } \alpha_i \text{ dans la combinaison} \\ x_1 + x_2 = 3 \end{cases}$$

Voici les modélisations des quatre combinaisons énumérées ci-dessus :

$$[\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1] \rightarrow (3, 0), [\alpha_2, \alpha_2, \alpha_2] \rightarrow (0, 3), [\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2] \rightarrow (2, 1), [\alpha_2, \alpha_2, \alpha_1] \rightarrow (1, 2)$$

#### Définition 6.25. $k$ -combinaisons avec répétition

Soit  $k \in \mathbb{N}$  et  $E := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n : big\}$  un ensemble de cardinal  $n \in \mathbb{N}^*$ . On appelle  $k$ -combinaison avec répétitions de  $E$  toute liste d'entiers naturels  $(x_1, \dots, x_n)$  telle que

$$x_1 + \dots + x_n = k$$

On note  $\Gamma_n^k$  le nombre de  $k$ -combinaisons de  $E$ . On adopte la convention  $\Gamma_0^k := \begin{cases} 1 & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \in \mathbb{N}^* \end{cases}$

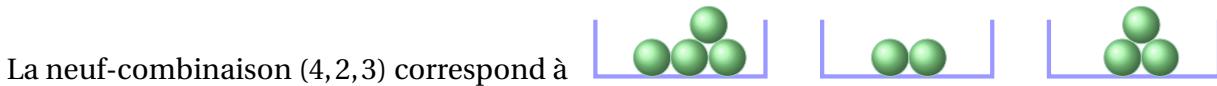
On a bien-sûr  $\Gamma_n^0 = 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\Gamma_1^k = 1$  et  $\Gamma_2^k = k + 1$  pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}$ .

Pour calculer  $\Gamma_n^k$  en fonction de  $n$  et  $k$ , nous allons proposer deux approches : la première par bijection, en adoptant une modélisation plus géométrique du problème des  $k$ -combinaisons et la seconde par récurrence.

#### 4.1. Modélisation par billes et bâtons

Considérons le cas des neuf-combinaisons avec répétitions de  $E = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ . On peut se représenter une neuf-combinaison avec répétitions de la manière suivante. On considère trois urnes : la première

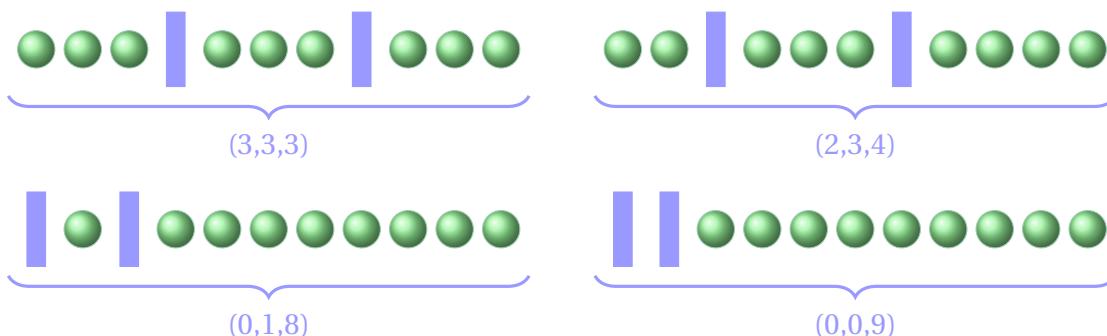
contient un nombre de billes indiscernables égal au nombre de  $\alpha_1$ , la deuxième contient un nombre de billes indiscernables égal au nombre de  $\alpha_2$ , de même pour la troisième avec  $\alpha_3$ .



Il y a autant de neuf-combinaisons avec répétitions qu'il y a de manières de remplir ces trois urnes avec neuf billes indiscernables. Nous pouvons maintenant procéder à une seconde modélisation : on représente en ligne les neuf billes et les urnes sont délimitées par deux bâtons. Nous disposons donc en ligne onze objets de deux types : deux bâtons et neuf billes.



Voici par exemple quelques neuf-combinaisons avec répétitions et leurs modélisations :



Ainsi, l'ensemble des neuf-combinaisons avec répétitions de E est en bijection avec l'ensemble des onze-listes comportant deux bâtons et neuf billes. On en dénombre finalement  $\binom{11}{2}$  (on choisit la position les deux bâtons et on complète par des billes aux autres positions).

Plus généralement, le nombre de  $k$ -combinaisons avec répétitions d'un ensemble à  $n$  éléments se ramène aux configurations de  $k$  billes à répartir dans  $n$  urnes, on trouve donc

$$\Gamma_n^k = \binom{k+n-1}{n-1}$$

Le lecteur pourra approfondir au moyen des tests (§ 6.12) et (§ 6.13).

#### 4.2. Stratégie de la récurrence

Fixons  $k, n$  dans  $\mathbb{N}^*$  et  $E := \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de cardinal  $n$ .

- ✗ Nous allons effectuer une disjonction selon le nombre de fois qu'apparaît  $\alpha_n$  dans une  $k$ -combinaison avec répétitions de E.
  - ✗ Celui-ci appartient nécessairement à l'intervalle  $\llbracket 0, k \rrbracket$ .
  - ✗ Fixons  $i$  dans  $\llbracket 0, k \rrbracket$ . Construire une  $k$ -combinaison avec répétitions de E où  $\alpha_n$  apparaît exactement  $i$  fois :

- ✓ On se donne une  $(k-i)$ -combinaison quelconque de  $E \setminus \{\alpha_n\}$ .
- ✓ On la complète en ajoutant  $i$  exemplaires de  $\alpha_n$ .
- ✓ Il y a donc  $\Gamma_{n-1}^{k-i}$  possibilités.

✗ On en déduit que

$$\Gamma_n^k = \sum_{i=0}^k \Gamma_{n-1}^{k-i} = \sum_{i=0}^k \Gamma_{n-1}^i = \Gamma_{n-1}^k + \sum_{i=0}^{k-1} \Gamma_{n-1}^i = \Gamma_{n-1}^k + \Gamma_n^{k-1}$$

Examinons les premiers termes :

$$\Gamma_1^k = 1, \quad \Gamma_2^k = k+1 = \binom{k+1}{1}, \quad \Gamma_3^k = \sum_{i=0}^k \Gamma_2^i = \sum_{i=0}^k (i+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} = \binom{k+2}{2}$$

On conjecture que  $\Gamma_n^k = \binom{k+n-1}{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \mathbb{N}$ . Nous allons procéder par récurrence<sup>5</sup> sur  $k+n$ . La formule est vraie au rang 1 par ce qui précède. Soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Supposons la formule vraie au rang  $m$ . Considérons  $(k, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$  tel que  $k+n = m+1$ . Si  $n \geq 2$ , alors on a

$$\Gamma_n^k = \Gamma_{n-1}^k + \Gamma_n^{k-1} = \binom{k+n-2}{n-2} + \binom{k+n-2}{n-1} = \binom{k+n-1}{n-1}$$

La formule étant également vraie si  $n = 1$ , on en déduit le résultat au rang  $m+1$ .

---

5. Par la relation de récurrence trouvée ( $\Gamma_n^k = \Gamma_{n-1}^k + \Gamma_n^{k-1}$ ), on voit qu'une récurrence sur  $k$  ou  $n$  n'est pas adaptée : en revanche, la somme  $p+q$  des deux indices des coefficients  $\Gamma_p^q$  est une variable de récurrence adéquate (elle vaut  $k+n$  à gauche et  $n+k-1$  à droite du signe égal).

## 5. Tests

### 6.1.

On considère cinq points dans  $[0, 2]^2$ .

Montrer qu'il existe deux points situé à une distance inférieure à  $\sqrt{2}$ .

### 6.2.

Soit A, B et C des parties d'un ensemble.

- a. Sachant que  $|A \cup B| = 50$ ,  $|A| = 15$  et  $|A \cap B| = 5$ , calculer  $|B|$ .
- b. Si  $|A \cup B| = 60$  et  $|A| = 3 \times |B| = 45$ , peut-on déduire que A et B sont disjoints ?
- c. Si  $|A \cup B| = 60$ ,  $|A| = 10$  et  $|B \setminus A| = 50$ , peut-on déduire que  $A \subset B$  ?

### 6.3.

Soit E un ensemble de cardinal 100, A et B des parties de E tels que  $\#\left|\overline{A} \cap \overline{B}\right| = 60$  et  $|A| = 15$ . Déterminer  $|B \setminus A|$ .

### 6.4.

Soit E et F deux ensembles finis et  $f : E \rightarrow F$ . Que vaut  $\sum_{y \in F} |f^{-1}(\{y\})|$  ?

### 6.5.

On considère des matrices de  $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$  à coefficients dans  $\{0, 1\}$ .

- a. Combien existe-t-il de matrices dont chaque ligne contient exactement un coefficient « 1 » ?
- b. Combien existe-t-il de matrices dont chaque ligne et chaque colonne contient exactement un coefficient « 1 » ?

### 6.6.

Une télévision privée décide d'opter pour le système de « programmes à péage » en utilisant des décodeurs commandés par des codes à huit chiffres. Calculer le nombre maximal d'abonnés.

### 6.7.

A l'issue d'un concours, 160 candidats sont admis dont 70 garçons. Déterminer le nombre de classements possibles des 10 premiers admis qui contiennent autant de filles que de garçons.

### 6.8.

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Prouver par un double comptage que  $\sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$ .

On pourra compter les couples  $(x, A) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  tels que  $x \notin A$ .

### 6.9.

À partir d'un alphabet de  $p$  lettres, combien de mots de  $n$  lettres peut-on former ne contenant jamais deux lettres identiques consécutives ?

**6.10.**  

En France, depuis le 15 avril 2009, les véhicules sont immatriculés à l'aide d'un « numéro » formé d'une série de deux lettres, suivie d'une série de trois chiffres (de 0 à 9), elle-même suivie d'une série de deux lettres (par exemple BC 112 DA). Quel est le nombre de numéros d'immatriculation :

- a. possibles ?
- b. constitués de lettres et de chiffres deux à deux distincts ?
- c. dont les trois chiffres sont dans l'ordre strictement croissant ?
- d. qui sont des palindromes (par exemple BC 121 CB) ?
- e. qui contiennent une seule lettre apparaissant exactement deux fois ?

**6.11.**  

Une association sportive compte dix coureurs de 100 m.

- a. Combien peut-on former d'équipes de relais  $4 \times 100$  m ? L'ordre dans lequel les coureurs interviennent est à prendre en considération.
- b. Soit A l'un des dix coureurs. Combien de ces équipes contiennent le coureur A ?
- c. Soit B un autre des dix coureurs. Combien de ces équipes contiennent le coureur A ou le coureur B ?

**6.12.**  

Combien de dominos peut-on former avec des numéros de 1 à 6 ?

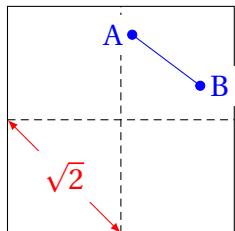
**6.13.**  

Combien dénombre-t-on d'applications croissantes de  $\llbracket 1, m \rrbracket$  dans  $\llbracket 1, p \rrbracket$  ?

## 6. Solutions

### 6.1.

On applique le lemme des tiroirs. On découpe le carré  $[0, 2]^2$  en quatre sous-carrés (cf. la figure ci-dessous).



L'un au moins des quatre sous-carré contient deux points A et B et donc  $AB \leq \sqrt{2}$  (longueur de la diagonale de ce sous-carré).

### 6.2.

- a.  $|B| = |A \cup B| + |A \cap B| - |A| = 50 + 5 - 15 = 40$ .
- b.  $|A \cap B| = |A \cup B| - |A| - |B| = 60 - 45 - 15 = 0$ . Donc  $A \cap B = \emptyset$ , c'est-à-dire A et B sont disjoints.
- c. Non. Contre-exemple  $A = [1, 10]$  et  $B = [2, 60]$ .

### 6.3.

D'après les règles de Morgan  $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$ . Or  $\{A, B \setminus A, A \cup B\}$  est un recouvrement disjoint de E, donc  $|E| = |A| + |B \setminus A| + |\overline{A \cup B}|$ , d'où

$$|B \setminus A| = |E| - |A| - |\overline{A \cup B}| = 100 - 15 - 60 = 25$$

### 6.4.

Comme les éléments de  $\mathcal{M} = \{f^{-1}\langle\{y\}\rangle ; y \in F\}$  sont deux à deux disjoints et

$$\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A = E$$

on a  $\sum_{y \in F} |f^{-1}\langle\{y\}\rangle| = |E|$ .

### 6.5.

- a. Il y a 4 possibilités pour chaque ligne donc  $4^4$  configurations.

- b. On construit une telle matrice en choisissant la première ligne : 4 possibilités; puis la seconde ligne : 3 possibilités; puis 2 pour la troisième ligne et, bien-sûr, une seule pour la dernière ligne. Il y a donc  $4!$  configurations.

### 6.6.

Un abonné avec code composé de huit chiffres différents correspond à une suite de huit chiffres différents pris parmi les dix chiffres possibles  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ . On reconnaît un 8-arrangement de  $\llbracket 0, 9 \rrbracket$ . Il y a donc  $10!/(10-8)!$  codes composés de huit chiffres différents.

### 6.7.

On choisit d'abord les places des 5 garçons et des 5 filles :  $\binom{10}{5}$  possibilités. Puis on choisit les garçons et les filles avec ordre :  $\binom{70}{5}5!$  et  $\binom{90}{5}5!$ . On trouve donc  $\binom{10}{5}\binom{70}{5}\binom{90}{5}5!^2$ .

### 6.8.

Notons  $\mathcal{A}$  l'ensemble des couples  $(x, A) \in \llbracket 1, n \rrbracket \times \mathcal{P}(\llbracket 1, n \rrbracket)$  tels que  $x \notin A$ .

⇒ Il y a  $n$  choix possibles pour  $x$  dans  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Puis on choisit une partie de  $\llbracket 1, n \rrbracket \setminus \{x\}$ , il y a  $2^{n-1}$  possibilités. Ainsi  $\#\mathcal{A} = n2^{n-1}$ .

⇒ On choisit d'abord le cardinal de A : on fixe  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ . On choisit ensuite les éléments de A :  $\binom{n}{k}$  possibilités. Et finalement, on choisit  $x \in \llbracket 1, n \rrbracket \setminus A$  :  $n-k$  possibilités. Ainsi,

$$n2^{n-1} = \sum_{k=0}^n (n-k) \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k}$$

par un changement de variable évident.

### 6.9.

On choisit d'abord la première lettre :  $p$  possibilités. À partir de la deuxième lettre, il y a  $p-1$  choix possibles (tout sauf la lettre précédente). Ainsi, on a donc  $p(p-1)^{n-1}$  mots possibles.

### 6.10.

- a. Il faut choisir les quatre lettres avec ordre, puis la série de trois chiffres entre 0 et 9 : il y a  $26^4 \times 1000$  immatriculations possibles.
- b. Il faut choisir 4 lettres distinctes avec ordre, puis 3 chiffres distincts : on trouve  $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 10 \times 9 \times 8$  immatriculations possibles.
- c. Il faut choisir 4 lettres avec ordre, puis 3 chiffres distincts rangés dans l'ordre croissant : on dénombre donc  $26^4 \times \binom{10}{3}$  immatriculations possibles.
- d. On choisit d'abord les deux premières lettres, puis les deux premiers chiffres : il y a  $26^2 \times 10^2$  immatriculations possibles.
- e. On choisit d'abord l'unique lettre apparaissant exactement deux fois, la position de ces deux lettres identiques, les deux autres lettres distinctes (entre elles et de la lettre choisie initialement) avec ordre, puis les chiffres : on trouve donc

$$26 \times \binom{4}{2} \times 25 \times 24 \times 10^3$$

immatriculations possibles.

### 6.11.

- a. On choisit 4 coureurs parmi 10 avec ordre : il s'agit d'une 4-liste d'éléments distincts ; on trouve  $10 \times 9 \times 8 \times 7 = 5040$ .

- b. On choisit sans ordre les trois autres coureurs de l'équipe parmi les 9 restants puis on ordonne les quatre coureurs, on trouve  $\binom{9}{3} \times 4! = 2016$ .
- c. Considérons le complémentaire, l'ensemble des équipes ne comportant ni A, ni B. Il y a  $8 \times 7 \times 6 \times 5 = 1680$  choix ordonnés de 4 coureurs parmi 8 ; on en déduit que le cardinal recherché est  $5040 - 1680 = 3360$ .

### 6.12.

---

La réponse est

$$\Gamma_6^2 = \binom{7}{2} = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

car l'ensemble de ces dominos est en bijection avec celui des deux-combinaisons de  $\llbracket 1, 6 \rrbracket$ .

### 6.13.

---

La réponse est  $\Gamma_p^m$ . En effet, une telle application est modélisable par la donnée de la liste avec répétition des valeurs qu'elle prend. Par exemple, la fonction  $f : \llbracket 1, 4 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, 3 \rrbracket$  définie par

$$f(1) = 1, f(2) = 2, f(3) = 2, f(4) = 3$$

est modélisée par  $[1, 2, 2, 3]$ .