



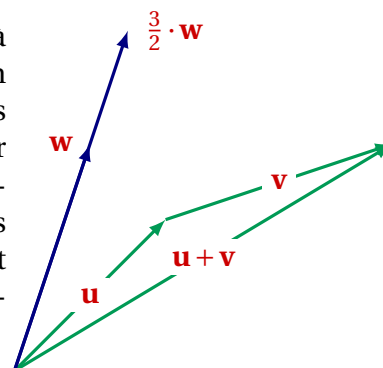
On étudie la structure d'espace vectoriel et en particulier les espaces de dimension finie qui généralisent les espaces de coordonnées $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ bien connus.



Souvenir de Mortefontaine, Jean-Baptiste Corot

9	Espaces vectoriels et applications linéaires	1
1	La structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel	2
1.1	Axiomes et vocabulaire	2
1.2	Espace vectoriel produit	3
1.3	Familles de vecteurs et combinaisons linéaires	3
1.4	Sous-espaces vectoriels	4
2	Sommes de sous-espaces vectoriels	6
2.1	Cas de deux sous-espaces vectoriels	6
2.2	Sous-espaces supplémentaires	7
2.3	Généralisation à un nombre fini de sous-espaces	9
3	La structure de $\mathbb{K}$ -algèbre	10
4	Applications linéaires	11
4.1	Morphismes linéaires	12
4.2	Opérations sur les applications linéaires	13
4.3	Isomorphismes	13
4.4	Restriction et co-restriction d'une application linéaire	14
4.5	Noyau et image	14
4.6	Application linéaire canoniquement associée à une matrice	15
5	Projections et projecteurs	16
6	Sous-espaces affines d'un espace vectoriel et équations linéaires	18
7	Tests	19
8	Solutions	21

Dans le cours de géométrie du secondaire, nous avons appris à calculer la somme de deux vecteurs du plan, et à multiplier un vecteur par un nombre réel. Or, il est possible de définir des opérations analogues sur beaucoup d'autres objets mathématiques. Par exemple, la définition de l'addition de deux fonctions ou de la multiplication d'une fonction par un nombre réel sont très naturelles. Elles apparaissent d'ailleurs dans les nombreux théorèmes d'analyse portant sur « les opérations » : la somme de deux suites convergentes est convergente, la somme de deux fonctions dérivable est dérivable, etc.



L'objectif de ce cours est de généraliser les outils de la géométrie à d'autres objets mathématiques que les vecteurs du plan ou de l'espace.

1. La structure de $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

1.1. Axiomes et vocabulaire

Définition 9.0. Axiomes de la structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel ou espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ est un ensemble E muni de deux lois :

$$E \times E \rightarrow E, (u, v) \mapsto u + v \quad \text{et} \quad \mathbb{K} \times E \rightarrow E, (\lambda, u) \mapsto \lambda \cdot u \quad \text{vérifiant}$$

(loi interne, notée $+$) (loi externe, notée $\cdot$)

- | | |
|---|---|
| <p>a. $(E, +)$ a une structure de groupe abélien;</p> <p>b. $\forall v \in E, 1 \cdot v = v$;</p> <p>c. $\forall v \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$;</p> | <p>d. $\forall v \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$;</p> <p>e. $\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$.</p> |
|---|---|

En comptant les axiomes de la structure de groupe, on obtient un total de huit axiomes :

EV₁ : $\forall (u, v) \in E^2, u + v = v + u$

EV₂ : $\forall (u, v, w) \in E^3, (u + v) + w = u + (v + w)$

EV₃ : $\exists 0_E \in E, \forall v \in E, v + 0_E = v$

EV₄ : $\forall v \in E \exists -v \in E, v + (-v) = 0$

EV₅ : $\forall v \in E, 1 \cdot v = v$

EV₆ : $\forall v \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, \lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda\mu) \cdot v$

EV₇ : $\forall v \in E, \forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2, (\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$

EV₈ : $\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (u + v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v$

On emploie le même vocabulaire que pour les vecteurs du plan et de l'espace :

✗ Les éléments de E sont appelés **les vecteurs**;

✗ Les éléments de $\mathbb{K}$ sont appelés **les scalaires**;

✗ Pour tout $v \in E, -v$ est appelé **opposé de v** ;

✗ Le vecteur 0_E (ou plus simplement 0) est appelé le **vecteur nul**.

✗ Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on munit $\mathbb{K}^n$ d'une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ en posant :

$$(x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) := (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot (x_1, \dots, x_n) := (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$$

La vérification des axiomes **EV₁** et **EV₂** est immédiate, par commutativité et associativité de l'addition dans le corps $(\mathbb{K}, +, \times)$. Continuons par **EV₃** et **EV₄** : le vecteur $(0, \dots, 0)$ (n fois le zéro de $\mathbb{K}$) est neutre pour l'addition définie ci-dessus et tout vecteur $v := (v_1, \dots, v_n)$ admet un opposé qui vaut $(-v_1, \dots, -v_n)$. L'axiome **EV₅** est immédiat car 1 est le neutre du monoïde $(\mathbb{K}, \times)$. La propriété **EV₆**

découle de l'associativité de $\times$. Quant à $\mathbf{EV}_7$ et $\mathbf{EV}_8$, ils sont vérifiés par distributivité de $\times$ sur $+$ dans l'anneau $(\mathbb{K}, +, \times)$. Pour $n = 1, 2$ et 3 , on retrouve les espaces de coordonnées de la géométrie.

- ✕ Pour les opérations usuelles de calcul matriciel, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ a une structure de $\mathbb{K}$ -ev.
- ✕ Pour tout ensemble Ω non vide, on muni $\mathbb{R}^\Omega$ d'une structure de $\mathbb{K}$ -ev en posant pour toutes fonctions $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f + g : x \mapsto f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad \lambda \cdot f : x \mapsto \lambda f(x) \quad (\text{fonctions de } \Omega \text{ dans } \mathbb{R})$$

En particulier, pour $\Omega = \mathbb{N}$, on obtient une structure de $\mathbb{R}$ -ev sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$:

$$\forall (u_n)_{n \in \mathbb{N}}, (v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \forall \lambda \in \mathbb{R}, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} + (v_n)_{n \in \mathbb{N}} := (u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}, \lambda \cdot (u_n)_{n \in \mathbb{N}} := (\lambda u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

- ✕ Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'addition et le produit usuels définissent sur $\mathbb{C}$ une structure de $\mathbb{K}$ -ev.

Notations conventionnelles dans un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

- ⇒ Le symbole 0 a plusieurs significations : le zéro réel, celui de l'espace vectoriel E , celui de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, etc. On peut bien-sûr les distinguer au moyen d'indices ($0_{\mathbb{R}}$, 0_E , 0_n , etc) mais il est d'usage de se limiter à 0 , laissant au lecteur le soin de comprendre par le contexte de quel zéro il s'agit.
- ⇒ L'opération externe de $\mathbb{K}$ sur E sera notée plus simplement λu ou lieu de $\lambda \cdot u$ afin d'alléger les expressions. Attention : le scalaire en premier, puis le vecteur.

1.2. Espace vectoriel produit

La structure de $\mathbb{K}$ -ev de $\mathbb{K}^n$ étudiée ci-dessus se généralise ainsi :

Définition 9.0. Espace vectoriel produit

Soit E_1 et E_2 deux $\mathbb{K}$ -ev. On définit une structure de $\mathbb{K}$ -ev sur $E_1 \times E_2$ en posant

$$\forall (x_1, x_2), (y_1, y_2) \in E_1 \times E_2, (x_1, x_2) + (y_1, y_2) := (x_1 + y_1, x_2 + y_2) \quad \text{et} \quad \lambda(x_1, y_1) := (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

On étend naturellement cette définition au produit $E_1 \times E_2 \times \cdots \times E_n$ de n $\mathbb{K}$ -ev.

1.3. Familles de vecteurs et combinaisons linéaires

Proposition 9.1.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a $\lambda u = 0$ si et seulement si $\lambda = 0$ ou $u = 0$.

Rappels sur les familles finies

- ⇒ Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle famille finie de vecteurs de E , toute famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E indexée par un ensemble de cardinal fini I .
- ⇒ On note A^I l'ensemble des familles d'éléments d'un ensemble A indexées par l'ensemble I .

Notation 9.1. Sommes finies de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Soit $(u_i)_{i \in I}$ et $(v_i)_{i \in I}$ des familles finies de vecteurs de E .

⇒ Le groupe $(E, +)$ étant abélien, on peut noter $\sum_{i \in I} u_i$ sans ambiguïté.

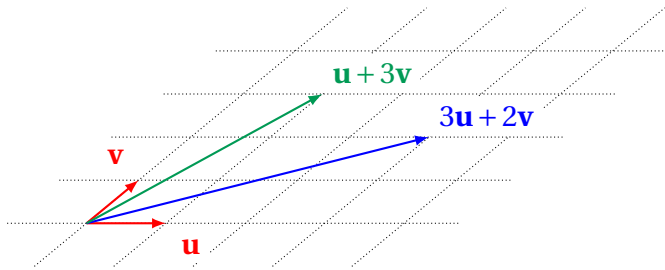
⇒ On déduit des axiomes par récurrence sur $|I|$ que $\forall \lambda \in \mathbb{K}, \sum_{i \in I} (u_i + \lambda v_i) = \sum_{i \in I} u_i + \lambda \sum_{i \in I} v_i$.

Les combinaisons linéaires généralisent les expressions de la forme $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ de la géométrie plane.

Définition 9.2. Combinaisons linéaires

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $(u_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E . On appelle combinaison linéaire des vecteurs de $(u_i)_{i \in I}$, tout vecteur de E de la forme

$$\sum_{i \in I} \lambda_i u_i, \quad \text{où } (\lambda_i)_{i \in I} \text{ appartient à } \mathbb{K}^I$$



Les combinaisons linéaires permettent d'engendrer des nouveaux vecteurs à partir d'une famille donnée.

Soit, par exemple, $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ deux vecteurs non colinéaires du plan. Tout vecteur du plan est combinaison linéaire de $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$.

1.4. Sous-espaces vectoriels

Comme pour toutes les structures déjà étudiées (groupes, anneaux et corps), nous allons définir les sous-espaces vectoriels par des propriétés de stabilité.

Définition 9.3. Sous-espaces vectoriels

On dit qu'une partie F d'un $\mathbb{K}$ -ev E est un sous-espace vectoriel (sev en abrégé) de E si elle vérifie :

$$\mathbf{a.} \quad 0 \in F \quad \mathbf{b.} \quad \forall (u, v) \in F^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u + \lambda v \in F$$

On prouve sans peine qu'un sev F vérifie les propriétés suivantes :

$$\forall (u, v) \in F^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u + v \in F \quad \text{et} \quad \lambda v \in F$$

On en déduit que F est stable pour les deux lois (interne et externe) : $(F, +, \cdot)$ est donc un $\mathbb{K}$ -ev.

✗ $\{0\}$ et E sont le plus petit et le plus grand sev (pour la relation d'ordre d'inclusion) d'un $\mathbb{K}$ -ev E .

✗ Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$. Comme la fonction nulle est de classe $\mathcal{C}^k$ et toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$ est de classe $\mathcal{C}^k$, $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R})$ est un sev de $\mathbb{R}^I$.

✗ L'ensemble des suites réelles bornées est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car il contient la suite nulle et est clairement stable par combinaison linéaire. L'ensemble des suites géométriques n'est pas un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car

$$(1)_{n \in \mathbb{N}} + ((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} = (1 + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{et} \quad (1 + (-1)^n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ n'est pas géométrique}$$

- ✕ D'après le cours de calcul matriciel, l'ensemble $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ des matrices triangulaires supérieures de taille n contient 0 (la matrice nulle) et est stable par combinaison linéaire, c'est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. De même pour $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$, espace des matrices triangulaires inférieures de taille n . $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, espace des matrices diagonales de taille n , est un sev de $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ et de $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$.
- ✕ L'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est un sev de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$. En effet, soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $E := \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) ; AX = 0\}$. On a

$$0 \in E \text{ et, pour } (X, X') \in E^2 \text{ et } \lambda \in \mathbb{K}, \text{ on a } A(X + \lambda X') = AX + \lambda AX' = 0 \text{ d'où } X + \lambda X' \in E$$

Définition 9.4. Sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs (§ 9.1)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour toute famille finie $(u_i)_{i \in I}$ de vecteur de E , on note

$$\text{Vect}(u_i)_{i \in I} := \left\{ \sum_{i \in I} \lambda_i u_i ; (\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^I \right\}$$

l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille $(u_i)_{i \in I}$. On adapte la convention $\text{Vect} \emptyset := \{0\}$ (cas de la famille vide, ie $I = \emptyset$). Dans le cas où $I = \llbracket 1, n \rrbracket$, on note aussi $\text{Vect}(u_1, \dots, u_n)$

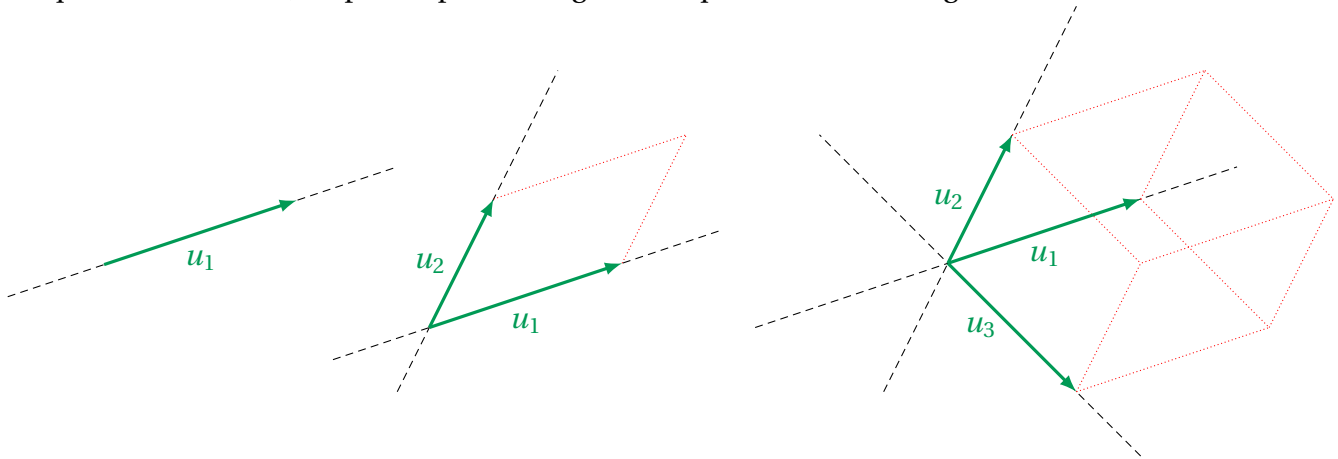
Pour $x \in E$, l'ensemble $\text{Vect } x$ est aussi noté $\mathbb{K}x$. Pour deux vecteurs x et y , on a donc

$$\text{Vect}(x, y) = \{\lambda x + \mu y ; (\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2\}$$

Proposition 9.5. Sev engendré par une famille de vecteurs

Avec les notations précédentes, $\text{Vect}(u_i)_{i \in I}$ est un sev de E .

Jusqu'à trois vecteurs, on peut représenter géométriquement les sev engendrés :



On peut démontrer qu'un sous-ensemble F d'un $\mathbb{K}$ -ev E est un sev en l'écrivant la forme $\text{Vect}(\dots)$

- ✕ Soit $F := \{X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) ; AX = 0\}$ où $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. Après tout calcul,

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x - y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y - z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = z \end{cases} \text{ Ainsi } F = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ z \\ z \end{pmatrix} ; z \in \mathbb{R} \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

✗ L'ensemble des suites F arithmétiques réelles est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ car

$$F = \{(a + bn)_{n \in \mathbb{N}}; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \{a(1)_{n \in \mathbb{N}} + b(n)_{n \in \mathbb{N}}; (a, b) \in \mathbb{R}^2\} = \text{Vect}(u, v) \text{ où } \begin{cases} u := (1)_{n \in \mathbb{N}} \\ v := (n)_{n \in \mathbb{N}} \end{cases}$$

✗ L'ensemble $E = \left\{ \begin{pmatrix} a & a-b \\ b & a \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$ est un sev de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car

$$E = \left\{ a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \text{Vect}(u, v) \text{ où } u := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } v := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous recommandons au lecteur de poursuivre par le test (✗ 9.2).

Proposition 9.6. Intersections de sev

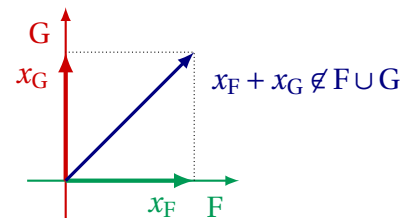
L'intersection d'un nombre quelconque de sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E est un sev de E .

2. Sommes de sous-espaces vectoriels

Dans le cours sur les structures algébriques, nous avons établi que la réunion de deux sous-groupes H et K d'un groupe G est un sous-groupe *si et seulement si* l'un des deux est inclus dans l'autre. En tant que groupes additifs, il en sera donc de même pour les sev (un sev F d'une $\mathbb{K}$ -ev E est en particulier un sous-groupe de $(E, +)$).

Il n'est pas difficile de trouver un contre-exemple dans $\mathbb{R}^2$. On considère par exemple les deux axes $F = \mathbb{R} \times \{0\}$ et $G = \{0\} \times \mathbb{R}$. Ce sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$. L'union des deux axes n'est pas un sous-espace vectoriel du plan $\mathbb{R}^2$.

Par exemple, $x_F = (1, 0) \in F$ et $x_G = (0, 1) \in G$ mais $x_F + x_G = (1, 1)$ n'appartient pas à $F \cup G$ (cf. la figure ci-contre).



Se pose alors la question suivante : en effectuant des combinaisons linéaires de vecteurs de $F \cup G$, quel sev de E génère-t-on ? C'est la notion de somme de sev qui répond à cette question.

2.1. Cas de deux sous-espaces vectoriels

Définition 9.7. Somme $F + G$ (✗ 9.3)

Pour tous sev F et G de E , on note $F + G := \{x_F + x_G; (x_F, x_G) \in F \times G\}$. Ce sous-ensemble de E est appelé somme de F et G , c'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant $F \cup G$.

Comme $(E, +)$ est un groupe abélien, on a clairement $F + G = G + F$ pour tous sev F et G de E . D'autres propriétés découlent directement de la définition de la somme de deux sev :

✗ Pour tout sev F de E , $F + F = F$ et $E + F = E$ car $0 \in F$. On recommande au lecteur le test (✗ 9.4).

✗ Si $(u, v) \in E^2$, alors $\text{Vect}(u) + \text{Vect}(v) = \text{Vect}(u, v)$.

✗ Plus généralement, si $(u_1, \dots, u_n)$ et $(v_1, \dots, v_m)$ sont des familles de vecteurs de E , alors

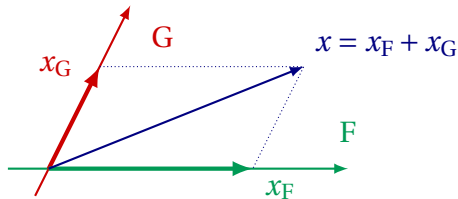
$$\text{Vect}(u_1, \dots, u_n) + \text{Vect}(v_1, \dots, v_m) = \text{Vect}(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_m)$$

Le cas où les sev F et G sont d'incidence nulle va jouer un grand rôle dans la théorie :

Définition 9.7. Somme directe $F \oplus G$

Soit F et G des sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E . Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

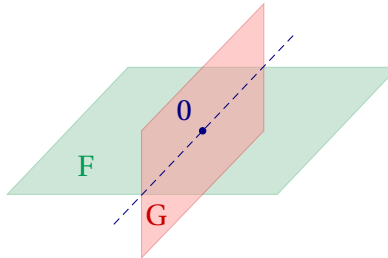
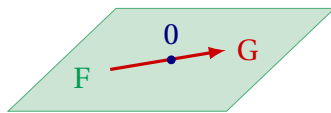
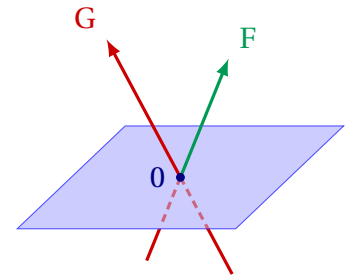
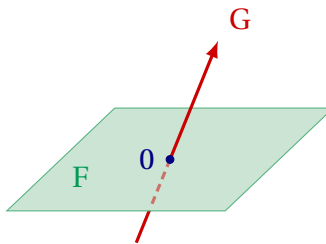
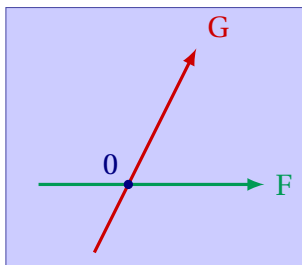
- a. $F \cap G = \{0\}$;
- b. Tout élément u de $F + G$ s'écrit de manière unique sous la forme $u_F + u_G$ avec (u_F, u_G) dans $F \times G$.
Lorsqu'elles sont vérifiées, la somme $F + G$ est dite directe, ce que l'on note $F \oplus G$.



Le b. peut se reformuler ainsi : l'application

$$\begin{aligned} F \times G &\longrightarrow E \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

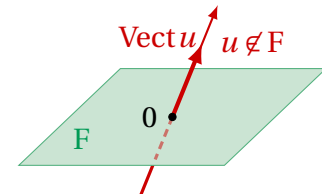
est injective. On dit aussi que F et G sont en somme directe.



Il est clair que, dans les trois premiers exemples, F et G sont en somme directe. Dans les deux exemples ci-contre, F et G ne sont pas en somme directe.

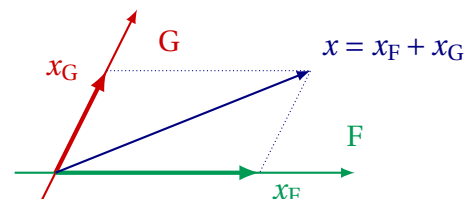
Lemme 9.8.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et F un sev de E . Si $u \in E \setminus F$, alors $F \oplus \text{Vect } u$.

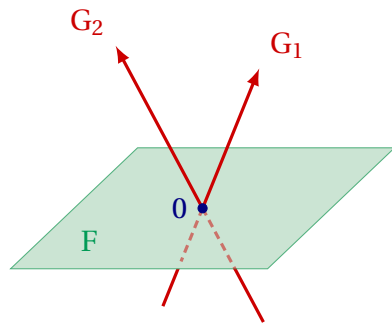
**2.2. Sous-espaces supplémentaires**

Deux sev F et G de E sont dits supplémentaires dans E si tout vecteur x de E s'écrit de manière unique sous la forme

$$x = x_F + x_G, \quad \text{avec } (x_F, x_G) \in F \times G$$

**Définition 9.9. Sous-espaces supplémentaires**

- ⇒ Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. Deux sev F et G de E sont dits supplémentaires dans E si $E = F \oplus G$.
- ⇒ On appelle supplémentaire d'un sev F de E tout sev S de E tel que $F \oplus S = E$.



En général, un sous-espace vectoriel admet une infinité de supplémentaires.

Il faudra donc employer l'article indéfini *un* et non pas l'article défini *le* à propos d'un supplémentaire. Voir ci-contre un exemple dans l'espace à trois dimensions E :

$$E = F \oplus G_1 = F \oplus G_2$$

- ✘ Soit $F = \{(x, y, z); x + y + z = 0\}$, $u = (1, 2, 1)$ et $G = \text{Vect}(u)$; F et G sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$. En effet, soit $X := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $X - \lambda u = (x - \lambda, y - 2\lambda, z - \lambda)$. Comme l'équation

$$x - \lambda + y - 2\lambda + z - \lambda = 0$$

d'inconnue λ admet une unique solution, tout vecteur X de $\mathbb{R}^3$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de G et d'un vecteur de F . Ainsi $\mathbb{R}^3 = F \oplus G$.

- ✘ Les espaces $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

✓ **Analyse.** Supposons l'existence de $(A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ tel que $X = A + S$. On a donc

$$X = A + S \text{ et } X^T = (A + S)^T = A^T + S^T = -A + S \text{ d'où } S = \frac{X + X^T}{2} \text{ et } A = \frac{X - X^T}{2}$$

✓ **Synthèse.** Posons $A := \frac{X - X^T}{2}$ et $S := \frac{X + X^T}{2}$. On a bien $X = A + S$ et

$$A^T = \frac{X^T - X}{2} = -A \text{ et } S^T = \frac{X^T + X}{2} = S \text{ d'où } (A, S) \in \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) \times \mathcal{S}_n(\mathbb{K})$$

- ✘ Les espaces $\mathcal{P} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; f \text{ paire}\}$ et $\mathcal{I} = \{f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}; f \text{ impaire}\}$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

✓ On a $\mathcal{P} \cap \mathcal{I} = \{0\}$ car la seule fonction paire et impaire est clairement la fonction nulle.

✓ Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. On a

$$f = f_p + f_i \text{ où } f_p : x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } f_i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2} \text{ avec } (f_i, f_p) \in \mathcal{I} \times \mathcal{P}$$

Supplémentarité et Analyse-Synthèse (9.5)

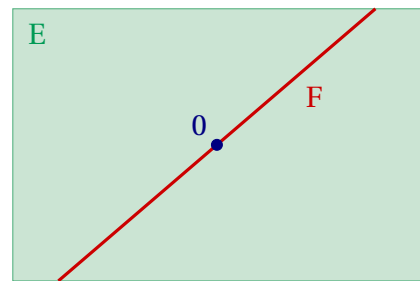
La stratégie d'Analyse-Synthèse se prête bien à la démonstration d'une relation du type $F \oplus G = E$.

⇒ L'Analyse démontre en fait l'unicité de la décomposition d'un vecteur quelconque X de E en $X = X_F + X_G$ avec $(X_F, X_G) \in F \times G$. L'idée est de trouver une seconde équation d'inconnues X_F et X_G , en plus de $X = X_F + X_G$ afin d'explicitier X_F et X_G en fonction de X .

⇒ La synthèse consiste à démontrer l'existence de la décomposition précédente en partant des relations trouvées dans la synthèse.

On peut bien-sûr remplacer l'analyse par une démonstration de l'égalité $F \cap G = \{0\}$ et expliciter directement une décomposition dans la synthèse.

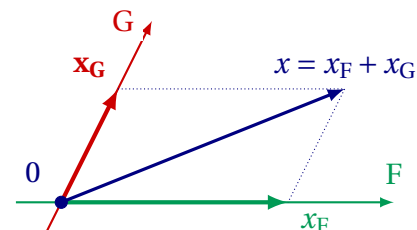
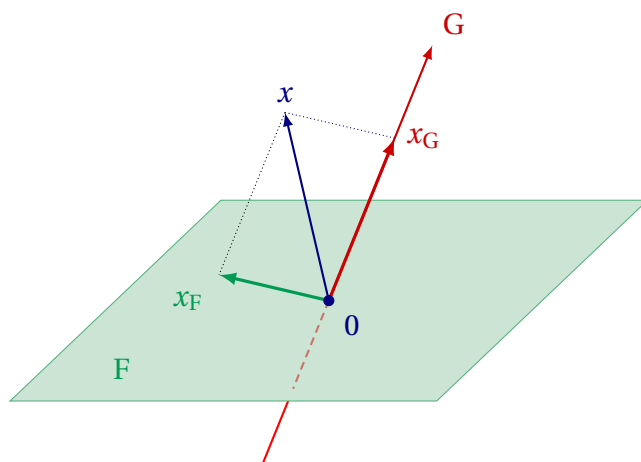
Attention, supplémentaire et complémentaire ne sont pas synonymes. Le complémentaire d'un sev F d'un $\mathbb{K}$ -ev E n'est *jamais* un sev de E . En effet, il ne contient pas le vecteur nul. Dans un plan vectoriel E , le complémentaire d'une droite F est la réunion disjointe des deux demi-plans ouverts de frontière F . Les supplémentaires de F dans E sont toutes les droites vectorielles *sauf* F .



On emploie la même terminologie qu'en géométrie :

Définition 9.10. Projections sur un sev parallèlement à un supplémentaire

Soit F et G deux sev de E supplémentaires dans E . Alors, pour tout $x \in E$, il existe un unique couple $(x_F, x_G) \in F \times G$ tel que $x = x_F + x_G$. Le vecteur x_F est appelé projeté de x sur F parallèlement à G . Le vecteur x_G est appelé projeté de x sur G parallèlement à F .



On trouvera ci-contre deux exemples de projection sur un sev parallèlement à un autre : dans le plan ci-dessus et l'espace à trois dimensions à gauche.

Revenons aux exemples étudiés à la page 8.

✕ Les projetés de $X := (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur G parallèlement à P et sur P parallèlement à G valent

$$\lambda u = \left(\frac{x+y+z}{4}, \frac{x+y+z}{2}, \frac{x+y+z}{4} \right) \text{ et } X - \lambda u = \left(\frac{3x-y-z}{4}, \frac{-x+y-z}{2}, \frac{-x-y+3y}{4} \right)$$

✕ Les projetés de $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ et inversement sont respectivement :

$$\frac{X + X^T}{2} \text{ et } \frac{X - X^T}{2}$$

✕ Les projetés de $f \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ sur $\mathcal{P}$ parallèlement à $\mathcal{I}$ et inversement sont respectivement :

$$f \cdot x \mapsto \frac{f(x) + f(-x)}{2} \text{ et } f_i : x \mapsto \frac{f(x) - f(-x)}{2}$$

2.3. Généralisation à un nombre fini de sous-espaces

On généralise facilement les définitions précédentes à un nombre fini quelconque de sous-espaces vectoriels.

Définition 9.11. Somme d'un nombre fini de sous-espaces vectoriels

Soit $E_1, \dots, E_p$ des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E .

⇒ On note $\sum_{i=1}^p E_i := \left\{ \sum_{i=1}^p x_i; (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p \right\}$.

⇒ La somme $\sum_{i=1}^p E_i$ est dite directe si l'application $\sigma : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow E$ définie par

$$(x_1, \dots, x_p) \mapsto \sum_{i=1}^p x_i \text{ est injective. Cette somme est alors notée } \bigoplus_{i=1}^p E_i \text{ ou encore } E_1 \oplus \dots \oplus E_p.$$

On vérifie que, lorsque $p = 2$, cette définition est équivalente à celle donnée ci-dessus. De plus, toujours dans le cas où $p = 2$, E_1 et E_2 sont supplémentaires dans E *si et seulement si* σ est bijective.

Proposition 9.12. Caractérisation des sommes directes

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $E_1, \dots, E_p$ des sev de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

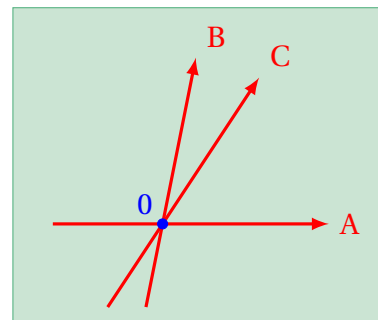
- a.** $\sum_{i=1}^p E_i$ est directe; **b.** $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket, E_j \cap \sum_{i \in \llbracket 1, p \rrbracket \setminus \{j\}} E_i = \{0\}$; **c.** $\forall j \in \llbracket 2, p \rrbracket, E_j \cap \sum_{i=1}^{j-1} E_i = \{0\}$;
d. $\forall (u_1, \dots, u_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \left(\sum_{i=1}^p u_i = 0 \implies (u_1, \dots, u_p) = (0, \dots, 0) \right)$.

Le **c.** se reformule ainsi dans le cas de trois sev : la somme $A + B + C$ est directe si et seulement si $A + B$ et $(A + B) + C$ sont directes.

Attention, le caractère direct de la somme $A + B + C$ n'est pas équivalent à $A \cap B \cap C = \{0\}$. Seule l'implication

$$A + B + C \text{ est directe} \implies A \cap B \cap C = \{0\}$$

est vraie et l'on trouve facilement des contre-exemples à la réciproque dans $\mathbb{R}^2$ (considérer trois droites vectorielles deux à deux distinctes, cf. ci-contre).



✗ On reprend les exemples de sous-espaces supplémentaires étudiés à la page 8. Notons $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des fonctions paires s'annulant en 0 et $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions constantes.

- ✓ Les ensembles $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{C}$ sont inclus dans $\mathcal{P}$, contiennent la fonction nulle et sont clairement stables par combinaison linéaire, ce sont donc des sev de $\mathcal{P}$.
- ✓ On démontre facilement que $\mathcal{P} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{C}$. Comme $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$, on a $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \mathcal{P}_0 \oplus \mathcal{C} \oplus \mathcal{I}$.

3. La structure de $\mathbb{K}$ -algèbre

De même que la définition générale d'un espace vectoriel était induite des propriétés de $\mathbb{K}^n$, la définition d'une algèbre est modelée sur celle de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 9.13. Structure de $\mathbb{K}$ -algèbre

Une $\mathbb{K}$ -algèbre est un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel $\mathcal{A}$ muni d'une multiplication interne

$$\mathcal{A} \times \mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}, (u, v) \mapsto u \times v \text{ vérifiant}$$

$$(\mathcal{A}, +, \times) \text{ est un anneau et } \forall (u, v) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \lambda \cdot (u \times v) = (\lambda \cdot u) \times v = u \times (\lambda \cdot v)$$

La $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$ est dite commutative si la multiplication $\times$ est commutative.

En résumé, une $\mathbb{K}$ -algèbre est un $\mathbb{K}$ -ev $\mathcal{A}$ muni d'une opération interne $\times$ vérifiant :

$$\mathbf{AL}_1 : \forall (u, v, w) \in \mathcal{A}^3, \quad w \times (u \times v) = (w \times u) \times v.$$

$$\mathbf{AL}_2 : \forall (u, v) \in \mathcal{A}^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \lambda \cdot (u \times v) = (\lambda \cdot u) \times v = u \times (\lambda \cdot v).$$

$$\mathbf{AL}_3 : \exists 1 \in \mathcal{A}, \forall u \in \mathcal{A}, \quad u \times 1 = 1 \times u = u.$$

$$\mathbf{AL}_4 : \forall (u, v, w) \in \mathcal{A}^3, \quad w \times (u + v) = w \times u + w \times v \text{ et } (u + v) \times w = u \times w + v \times w.$$

Certains auteurs n'exigent pas l'axiome $\mathbf{AL}_3$ et qualifient la structure ci-dessus d'*algèbre avec unité*, ou encore une *algèbre unitaire*. Pour distinguer le vecteur 1 de $\mathcal{A}$ du scalaire 1 de $\mathbb{K}$, on les note parfois $1_{\mathcal{A}}$ et $1_{\mathbb{K}}$. Comme nous l'avons démontré dans un anneau quelconque, pour tout vecteur v d'une $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$, on a $v \times 0 = 0 \times v = 0$.

Définition 9.14. Sous-algèbre

On appelle sous-algèbre d'une $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$ toute partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ qui est à la fois un sev de $(\mathcal{A}, +, \cdot)$ et un sous-anneau de $(\mathcal{A}, +, \times)$.

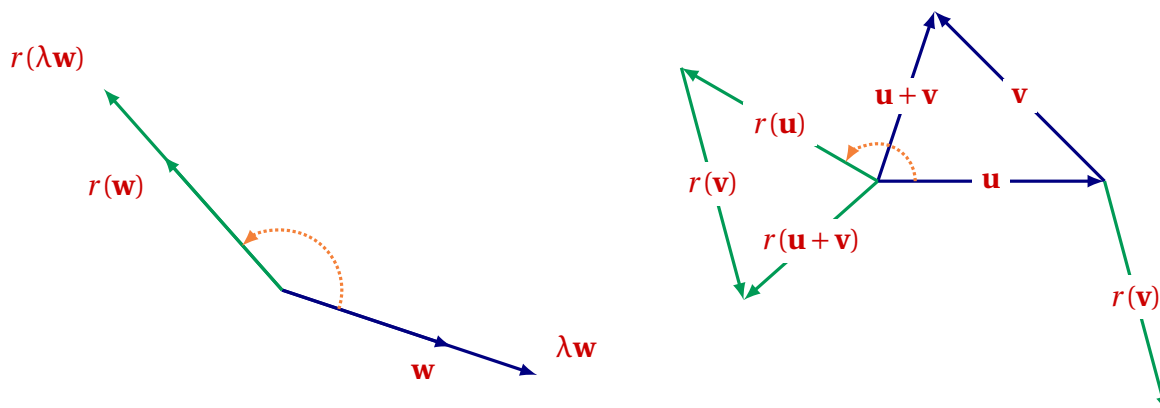
Comme dans le cas des espaces vectoriels et des anneaux, les lois d'une $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{A}$ induisent sur toute sous-algèbre $\mathcal{B}$ une structure de $\mathbb{K}$ -algèbre.

✕ Les sous-ensembles $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ et $\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

✕ Le groupe linéaire $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ n'est pas une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ car n'est pas stable par l'addition : $I_n - I_n = 0$, la matrice nulle n'est pas inversible contrairement à I_n et $-I_n$.

4. Applications linéaires

Considérons la rotation r d'angle θ (150 degrés sur les figures ci-dessous) agissant sur l'espace E des vecteurs du plan :



Quelques constructions élémentaires nous mènent à la conjecture suivante :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \mathbf{w} \in E, r(\lambda \mathbf{w}) = \lambda r(\mathbf{w}) \quad \text{et} \quad \forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in E^2, r(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = r(\mathbf{u}) + r(\mathbf{v})$$

que l'on peut résumer en $\forall (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \lambda) \in E^2 \times \mathbb{R}, r(\mathbf{u} + \lambda \mathbf{v}) = r(\mathbf{u}) + \lambda r(\mathbf{v})$. Les applications entre deux $\mathbb{K}$ -ev vérifiant cette propriété sont qualifiées de *linéaires* : elles sont aux espaces vectoriels ce que les morphismes sont aux groupes et aux anneaux. Elles généralisent les transformations géométriques usuelles (rotations, symétries, etc.).

4.1. Morphismes linéaires

Définition 9.15. Application linéaire, endomorphisme (9.6)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Une application $f : E \rightarrow F$ est dite linéaire si

$$\forall (u, v) \in E^2, \forall \lambda \in \mathbb{K}, f(u + \lambda v) = f(u) + \lambda f(v)$$

On parle aussi de morphisme linéaire.

- ⇒ Une application linéaire de E dans E est appelée un endomorphisme de E .
- ⇒ On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F .
- ⇒ On note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E .

Voici quelques exemples et contre-exemples issus des cours d'Algèbre et d'Analyse :

- ✗ Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), X \mapsto AX$ de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. La trace $\text{tr} : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$.
- ✗ La dérivation $D : f \mapsto f'$ de $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{K})$ dans $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et $f \mapsto \int_0^1 f(t)dt$ de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$.
- ✗ La limite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \lim u_n$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathbb{K}$ où $\mathcal{C}$ est le sev des suites convergentes de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
- ✗ L'application $\phi : \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), f \mapsto f^2$ (carré pour le produit usuel) n'est pas linéaire. En effet, pour $f_0 : x \mapsto x$, on a $\phi(2f_0) = 4f_0^2 \neq 2f_0^2$.
- ✗ L'application $\Gamma : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par $z \mapsto \bar{z}$ est linéaire si on considère $\mathbb{C}$ comme un $\mathbb{R}$ -ev mais est non linéaire si on s'intéresse à la structure de $\mathbb{C}$ -ev de $\mathbb{C}$:

$$\forall (\lambda, z) \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}, \overline{\lambda z} = \lambda \bar{z} \quad \text{et} \quad \underbrace{\overline{i \times i}}_{=-1} \neq \underbrace{\bar{i} \times \bar{i}}_{=1}$$

On dit que Γ est $\mathbb{R}$ -linéaire mais n'est pas $\mathbb{C}$ -linéaire.

- ✗ On poursuivra avec le test (9.7).

Définition 9.15. Homothéties d'un $\mathbb{K}$ -ev

Pour tout $\mathbb{K}$ -ev E et tout scalaire λ l'application de E dans E définie par $x \mapsto \lambda x$ est linéaire. Elle est appelée homothétie de rapport λ .

En particulier, l'application nulle et l'identité de E sont linéaires. Voici quelques conséquences directes de la définition de la linéarité d'une application $f : E \rightarrow F$:

- ⇒ On a $f(0_E) = 0_F$. Nous ne détaillerons pas systématiquement la nature du vecteur nul.

⇒ Pour tout $v \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda v) = \lambda f(v)$ (généralisation de l'idée de proportionnalité).

⇒ Pour $(u, v) \in E^2$, $f(u + v) = f(u) + f(v)$. Pour toute famille finie $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E et $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^I$,

$$f\left(\sum_{i \in I} \lambda_i u_i\right) = \sum_{i \in I} \lambda_i f(u_i)$$

4.2. Opérations sur les applications linéaires

Dans ce paragraphe, nous allons doter l'ensemble des applications linéaires entre deux espaces vectoriels donnés d'une structure d'espace vectoriel.

Définition 9.16. Combinaisons linéaires d'applications linéaires

Pour f et g dans $\mathcal{L}(E, F)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on définit $f + \lambda g : E \rightarrow F$ par $x \mapsto f(x) + \lambda g(x)$.

Les combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires, lorsqu'elles sont définies, sont également linéaires. De plus, la composition est distributive sur l'addition. Plaçons-nous sous les hypothèses du b) de la proposition ci-dessous. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, $(f, f_1) \in \mathcal{L}(E, F)^2$ et $(g, g_1) \in \mathcal{L}(F, G)^2$, on a

$$g \circ (f + f_1) = g \circ f + g \circ f_1, \quad (g + g_1) \circ f = g \circ f + g_1 \circ f, \quad \lambda(g \circ f) = (\lambda g) \circ f = g \circ (\lambda f)$$

En se plaçant dans le cas où $G = F = E$, on en déduit que $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ est une $\mathbb{K}$ -algèbre.

Proposition 9.17. Sommes, composées d'applications linéaires (9.8)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.

- a. Si $\lambda \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(E, F)$, alors $f + \lambda g \in \mathcal{L}(E, F)$.
- b. Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$, alors $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$.
- c. $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ a une structure de $\mathbb{K}$ -ev; d. $(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ)$ a une structure de $\mathbb{K}$ -algèbre.

En tant qu'anneau, la $\mathbb{K}$ -algèbre $\mathcal{L}(E)$ hérite des notations usuelles comme celles des puissances f^n (les itérées de f) d'un endomorphisme f de E . Par exemple, on a

$$\forall (a, b) \in \mathbb{K}^2, (f - a \text{id}_E) \circ (f - b \text{id}_E) = f^2 - (a + b)f + ab \text{id}_E$$

La formule du binôme est applicable à toute somme d'endomorphismes qui commutent.

4.3. Isomorphismes

Nous allons à présent étudier les applications linéaires bijectives.

Définition 9.18. Isomorphismes et automorphismes (9.9)

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev.

- ⇒ Un isomorphisme de E sur F est une application linéaire bijective de E dans F .
- ⇒ Un automorphisme de E est un endomorphisme bijectif de E (i.e. un isomorphisme de E sur E).
- ⇒ On note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E .

Voici quelques illustrations classiques :

✕ Soit $\lambda \in \mathbb{K}$ et $h_\lambda = \lambda \text{id}_E$ où E est un $\mathbb{K}$ -ev (c'est l'homothétie de rapport λ de E). Il est clair que

$$h_\lambda \text{ est un automorphisme de } E \iff \lambda \neq 0 \text{ et, pour } \lambda \in \mathbb{K}^*, h_\lambda^{-1} = h_{\frac{1}{\lambda}}$$

✕ La transposition $\tau : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), A \mapsto A^\top$ est un isomorphisme de réciproque τ .

Proposition 9.19. Réciproque d'une bijection linéaire, groupe linéaire

- a. L'application réciproque d'une application linéaire bijective est linéaire.
- b. $(\text{GL}(E), \circ)$ a une structure de groupe.

Le lecteur est renvoyé au chapitre sur les ensembles, les applications et les relations (ALG 3) pour les relations du type $(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$ valables dans $\text{GL}(E)$.

4.4. Restriction et co-restriction d'une application linéaire

Proposition 9.20. Restriction et co-restriction d'une application linéaire à un sev

La restriction d'une application linéaire à tout sev de son espace de départ est linéaire. La même conclusion vaut pour les co-restrictions à des sev de l'espace d'arrivée.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev se décomposant en $E = E_1 \oplus \dots \oplus E_p$. Une application linéaire de E dans un autre $\mathbb{K}$ -ev F est entièrement définie par ses restrictions aux espaces E_i . Plus précisément,

Proposition 9.20. Définition d'une application linéaire sur des facteurs directs

L'application $\mathcal{L}(E_1 \oplus \dots \oplus E_p, F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, F) \times \dots \times \mathcal{L}(E_p, F)$ est un isomorphisme.

$$f \longmapsto (f|_{E_1}, \dots, f|_{E_p})$$

4.5. Noyau et image

Noyau et image sont essentiels pour saisir la façon dont un morphisme linéaire agit sur les vecteurs.

Définition 9.21. Noyau et image d'une application linéaire (9.10)

Pour tout $f \in \mathcal{L}(E, F)$, on note

$$\text{Im } f := f\langle E \rangle = \{f(x); x \in E\} \text{ et } \text{Ker } f := f^{-1}\langle \{0\} \rangle = \{x \in E; f(x) = 0\}$$

Ces ensembles sont respectivement appelés image et noyau¹ de f . Cf. (9.11).

✕ Considérons $g : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $M \mapsto \text{tr } M$.

✓ Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On a $\text{tr } A = 0$ si et seulement si $A_{1,1} + A_{2,2} = 0$, ainsi

$$\text{Ker } g = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}; (a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \right\} = \text{Vect}(E_{1,1} - E_{2,2}, E_{1,2}, E_{2,1})$$

1. La notation Ker pour le noyau vient de l'allemand « Kern » et de l'anglais « kernel ».

- ✓ On a bien-sûr $\text{Im } g \subset \mathbb{R}$. Comme $g\left(\frac{x}{2}I_2\right) = x$ pour tout réel x , on en déduit l'inclusion réciproque.
 - ✗ Soit $h: \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ définie par $f \mapsto f^{(2)}$ où $\mathcal{P}$ est l'ensemble des fonctions polynomiales.
 - ✓ On sait que $f^{(2)} = 0$ équivaut au caractère affine de f . Ce qui suit établit la surjectivité de h .
 - ✓ Soit $n \in \mathbb{N}$, $(p_0, \dots, p_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $P: x \mapsto \sum_{k=0}^n p_k x^k$. On a $P = Q''$ où $Q: x \mapsto \sum_{k=0}^n \frac{p_k}{(k+2)(k+1)} x^{k+2}$.
 - ✓ Ainsi $\text{Ker } h$ est l'ensemble des fonctions affines de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\text{Im } h = \mathcal{P}$.
- Nous observons sur ces exemples que noyau et image sont des sev. C'est une propriété générale.

Proposition 9.22. Structure du noyau et de l'image

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. L'image de f est un sev de F et le noyau de f est un sev de E .

Un sous-espace défini par une équation s'interprète directement comme un noyau.

- ✗ Considérons $F := \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}; \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n\}$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$F = \text{Ker}(S^2 - aS - b\text{id}_E) \text{ où } S: \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \text{ est définie par } (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$
 - ✗ Pour $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $D: f \mapsto f'$, $\{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f'' = af' + bf\} = \text{Ker}(D^2 - aD - b\text{id}_E)$.
- Le noyau et l'image permettent de caractériser respectivement l'injectivité et la surjectivité.

Proposition 9.23. Injectivité et surjectivité d'une application linéaire

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. **a.** f est injective $\iff \text{Ker } f = \{0\}$; **b.** f est surjective $\iff \text{Im } f = F$.

Proposition 9.24. Image d'un sev engendré par une famille de vecteurs

Pour $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $(u_i)_{i \in I}$ une famille finie de vecteurs de E , on a $f\langle \text{Vect}(u_i)_{i \in I} \rangle = \text{Vect}(f(u_i))_{i \in I}$. La famille $(f(u_i))_{i \in I}$ est appelée image par f de $(u_i)_{i \in I}$.

4.6. Application linéaire canoniquement associée à une matrice

Rappels sur les espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

Pour des scalaires $x_1, \dots, x_n$, on convient d'identifier la liste $(x_1, \dots, x_n)$ et la matrice colonne $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Les espaces $\mathbb{K}^n$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont donc égaux. Ceci revient simplement à écrire les listes en colonne.

Définition 9.25. Application linéaire canoniquement associée à A

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A la fonction

$$\hat{A}: \mathbb{K}^p \rightarrow \mathbb{K}^n, \quad X \mapsto AX \quad (\text{la notation } \hat{A} \text{ n'est pas universelle})$$

- ✗ L'application $u : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x + y + z, x - z)$ est canoniquement associée $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- ✗ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, l'application $\hat{A} : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ définie par $X \mapsto AX$ est un isomorphisme *si et seulement si* A est inversible. En effet, l'inversibilité de A équivaut à

$$\forall Y \in \mathbb{K}^n, \exists ! X \in \mathbb{K}^n, Y = AX \quad (\text{cf. le cours ALG 3 dédié au calcul matriciel})$$

Dans le cas où A est inversible, $\widehat{A}^{-1} = \widehat{A^{-1}}$.

Noyau et image de l'application $\phi_A : X \mapsto AX$ (§ 9.12)

⇒ $\text{Ker } \hat{A}$ est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène $AX = 0$.

⇒ $\text{Im } \hat{A} = \text{Vect}(A_1, \dots, A_p)$ où $A_1, \dots, A_p$ sont les colonnes de A car

$$\text{Im } \hat{A} = \{AX; X \in \mathbb{K}^p\} = \left\{ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}; (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \right\} = \left\{ \sum_{i=1}^p x_i A_i; (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p \right\}$$

- ✗ Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. On a $\text{Ker } \hat{A} = \text{Vect } u$ où $u := (0, -2, 1)$. En effet, pour $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$X \in \text{Ker } \hat{A} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x + y + 2z = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = -2z \end{cases}$$

- ✗ On a $\text{Im } \hat{A} = \text{Vect}(a, b, c)$ où $a := (1, 1)$, $b := (1, 2)$ et $c := (2, 3)$. Comme a et b ne sont pas colinéaires, on a $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(a, b, c) = \text{Vect}(a, b) = \mathbb{R}^2$. Ainsi $\text{Im } \hat{A} = \mathbb{R}^2$. Cet argument « géométrique » ne pouvant encore être justifié (il faudra attendre le chapitre suivant), on remarquera qu'en résolvant un système analogue à ci-dessus, on obtient $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $(u, v) = (2u - v)a + (v - u)b$.

5. Projections et projecteurs

On généralise les projections bien connues de la géométrie.

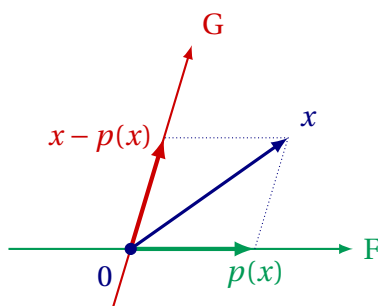
Définition 9.26. Projections associés à la décomposition $E = F \oplus G$

Soit F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E tels que $E = F \oplus G$. Tout vecteur u de E se décompose alors de manière unique en $x = x_F + x_G$ avec $x_F \in F$ et $x_G \in G$.

⇒ La projection sur F parallèlement à G est l'endomorphisme de E défini par $x \mapsto x_F$.

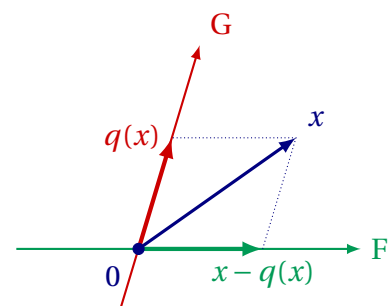
⇒ La symétrie par rapport à F parallèlement à G est l'endomorphisme de E défini par $s : x \mapsto x_F - x_G$.

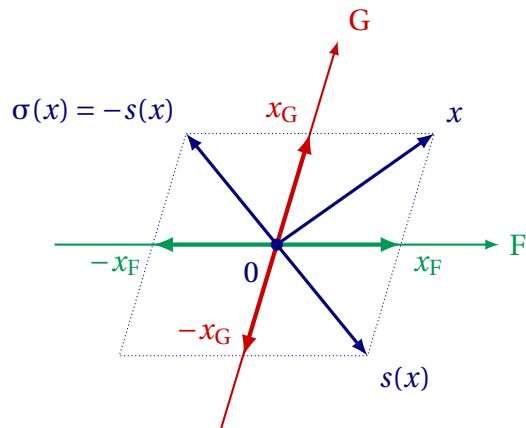
Toutes les propriétés des projections et des symétries se retrouvent au moyen de figures, dans le plan par exemple.



Notons p (resp. q) la projection sur F parallèlement à G (resp. sur G parallèlement à F). On a alors $p + q = \text{id}_E$ car

$$\forall x \in E, x = \underbrace{x_F}_{p(x)} + \underbrace{x_G}_{q(x)}$$





⇒ Notons s la symétrie par rapport à F parallèlement à G et σ la symétrie par rapport à G parallèlement à F .

⇒ On a $\sigma = -s$ et $s = 2p - \text{id}_E$ car

$$\forall x \in E, \quad s(x) = \underbrace{x_F - x_G}_{-(x_G - x_F) = -\sigma(x)} = \underbrace{2x_F - (x_F + x_G)}_{2p(x) - x}$$

Proposition 9.27. Projections et symétries

Soit F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E tels que $E = F \oplus G$. On note p la projection sur F parallèlement à G et s la symétrie par rapport à F parallèlement à G .

- a. $p^2 = p$ et $s^2 = \text{id}_E$;
- b. $\text{Ker } p = G$, $\text{Im } p = F$, $\text{Ker}(s - \text{id}_E) = F$ et $\text{Ker}(s + \text{id}_E) = G$.
- c. En notant q la projection sur G parallèlement à F et σ la symétrie par rapport à G parallèlement à F , on a $q = \text{id}_E - p$ et $\sigma = -s$.

Il faut apprendre à retrouver ces propriétés sur une figure :

$$p(x) = x_F, \quad x_G = x - p(x), \quad s(x) = x_F - x_G = 2p(x) - x$$

$$x \in G \iff p(x) = 0$$

$$\iff x \in \text{Ker } p$$

$$x \in F \iff p(x) = x$$

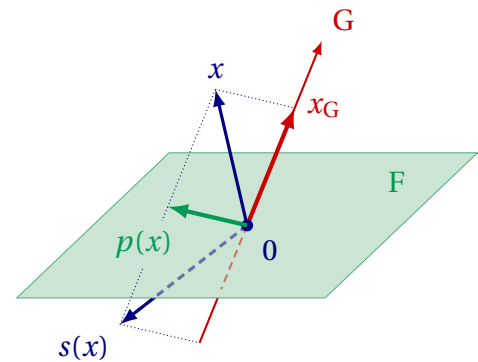
$$\iff x \in \text{Im } p$$

$$x \in G \iff s(x) = -x$$

$$\iff x \in \text{Ker}(s + \text{id}_E)$$

$$x \in F \iff s(x) = x$$

$$\iff x \in \text{Ker}(s - \text{id}_E)$$



Dans la suite de ce paragraphe, nous renversons le point de vue précédent. Nous allons nous intéresser aux deux équations fonctionnelles $f \circ f = f$ et $f \circ f = \text{id}_E$ d'inconnue $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un $\mathbb{K}$ -ev. On sait que les projections de E vérifient la première, la seconde étant vérifiée par les symétries de E .

Définition 9.28. Idempotents (ou projecteurs) et involutions (§ 9.13)

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev. On dit qu'un endomorphisme f de E est :

⇒ un projecteur de E si $f \circ f = f$;

⇒ une involution de E si $f \circ f = \text{id}_E$.

On emploie aussi la terminologie « endomorphisme idempotent² » au lieu de projecteur.

Nous allons établir la réciproque : les projecteurs de E sont tous des projections et les involutions de E sont toutes des symétries de E .

2. Plus généralement, on appelle idempotent d'un anneau A tout élément a de A tel que $a^2 = a$.

Proposition 9.29. Propriétés des projections et des symétries

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, p un projecteur de E et s une involution de E .

- a. $E = \text{Ker } p \oplus \text{Im } p$ et p est la projection sur $\text{Im } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$.
- b. $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ et est la symétrie sur $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$.

Nous terminons ce paragraphe par un résultat souvent utile.

Caractérisation de l'image d'un projecteur

Soit p un projecteur de E . Comme $\text{Im } p = \text{Ker}(\text{id}_E - p)$, on a $y \in \text{Im } p \iff p(y) = y$ pour tout $y \in E$.

6. Sous-espaces affines d'un espace vectoriel et équations linéaires

Définition 9.30. Sous-espaces affines d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

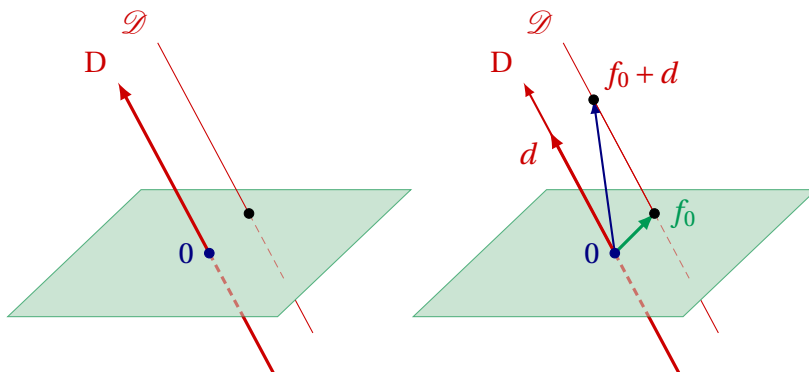
Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et $\mathcal{F} \subset E$.

$\Rightarrow$ On dit que $\mathcal{F}$ est un sous-espace affine de E s'il existe un sev F de E et $f_0 \in E$ tel que

$$\mathcal{F} = \{f_0 + u; u \in F\}$$

$\Rightarrow$ Le sous-espace vectoriel F est alors unique et appelé direction du sous-espace affine $\mathcal{F}$.

On appelle droite affine tout sous-espace affine dont la direction est une droite vectorielle.



Construction d'une droite affine d'un espace vectoriel E :

$$\mathcal{D} = \{f_0 + d; d \in D\}$$

où D est une droite vectorielle de E .

Proposition 9.30. Structure de l'ensemble des solution d'une équation linéaire

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels, $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $y \in F$. L'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = y$, d'inconnue $x \in E$, est vide ou un sous-espace affine de E de direction $\text{Ker } u$.

✗ Résolution de la relation de récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = 2a_n - 1$.

- ✓ La suite constante égale à 1 est solution. Les solutions de l'équation homogène sont les suites géométrique de raison 2. On en déduit l'ensemble des solutions :

$$\mathcal{S} = \left\{ (1 + \lambda 2^n)_{n \in \mathbb{N}}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

7. Tests

9.1.

L'ensemble $\mathbb{R}$ est-il un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$? du $\mathbb{R}$ -espace vectoriel $\mathbb{C}$?

9.2.

Lesquels parmi les ensembles suivants sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$:

$$F_1 = \{(x, y); (x + y)(x - y) = 0\}, \quad F_2 = \{(x, y); 3x - 2y = 0\}, \quad F_3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$$

9.3.

Soit F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E . Établir que $F + G = F \cap G$ *si et seulement si* $F = G$.

9.4.

Soit F, G deux sous-espaces vectoriels de E . Quelles assertions parmi les suivantes sont vraies en général?

- | | | |
|-------------------------------|------------------------|--|
| a. $F \cap G \subset F + G$; | c. $F \subset F + G$; | e. $F \cup (F \cap G) \subset F + G$; |
| b. $F \cup G \subset F + G$; | d. $F + F = F$; | f. $F + G = G + F$. |

9.5.

Soit $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b; (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

9.6.

Fixons B et C dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour chaque application ci-dessous, indiquer s'il s'agit d'une application linéaire :

- | | | |
|---|---|---|
| a. $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K});$
$A \longmapsto A + B$ | b. $g: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K});$
$A \longmapsto BAC$ | c. $h: \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K}).$
$A \longmapsto A^T$ |
|---|---|---|

9.7.

Soit $f: E \rightarrow F$ une application linéaire. Le *graphe de f* défini par $\{(v, f(v)); v \in E\}$ est-il un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel produit $E \times F$?

9.8.

Pour $n \geq 2$ trouver deux endomorphismes non nuls de $\mathbb{K}^n$ dont la composée est nulle.

9.9.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 + f + \text{id}_E = 0$. Montrer que f est bijective.

9.10.

Soit E et F deux $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, démontrer que $\text{Ker } f = \text{Ker } (\lambda f)$ et $\text{Im } f = \text{Im } (\lambda f)$.

9.11.

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $f \in \mathcal{L}(E)$. Trouver une CNS sur $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$ pour que $f^2 = 0$.

9.12.

Soit F le plan d'équation $z = x + y$ dans $\mathbb{R}^3$. Exhiber une application linéaire :

- a.** $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ dont le noyau est F ; **b.** $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont l'image est F .

9.13.

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$, p et q deux projecteurs de E tels que $p \circ q = q \circ p$.

- a.** Prouver que $\psi = p \circ q$ est un projecteur de E .
b. Montrer que $\text{Im } \psi = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.
c. Établir que $\text{Ker } \psi = \text{Ker } p + \text{Ker } q$.

8. Solutions

9.1.

L'axe réel étant non vide et stable par combinaisons linéaires à coefficients réels, il s'agit d'un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$ -ev $\mathbb{C}$. Par contre, puisque $i \cdot 1 = i$ n'appartient pas à l'axe réel, ce dernier n'est pas stable par l'opération externe de $\mathbb{C}$, il n'est donc pas un sous-espace vectoriel du $\mathbb{C}$ -ev $\mathbb{C}$.

9.2.

⇒ Le sous-ensemble F_1 est stable par l'opération externe mais pas par l'addition : en effet, il contient les vecteurs $(1, 1)$ et $(1, -1)$ mais pas leur somme $(2, 0)$.

⇒ Il est clair que $F_2 = \text{Vect}((2, 3))$ et donc que F_2 est sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

⇒ Le sous-ensemble F_3 est stable par addition mais pas par l'opération externe de $\mathbb{R}$. En effet, il contient le vecteur $(0, 1)$ mais pas son opposé $(0, -1)$.

9.3.

⇒ Si $F = G$, on a clairement

$$F + G = F = G = F \cap G$$

⇒ Supposons que $F + G = F \cap G$. On a alors

$$F \subset F \cap G \subset G$$

et puisque F et G jouent des rôles symétriques, on a aussi $G \subset F$: ainsi $F = G$.

9.4.

a. On a $F \cap G \subset F = F + \{0\} \subset F + G$ car, en tant que sev de E , G contient 0 .

b. On a $F = F + \{0\} \subset F + G$ et $G = \{0\} + G \subset F + G$ car tout sev de E contient 0 . On a donc aussi $F \cup G \subset F + G$.

c. On a $F = F + \{0\} \subset F + G$ car, en tant que sev de E , G contient 0 .

d. On a $F = F + \{0\} \subset F + F$ car, en tant que sev de E , F contient 0 . Réciproquement, F étant stable par combinaison linéaire, $F + F \subset F$. On a donc $F = F + F$.

e. Comme $F \cap G \subset F$, on a $F \cup (F \cap G) = F$ donc, d'après le c), $F \cup (F \cap G) \subset F + G$.

f. Comme l'addition d'un ev est toujours commutative, on a clairement $F + G = G + F$.

9.5.

Il est clair que F et G sont des sev de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ car ils contiennent la fonction nulle et sont stables par combinaisons linéaires.

⇒ ANALYSE. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Supposons l'existence de $f \in F$ et $g \in G$ tel que $u = f + g$. Il existe $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $g(x) = ax + b$ pour tout réel x . On a

$$u(0) = f(0) + g(0) = b, u'(0) = f'(0) + g'(0) = a$$

Ainsi (f, g) est unique. Ceci prouve que la somme $F + G$ est directe.

⇒ ANALYSE. Soit $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Notons g la fonction $x \mapsto u(0) + u'(0)x$ et $f := u - g$. On a clairement $g \in G$. De plus

$$\begin{cases} f'(0) = u'(0) - g'(0) = 0 \\ f(0) = u(0) - g(0) = 0 \end{cases}$$

d'où $f \in F$.

9.6.

a. Si $B = 0$, f est linéaire car égale à l'identité de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si $B \neq 0$, on a $f(0) = B \neq 0$ donc f n'est pas linéaire.

b. Soit A et A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, et $\lambda \in \mathbb{K}$. D'après les propriétés des opérations matricielles,

$$\begin{aligned} g(A + \lambda A') &= B(A + \lambda A')C \\ &= BAC + \lambda BA'C \\ &= g(A) + \lambda g(A') \end{aligned}$$

c. L'application h est linéaire d'après le cours de calcul matriciel.

9.7.

Oui. Notons G ce graphe.

⇒ On a $(0, 0) = (0, f(0)) \in G$ car $f(0) = 0$ par linéarité de f .

⇒ Soient $(u, v) \in E^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. On a

$$\begin{aligned} (u, f(u)) + \lambda(v, f(v)) &= (u + \lambda v, f(u) + \lambda f(v)) \\ &\text{par calculs dans } E \times F \\ &= (u + \lambda v, f(u + \lambda v)) \\ &\text{par lin. de } f \end{aligned}$$

ainsi $(u, f(u)) + \lambda(v, f(v)) \in G$.

9.8.

Soit

$$\begin{aligned} f: \mathbb{K}^n &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ (x_1, \dots, x_n) &\longmapsto (0, x_1, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

L'application f est linéaire et $f^2 = 0$. Cependant, $f \neq 0$.

9.9.

On a

$$\begin{aligned} id_E &= -f^2 - f = f \circ (-f - id_E) \\ &= (-f - id_E) \circ f \end{aligned}$$

Ainsi f est bijective et $g^{-1} = -f - id_E$.

9.10.

⇒ On a $f(x) = 0 \iff \lambda f(x) = 0$ pour tout $x \in E$.
Ainsi $\text{Ker } f = \text{Ker } (\lambda f)$.

⇒ Comme $(\lambda f)(x) = f(\lambda x)$ pour tout $x \in E$, on a $\text{Im } (\lambda f) \subset \text{Im } f$. Comme $f = \frac{1}{\lambda}(\lambda f)$, on déduit l'inclusion réciproque du point précédent.

9.11.

On a $f^2 = 0 \iff \text{Im } f \subset \text{Ker } f$.

9.12.

a. $f: (x, y, z) \mapsto x + y - z$ convient.

b. $g: (x, y) \mapsto (x, y, x + y)$ convient.

9.13.

a. L'application ψ est un endomorphisme de E en tant que composée de deux endomorphismes de E . Prouvons que $\psi \circ \psi = \psi$.

$$\begin{aligned} \psi \circ \psi &= (p \circ q) \circ (p \circ q) = p \circ (q \circ p) \circ q \\ &\quad (\text{par associativité de la loi } \circ) \\ &= p \circ (p \circ q) \circ q \\ &\quad (\text{car } p \circ q = q \circ p) \\ &= (p \circ p) \circ (q \circ q) \\ &\quad (\text{par associativité de la loi } \circ) \\ &= p \circ q = \psi \\ &\quad (\text{car } p \text{ et } q \text{ sont des projecteurs}) \end{aligned}$$

b. Procédons par double inclusion.

⇒ Prouvons que $\text{Im } (\psi) \subset \text{Im } (p) \cap \text{Im } (q)$.

Pour tout vecteur x de E ,

$$\begin{cases} \psi(x) = p(q(x)) \in \text{Im } p \\ \psi(x) = q(p(x)) \in \text{Im } q \end{cases}$$

et ainsi $\psi(x) \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

⇒ Prouvons que $\text{Im } p \cap \text{Im } q \subset \text{Im } \psi$.

Soit $y \in \text{Im } p \cap \text{Im } q$, puisque p et q sont des projecteurs, $y = p(y) = q(y)$ et donc $y = p(q(y)) = \psi(y) \in \text{Im } (\psi)$.

NB : on a utilisé une propriété des projecteurs qui abrège bien des démonstrations : si γ est un projecteur de E , $\gamma(y) = y$ si et seulement si $y \in \text{Im } (\gamma)$.

c. Procédons par double inclusion.

⇒ Prouvons que $\text{Ker } p + \text{Ker } q \subset \text{Ker } \psi$.

Soit $x_1 \in \text{Ker } p$ et $x_2 \in \text{Ker } q$, on a

$$\begin{aligned} \psi(x_1 + x_2) &= \psi(x_1) + \psi(x_2) \\ &= q(p(x_1)) + p(q(x_2)) \\ &= q(0) + p(0) = 0 + 0 = 0 \end{aligned}$$

et ainsi $x_1 + x_2 \in \text{Ker } (\psi)$.

⇒ Prouvons que $\text{Ker } (\psi) \subset \text{Ker } (p) + \text{Ker } (q)$.

Soit $x \in \text{Ker } \psi$, $x_1 := q(x)$ et $x_2 := x - q(x)$. On a bien $x = x_1 + x_2$, de plus

$$\begin{cases} p(x_1) = \psi(x) = 0 \\ q(x_2) = q(x) - q^2(x) = 0 \end{cases}$$

car q est un projecteur de E .