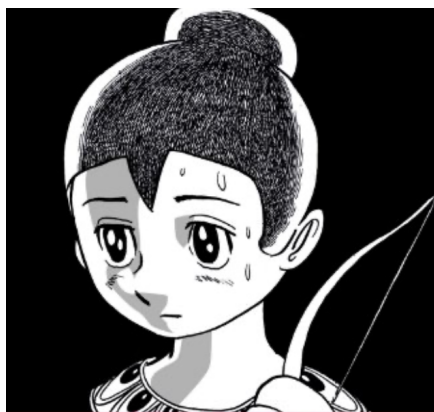




*Dans ce chapitre, nous allons appliquer une partie du cours d'algèbre linéaire à la résolution de deux types d'équations dont les inconnues sont des objets longuement étudiés en Analyse : les équations différentielles linéaires (avec une inconnue dans  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$ ) et les relations de récurrences linéaires (d'inconnue une suite de scalaires).*



Buddha, Tezuka

<b>10</b>	<b>Équations linéaires en analyse</b>	<b>1</b>
1	Équations linéaires	3
1.1	Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire	3
1.2	Équations différentielles linéaires	5
1.3	Équations de récurrence linéaires	6
2	Équations linéaires à coefficients constants	6
3	Équations différentielles linéaires d'ordre un	8
3.1	Résolution de l'équation homogène	8
3.2	Résolution générale par la méthode de variation de la constante	9
3.3	Équations à coefficient constant et second membre polynôme-exponentielle	10
3.4	Problèmes de raccord pour une équation différentielle	12
4	Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants	14
4.1	Résolution de l'équation homogène	14
4.2	Résolution dans le cas d'un second membre polynôme-exponentielle	15
5	Équations de récurrence linéaires d'ordre un	17
6	Équations de récurrence linéaires d'ordre deux à coefficients constants	17
7	Au delà de l'ordre deux	18
8	Énoncés des tests	19
9	Solutions des tests	20

L'INVENTION du calcul différentiel à la fin du XVII<sup>e</sup> siècle par Newton, puis indépendamment par Leibniz dont les travaux sur les *infinitement petits* éclaircis par les frères Bernoulli<sup>1</sup>, a permis la résolution de nombreux problèmes réputés à l'époque insolubles par le calcul analytique. En dehors des déterminations de minima ou de maxima, le « nouveau calcul » a très vite fait ses preuves dans l'étude des courbes *mécaniques* – l'expression est employée par le Marquis Michel de L'Hospital dans son *Analyse des infinitement petits* – telle que la *tractrice* : quelle est l'équation de la courbe décrite par un objet remorqué le long d'une droite par un câble tendu de longueur constante ?

Étudions l'exemple de la charge d'un condensateur. Avec les conventions ci-contre,

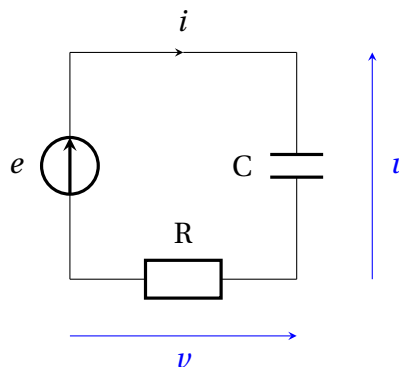
$$e = u + v, \quad i = Cu', \quad v = Ri = RCu'$$

On a donc, en posant  $\tau := \frac{1}{RC}$ ,

$$u' + \frac{1}{\tau}u = e$$

En cas de décharge du condensateur dans la résistance, on a la même équation avec  $e = 0$ .

Seules équations d'ordre un et deux sont au programme. Dans ce qui suit,  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .



## 1. Équations linéaires

Le lecteur est renvoyé au chapitre ALG 8 (et en particulier son dernier paragraphe) pour l'étude du contexte général des équations linéaires.

### 1.1. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire

Commençons par un peu de vocabulaire et quelques notations usuelles.

#### Définition 10.0. Équation linéaire

On appelle équation linéaire toute équation  $\mathcal{E}$  de la forme  $\phi(x) = y$  où :

- ⇒ les ensembles  $E$  et  $F$  sont deux  $\mathbb{K}$ -ev,  $y \in F$  et  $\phi \in \mathcal{L}(E, F)$ , l'inconnue étant un vecteur  $x$  de  $E$ .
- ⇒ L'équation  $\phi(x) = 0$  est appelée équation homogène associée à  $\mathcal{E}$  et souvent notée  $\mathcal{E}_H$ .
- ⇒ Nous noterons classiquement et respectivement  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{S}_H$  l'ensemble des solutions de  $\mathcal{E}$  et  $\mathcal{E}_H$ .

On a donc  $\mathcal{S}_H = \text{Ker } \phi$  et la structure de  $\mathcal{S}$  est donnée par le théorème suivant :

#### Proposition 10.1. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire

On reprend les notations de la définition précédente.

- ⇒  $\mathcal{E}$  est non vide si et seulement si  $y \in \text{Im } \phi$ .

1. Les idées de Newton datent de 1671 et celles de Leibniz de 1684. Jacob et Johann Bernoulli ont étudié le sujet vers les années 1691-1692; ils initièrent Le Marquis de L'Hospital à ce « nouveau calcul ».

⇒ Soit  $x_0 \in E$  une solution de  $\mathcal{E}$ . On a alors

$$\mathcal{S} = \{x_0 + h; h \in \text{Ker } \phi\} = \{x_0 + h; h \in \mathcal{S}_H\}$$

⇒ Ainsi, l'ensemble des solutions de l'équation  $\phi(x) = y$ , d'inconnue  $x \in E$ , est vide ou est un sous-espace affine de  $E$  de direction  $\text{Ker } \phi$ .

La connaissance du noyau et de l'image de  $\phi$  sont donc essentiels à la résolution générale des équations  $\phi(x) = y$ .

✕ Résolvons le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x + y + z = -2 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

✓ Il s'agit bien d'une équation linéaire car ce système s'écrit  $\phi(X) = Y$  où  $\phi$  est l'endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$  canoniquement associé à  $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$  et  $X := (x, y, z)$ ,  $Y := (1, -2, 1)$ .

✓ Le vecteur  $X_0 := (1, 0, 0)$  est une solution particulière évidente. De plus, le noyau de  $\phi$  vaut  $\text{Vect } Z$  où  $Z := (0, 1, -1)$ .

✓ On en déduit que l'ensemble des solutions est la droite affine  $\{X_0 + \lambda Z; \lambda \in \mathbb{R}\}$ .

✓ On peut bien-sûr retrouver ce résultat en appliquant directement l'algorithme du pivot au système initial.

✕ Déterminons à présent tous les polynômes  $P$  réels vérifiant  $P(0) = 1$  et  $P(1) = 2$ .

✓ Il s'agit d'une équation linéaire. En notant  $\phi : \mathbb{R}[X] \rightarrow \mathbb{R}^2$  l'application linéaire  $P \mapsto (P(0), P(1))$ , l'équation s'écrit  $\phi(P) = (1, 2)$ .

✓ Le noyau de  $\phi$  est l'ensemble des polynômes s'annulant en 0 et 1, i.e.  $\{X(X-1)Q; Q \in \mathbb{R}[X]\}$ .

✓ Il est clair que le polynôme  $X + 1$  est une solution particulière de  $\phi(P) = (1, 2)$ .

✓ Ainsi l'ensemble des solutions est le sous-espace affine  $\{X + 1 + X(X-1)Q; Q \in \mathbb{R}[X]\}$ .

✕ Considérons la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + n \quad \text{où } u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

✓ On reconnaît une équation linéaire, avec  $E := \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$  et  $\phi$  l'endomorphisme de  $E$  défini par

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1} - 2u_n)_{n \in \mathbb{N}}$$

En notant  $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $v := (n)_{n \in \mathbb{N}}$ , l'équation de récurrence s'écrit  $\phi(u) = v$ .

✓ L'ensemble des solutions homogènes est le noyau de  $\phi$ , i.e. l'ensemble des suites  $u$  telles que  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - 2u_n = 0$ , i.e. l'ensemble des suites géométriques de raison deux. Puisque celles-ci sont de la forme  $(2^n u_0)_{n \in \mathbb{N}}$ , on en déduit que  $\text{Ker } \phi = \text{Vect } g$  où  $g := (2^n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

✓ On trouve sans peine une suite affine vérifiant la relation de récurrence :  $(-n-1)_{n \in \mathbb{N}}$  convient.

✓ On en déduit que l'ensemble des solutions est la droite affine  $\left\{ (-n-1 + \lambda 2^n)_{n \in \mathbb{N}}; \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ .

Une autre conséquence de la linéarité de l'équation est le théorème de superposition :

**Proposition 10.2. (Théorème de superposition).**

On reprend les notations de la définition précédente. Si  $x_1$  et  $x_2$  sont des solutions respectives de  $\phi(x) = y_1$  et  $\phi(x) = y_2$ , alors, pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $x_1 + \lambda x_2$  est une solution de  $\phi(x) = y_1 + \lambda y_2$ .

Nous avons déjà rencontré de nombreux exemples d'équations linéaires.

**1.2. Équations différentielles linéaires**

Dans tout ce qui suit, le corps  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

**Définition 10.3. Équation différentielle linéaire**

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

⇒ On appelle équation différentielle d'ordre  $p$  toute équation de la forme :

$$\mathcal{E} : y^{(p)} + a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y^{(0)} = b(t)$$

où  $a_0, \dots, a_{p-1}$  et  $b$  sont des fonctions définies et continues sur un vrai intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , l'inconnue  $y$  étant une fonction appartenant à  $\mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ .

⇒ Les fonctions  $a_0, \dots, a_{p-1}$  sont appelés coefficients de  $\mathcal{E}$  et  $b$  son second membre.

⇒ Il est d'usage de ne pas faire figurer la variable  $t$  dans les fonctions  $y^{(0)}, \dots, y^{(p)}$  mais cette convention est réservée à la définition d'une équation. On écrira par exemple que  $y \in \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$  est solution de  $\mathcal{E}$  si et seulement si

$$\forall t \in I, y^{(p)}(t) + a_{p-1}(t)y^{(p-1)}(t) + \dots + a_0(t)y^{(0)}(t) = b(t)$$

⇒ L'équation précédente est dite à coefficients constants si toutes les fonctions  $a_0, \dots, a_{p-1}$  sont constantes.

Il s'agit bien d'une équation linéaire : en choisissant les  $\mathbb{K}$ -ev  $E := \mathcal{C}^p(I, \mathbb{K})$ ,  $F := \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$  et l'application (clairement) linéaire  $\phi$  définie par

$$y \mapsto y^{(p)} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i y^{(i)}$$

l'équation s'écrit  $\phi(y) = b$ . L'équation homogène associée est

$$\mathcal{E}_H : y^{(p)} + a_{p-1}(t)y^{(p-1)} + \dots + a_0(t)y^{(0)} = 0$$

**Proposition 10.4. (Passage sur  $\mathbb{C}$ )**

On reprend les notations de la définition précédente en supposant de plus que les fonctions  $a_0, \dots, a_{p-1}$  sont à valeurs réelles. Pour toute solution  $y : I \rightarrow \mathbb{C}$  de  $\mathcal{E}$ , les fonctions  $\operatorname{Re} y$  et  $\operatorname{Im} y$  sont respectivement des solutions des équations

$$z^{(p)} + a_{p-1}(t)z^{(p-1)} + \dots + a_0(t)z^{(0)} = \operatorname{Re} b(t) \quad \text{et} \quad z^{(p)} + a_{p-1}(t)z^{(p-1)} + \dots + a_0(t)z^{(0)} = \operatorname{Im} b(t)$$

Ce résultat est à rapprocher des calculs de sommes de cosinus, effectués dans le cours ALG 3, par passage sur  $\mathbb{C}$ .

Par exemple, pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle  $y' + y = \cos t$ , il est possible de déterminer une solution particulière  $y_0$  de l'équation  $y' + y = e^{it}$  puis d'extraire sa partie réelle  $\operatorname{Re} y_0$ .

### 1.3. Équations de récurrence linéaires

Dans tout ce qui suit, le corps  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ .

#### Définition 10.5. Relation de récurrence linéaire

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$ .

⇒ On appelle suite récurrente linéaire d'ordre  $p$  toute suite  $u : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant

$$\mathcal{E} : \forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) + a_{p-1}(n)u(n+p-1) + \cdots + a_0(n)u(n) = b(n)$$

où  $a_0, \dots, a_{p-1}$  et  $b$  sont des fonctions définies sur  $\mathbb{N}$  et à valeurs dans  $\mathbb{K}$ , i.e. des suites.

⇒ Les suites  $a_0, \dots, a_{p-1}$  sont appelés coefficients de  $\mathcal{E}$  et  $b$  son second membre.

⇒ L'équation précédente est dite à coefficients constants si toutes les suites  $a_0, \dots, a_{p-1}$  sont constantes.

Nous avons écrit les suites sous forme fonctionnelle afin d'insister sur l'analogie avec les équations différentielles mais en pratique, une relation de récurrence linéaire sera explicitée au format usuel indexé. Par exemple, on peut considérer la relation de récurrence suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+3} = n^2 u_{n+2} - 2n u_{n+1} + u_n + 1$$

qui est bien une relation de récurrence linéaire d'ordre trois avec la suite constante égale à un pour second membre.

Revenons à la définition. Il s'agit bien d'une équation linéaire : en choisissant les  $\mathbb{K}$ -ev  $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et l'endomorphisme  $\phi$  de  $E$  défini par

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto \left( u_{n+p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i(n) u_{i+n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

l'équation s'écrit  $\phi(u) = b$  où  $b := (b(n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . L'équation homogène associée est

$$\mathcal{E}_H : \forall n \in \mathbb{N}, u(n+p) + a_{p-1}(n)u(n+p-1) + \cdots + a_0(n)u(n) = 0$$

La proposition de passage sur  $\mathbb{C}$ , démontrée au paragraphe précédent, admet un analogue évident pour les suites récurrentes lorsque les suites  $a_0, \dots, a_{p-1}$  sont à valeurs réelles.

## 2. Équations linéaires à coefficients constants

Soit  $p \in \mathbb{N}^*$  et  $(a_0, \dots, a_{p-1}) \in \mathbb{K}^p$ . Considérons les équations différentielle et de récurrence linéaires suivantes :

$$\mathcal{E}_{H,\delta} : y^{(p)} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i y^{(i)} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{H,\sigma} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} + \sum_{i=0}^{p-1} a_i u_{i+n} = 0$$

Notons  $\mathcal{S}_{H,\delta}$  et  $\mathcal{S}_{H,\sigma}$  leurs ensembles respectifs de solutions.

✘ En notant  $\sigma$  l'endomorphisme de  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  défini par  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ , on a que

$$\mathcal{S}_{H,\sigma} = \text{Ker} \left( \sigma^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i \sigma^i \right) = \text{Ker } P(\sigma) \quad \text{où } P := X^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i X^i \in \mathbb{K}[X]$$

✘ Considérons  $y$  dans  $\mathcal{S}_{H,\delta}$ . Comme  $y$  est  $p$  fois dérivable et  $y^{(p)} \in \text{Vect}(y, \dots, y^{(p-1)})$  (l'équation est à coefficients constants), on en déduit que  $y^{(p)}$  est dérivable et  $y^{(p+1)} \in \text{Vect}(y', \dots, y^{(p)})$ . Ainsi, par une récurrence facile, on prouve que  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout  $n$  dans  $\mathbb{N}$ . Ainsi,  $\mathcal{E}_{H,\delta} \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$ . En notant  $\delta$  l'endomorphisme de  $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{K})$  défini par  $u \mapsto u'$ , on a que

$$\mathcal{S}_{H,\delta} = \text{Ker} \left( \delta^p + \sum_{i=0}^{p-1} a_i \delta^i \right) = \text{Ker } P(\delta) \quad \text{où } P \text{ est le même polynôme que ci-dessus}$$

La structure des espaces de solutions de ces deux types d'équations est reliée à l'arithmétique de ce polynôme  $P$ .

### Définition 10.6. Équation caractéristique

On reprend les notations précédentes.

⇒ Le polynôme  $P$  est appelé polynôme caractéristique des équations  $\mathcal{E}_{H,\delta}$  et  $\mathcal{E}_{H,\sigma}$ .

⇒ On appelle équation caractéristique de  $\mathcal{E}_{H,\delta}$  et  $\mathcal{E}_{H,\sigma}$  l'équation  $\mathcal{E}_c : P(z) = 0$  d'inconnue  $z \in \mathbb{K}$ .

La structure d'un noyau de la forme  $\text{Ker } P(u)$ , où  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $u$  est un endomorphisme d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ , est reliée à sa décomposition en produit de facteurs irréductibles sur le corps  $\mathbb{K}$  et donc à ces racines.

### Lemme 10.7. (des noyaux)

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev,  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $P_1, \dots, P_m$  dans  $\mathbb{K}[X]$  premiers entre eux. On a

$$\bigoplus_{i=1}^m \text{Ker } P_i(u) = \text{Ker } P(u) \quad \text{où } P := \prod_{i=1}^m P_i$$

✘ Soit  $p$  un projecteur d'un  $\mathbb{K}$ -ev  $E$ . Comme  $p^2 - p = 0$  et  $X^2 - X = X(X - 1)$  avec  $X \wedge (X - 1) = 1$ , on retrouve la décomposition bien connue via le lemme des noyaux :

$$E = \text{Ker}(p) \oplus \text{Ker}(\text{id}_E - p) = \text{Ker}(p) \oplus \text{Im}(p)$$

✘ De même, pour une symétrie  $s$ ,  $s^2 - \text{id}_E = 0$  avec  $X^2 - 1 = (X - 1)(X + 1)$  et  $(X + 1) \wedge (X - 1) = 1$  d'où

$$E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$$

✘ Plus généralement, pour  $P_1 := X - \alpha$  et  $P_2 := X - \beta$  avec  $\alpha \neq \beta$ , on déduit du lemme des noyaux que

$$\text{Ker}((u - \alpha \text{id}_E) \circ (u - \beta \text{id}_E)) = \text{Ker}(u - \alpha \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(u - \beta \text{id}_E)$$

En notant  $P := (X - \alpha)(X - \beta) = X^2 - (\alpha + \beta)X + \alpha\beta$ , ce lemme permet donc de *réduire* la résolution de  $u^2(x) - (\alpha + \beta)u(x) + \alpha\beta x = 0$  à celles de  $u(x) = \alpha x$  et  $u(x) = \beta x$ . On a cassé une équation d'ordre deux en deux équations d'ordre un.

### 3. Équations différentielles linéaires d'ordre un

Nous allons à présent aborder la résolution de toutes les équations différentielles d'ordre un, i.e. de la forme

$$\mathcal{E} : y' + a(t)y = b(t)$$

où  $a$  et  $b$  sont des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ ,  $I$  étant un vrai intervalle de  $\mathbb{R}$ .

Lorsque l'intervalle  $I$  de définition des coefficients n'est pas spécifié, nous choisirons le (voire les) plus grand intervalle possible sur lequel les coefficients sont définis.

De même, dans le cas où le corps  $\mathbb{K}$  n'est pas précisé, nous choisirons d'office  $\mathbb{R}$  si tous les coefficients sont à valeurs réelles, sinon  $\mathbb{C}$ .

#### 3.1. Résolution de l'équation homogène

La stratégie de résolution est de chercher une fonction  $\delta : I \rightarrow \mathbb{K}$  ne s'annulant pas telle que  $\delta y' + a\delta y$  soit la dérivée d'une fonction  $\gamma$ . On aura donc

$$\begin{aligned} \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = 0 &\iff \forall t \in I, \delta(t)y'(t) + a(t)\delta(t)y(t) = 0 \\ &\iff \forall t \in I, \gamma'(t) = 0 \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, \gamma(t) = \lambda \end{aligned}$$

Afin de reconnaître en  $\delta y' + a\delta y$  la dérivée d'un produit, il suffit de trouver  $\delta$  non nulle telle que  $\delta' = a\delta$ , le choix de  $\delta := \exp \circ A$  où  $A$  est une primitive quelconque de  $a$  sur  $I$  convient donc.

Cette approche s'appelle la technique du facteur intégrant et peut se généraliser à d'autres contextes (cf. la suite de ce cours).

#### Proposition 10.8. Résolution d'une équation linéaire homogène d'ordre un ( § 10.1 )

Soit  $a : I \rightarrow \mathbb{K}$  continue. L'ensemble des solutions de  $\mathcal{E}_H : y' + a(t)y = 0$  vaut

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect } f \text{ où } f : t \mapsto e^{-A(t)} \text{ (définie de } I \text{ dans } \mathbb{K}) \text{ avec } A(t) = \int a(t)dt$$

✘ Résolvons les équations différentielles d'ordre un  $\mathcal{E}_1 : y' - 2y = 0$  et  $\mathcal{E}_2 : y' + xy = 0$ .

Dans les deux cas, on va résoudre sur  $I := \mathbb{R}$  en recherchant les solutions à valeurs réelles.

✓ Comme  $\int -2dx = -2x$ , les solutions de  $\mathcal{E}_1$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{2x}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

✓ Comme  $\int xdx = \frac{x^2}{2}$ , les solutions de  $\mathcal{E}_2$  sont les fonctions de la forme  $x \mapsto \lambda e^{-\frac{x^2}{2}}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

✘ Résolvons l'équation  $\mathcal{E}_3 : y' - \frac{y}{1+e^t} = 0$ . On recherche les fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Comme  $\int -\frac{dt}{e^t+1} = -\int \frac{e^{-t}}{e^{-t}+1} dt = \ln(e^{-t}+1)$ , les solutions de  $\mathcal{E}_3$  sont les fonctions de la forme :

$$t \mapsto \frac{\lambda}{e^{-t}+1} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

✘ On pourra aborder le test ( § 10.2 ).

### 3.2. Résolution générale par la méthode de variation de la constante

La méthode du *facteur intégrant* permet la résolution de l'équation générale. En notant  $A$  une primitive de  $a$  sur  $I$  :

$$\begin{aligned} \forall t \in I, y'(t) + a(t)y(t) = b(t) &\iff \forall t \in I, e^{A(t)}y'(t) + a(t)e^{A(t)}y(t) = b(t)e^{A(t)} \\ &\iff \forall t \in I, (y \exp \circ A)'(t) = b(t)e^{A(t)} \\ &\iff y \exp \circ A \text{ est une primitive de } b \exp \circ A \text{ sur } I \\ &\iff \exists \lambda \in \mathbb{K}, \forall t \in I, y(t) = e^{-A(t)} \left( \lambda + \int_{t_0}^t b(x)e^{A(x)} dx \right) \end{aligned}$$

où  $t_0$  désigne un élément arbitraire de l'intervalle  $I$ . La résolution est donc ramenée au calcul de deux primitives. En pratique, on rédige plutôt de la façon suivante :

#### Résolution de $E : y' + a(t)y = b(t)$ par la variation de la constante

- ⇒ On résout l'équation homogène  $E_H : y' + a(t)y = 0$  : on choisit  $y_0 = e^{-A}$  où  $A(t) = \int a(t)dt$ .
- ⇒ Dans la pratique, on recherche les solutions sous la forme  $y = \lambda y_0$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable que l'on détermine en « injectant » l'expression dans l'équation (ce qui donne  $\lambda' y_0 = b$ ).

La forme des solutions est garantie par le fait que  $y_0$  ne s'annule pas et est dérivable sur l'intervalle  $I$ . Deux rédactions sont possibles. On peut utiliser la variation de la constante pour déterminer *toutes* les solutions de l'équation (il faut alors insister sur les équivalences) ou pour trouver *une solution particulière*.

✕ Résoudre sur l'équation  $\mathcal{E}_1 : y' + y = e^t$ .

Les coefficients étant définis sur  $\mathbb{R}$  à valeurs réelles, nous recherchons des solutions du même type.

- ✓ Les solutions de l'équation homogène sont de la forme  $t \mapsto \lambda e^{-t}$  avec  $\lambda$ .
- ✓ Appliquons la méthode de la variation de la constante. Les solutions s'écrivent sous la forme  $y : t \mapsto \lambda(t)e^{-t}$  avec  $\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On a

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } \mathcal{E}_1 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t)e^{-t} = e^t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = e^{2t} \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \lambda(t) = \frac{e^{2t}}{2} + \mu \end{aligned}$$

Ainsi, les solutions de  $\mathcal{E}_1$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \frac{e^t}{2} + \mu e^{-t}$  où  $\mu \in \mathbb{R}$ .

✕ Passons à la résolution  $\mathcal{E}_2 : y' + \tanh(t)y = \sinh(t)$ . La même remarque vaut ici.

- ✓ Comme  $\int \tanh(t)dt = \int \frac{\sinh t}{\cosh t} dt = \ln \cosh t$ , les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\lambda}{\cosh t} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

- ✓ Appliquons la méthode de la variation de la constante afin de terminer une solution particulière sous la forme  $y : t \mapsto \frac{\lambda(t)}{\cosh t}$  où  $\lambda$  est une fonction dérivable. On a

$$\begin{aligned} y \text{ solution de } \mathcal{E}_2 &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \frac{\lambda'(t)}{\cosh t} = \sinh t \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \lambda'(t) = (\cosh t)(\sinh t) = \frac{\sinh 2t}{2} \end{aligned}$$

La fonction  $\lambda : t \mapsto \frac{\cosh 2t}{4}$  convient et  $y : t \mapsto \frac{\cosh 2t}{4 \cosh t}$  est une solution particulière de l'équation.

- ✓ On déduit du thème de structure que les solutions sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto \frac{\cosh 2t}{4 \cosh t} + \frac{\mu}{\cosh t} \quad \text{où } \mu \in \mathbb{R}$$

✗ Le test (10.3) est tout indiqué pour achever la lecture de ce paragraphe.

La donnée d'une équation  $E$  et d'une condition initiale est appelée *problème de Cauchy pour  $\mathcal{E}$* . On déduit de la résolution générale précédente que tout problème de Cauchy admet une unique solution.

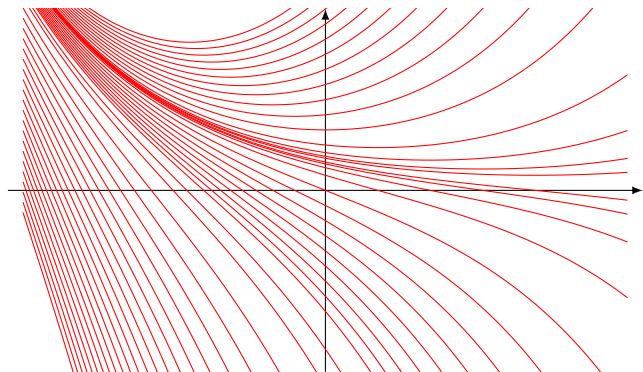
### Proposition 10.9. Existence et unicité de la solution à un problème de Cauchy

Soit  $a$  et  $b : I \rightarrow \mathbb{K}$  continues et  $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$ .

Il existe une unique solution  $f$  de  $E : y' + a(t)y = b(t)$  vérifiant  $f(t_0) = y_0$ .

On déduit de ce théorème que les graphes des solutions de l'équation différentielle  $E$  partitionnent l'espace des phases  $I \times \mathbb{R}$  (il s'agit par définition de l'ensemble des conditions initiales au format  $(t_0, y_0)$ ).

En particulier, deux solutions prenant la même valeur en un certain instant  $t_0$  sont égales.



### 3.3. Équations à coefficient constant et second membre polynôme-exponentielle

Considérons  $(a, \omega) \in \mathbb{K}^2$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$  et l'équation  $\mathcal{E} : y' + ay = P(t)e^{\omega t}$ .

Comme l'ensemble  $\{t \mapsto Q(t)e^{\omega t}; Q \in \mathbb{K}[X]\}$  est stable par dérivation, il est raisonnable de rechercher une solution particulière de  $\mathcal{E}$  dans cet ensemble. Soit  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $y : t \mapsto Q(t)e^{\omega t}$ . On a

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } \mathcal{E} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Q'(t)e^{\omega t} + Q(t)\omega e^{\omega t} + aQ(t)e^{\omega t} = P(t)e^{\omega t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Q'(t) + (\omega + a)Q(t) = P(t) \\ &\iff Q' + (\omega + a)Q = P \end{aligned}$$

car un polynôme admettant une infinité de racine est nul.

Notons  $n$  le degré de  $P$  que l'on peut supposer non nul (les équations homogènes ont déjà été résolues). Si  $\omega + a = 0$ , alors il suffit de choisir  $Q$  tel que  $Q' = P$ . Supposons dorénavant que  $\omega + a \neq 0$ . Considérons l'endomorphisme suivant

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ Q &\longmapsto Q' + (\omega + a)Q\end{aligned}$$

L'équation  $Q' + (\omega + a)Q = 0$  s'écrit  $Q' = -(\omega + a)Q$ . Comme  $\omega + a \neq 0$ , on a nécessairement  $Q = 0$  car sinon les deux membres auraient des degrés différents. Ainsi  $\phi$  est injective donc bijective car  $\mathbb{K}_n[X]$  est de dimension finie.

On en déduit la proposition suivante.

**Proposition 10.10. Cas d'un second membre polynôme-exponentielle (10.4)**

Soit  $(a, \omega) \in \mathbb{K}^2$  et  $P \in \mathbb{K}[X]$ . L'équation  $\mathcal{E} : y' + ay = P(t)e^{\omega t}$  admet sur  $\mathbb{R}$  une solution particulière de la forme  $t \mapsto Q(t)e^{\omega t}$  où  $Q \in \mathbb{K}[X]$ .

✘ Résolvons sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $\mathcal{E} : y' - y = e^t + te^{2t}$ .

✓ Les solutions de  $\mathcal{E}_H$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \lambda e^t$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

✓ On va appliquer le théorème de superposition pour déterminer une solution particulière. D'après le paragraphe 3.3, on sait qu'il existe des solutions particulières de  $y' - y = e^t$  et  $y' - y = te^{2t}$  respectivement de la forme  $y_1 : t \mapsto P(t)e^t$  et  $y_2 : t \mapsto Q(t)e^{2t}$  avec  $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$ . Après tout calcul, on obtient

$$\forall t \in \mathbb{R}, P'(t) = 1 \text{ et } Q'(t) + Q(t) = t$$

On en déduit que  $P := X$  convient et que  $\deg Q = 1$  (en examinant les degrés des deux membres). En posant  $Q := ax + b$ , on obtient  $(a, b) = (1, -1)$ .

✓ Les solutions de  $\mathcal{E}$  sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto te^t + (t-1)e^{2t} + \lambda e^t \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

✘ Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $\mathcal{E} : y' + y = t \cos t$ .

✓ Les solutions de  $\mathcal{E}_H : y' + y = 0$  sont les fonctions de la forme  $t \mapsto \lambda e^{-t}$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

✓ L'équation étant à coefficients réels, nous passons sur  $\mathbb{C}$  afin de faire apparaître un polynôme-exponentielle et de trouver une solution particulière. Considérons  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}} : y' + y = te^{it}$ . On sait (cf. le paragraphe 3.3) que  $\mathcal{E}_{\mathbb{C}}$  admet une solution de la forme  $y : t \mapsto P(t)e^{it}$  avec  $P \in \mathbb{C}[X]$ . On a

$$\begin{aligned}y \text{ est solution de } \mathcal{E}_{\mathbb{C}} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, P'(t)e^{it} + P(t)ie^{it} + P(t)e^{it} = te^{it} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, P'(t) + (1+i)P(t) = t\end{aligned}$$

Un tel polynôme  $P$  est donc nécessairement de degré un (il suffit de comparer les degrés des deux membres). En posant  $P := aX + b$ , on obtient  $a = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2}$  et  $b = -\frac{a}{1+i} = \frac{i}{2}$  d'où

$$y : t \mapsto \left(\frac{i}{2} + \frac{1-i}{2}t\right)e^{it} \text{ et donc } \operatorname{Re} y : t \mapsto \frac{t \cos t}{2} + \frac{(t-1) \sin t}{2} \text{ est solution de } \mathcal{E}$$

✓ Les solutions de  $\mathcal{E}$  sont de la forme  $t \mapsto \frac{t \cos t}{2} + \frac{(t-1) \sin t}{2} + \lambda e^{-t}$  où  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Le lecteur pourra aborder le test 10.4 avec profit.

✘ Poursuivre par le test (❗ 10.5).

Il est possible de déterminer des solutions particulières dans d'autres cas mais le programme se limite à ce qui précède. Dans certaines situations, l'intuition ou une indication permettent d'éviter la variation de la constante.

✘ Résoudre  $\mathcal{E} : (x^2 + 1)y' - 3xy = 1$  sachant qu'elle admet une solution polynomiale.

✓ Puisque  $-\int \frac{-3x}{1+x^2} dx = \lambda \frac{3}{2} \ln(x^2 + 1)$ , les solutions de  $\mathcal{E}_H$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \lambda(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

✓ Recherchons le degré  $n$  d'une solution polynomiale  $P$  de  $\mathcal{E}$ . Posons  $P := p_n X^n + \dots + p_0$ . Le polynôme  $(X^2 + 1)P' - 3XP$  est de degré au plus  $n + 1$  et son monôme en  $X^{n+1}$  vaut  $p_n(n-3)X^{n+1}$ . Si  $P$  est solution de l'équation ce terme est nul. Ainsi, puisque  $p_n \neq 0$ , on a nécessairement  $n = 3$ . On recherche donc une solution de la forme  $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ . Après tout calcul, on obtient  $b = d = 0, c = 1$  et  $a = \frac{2}{3}$ .

✓ Les solutions de  $\mathcal{E}$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto x + \frac{2}{3}x^3 + \lambda(x^2 + 1)^{\frac{3}{2}} \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

✘ Le lecteur parachèvera sa lecture par le test (❗ 10.6).

### 3.4. Problèmes de raccord pour une équation différentielle

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié des équations différentielles de la forme  $E : y' + a(t)y = c(t)$ . Dans le cas d'une équation plus générale  $\alpha(t)y' + \beta(t)y = \gamma(t)$ , on se place sur l'ensemble  $\mathcal{D}$  des réels  $t$  tels que  $\alpha(t) \neq 0$ . Dans la pratique,  $\mathcal{D}$  est une réunion finie d'intervalles. On résout l'équation sur chaque intervalle et on examine s'il est possible de raccorder les solutions aux bornes de  $\mathcal{D}$ .

✘ Résolvons l'équation  $E_1 : xy' - 2y = x^3$  sur  $\mathbb{R}$ .

✓ On vérifie facilement (sinon on effectue une variation de la constante) que  $x \mapsto x^3$  est solution de  $E_1$  sur  $\mathbb{R}$ .

✓ Sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ , l'équation homogène s'écrit  $y' - \frac{2}{x}y = 0$ . Comme  $\int \frac{-2dx}{x} = -\ln x^2$ , les solutions de  $E_1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto x^3 + \lambda x^2 \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}$$

✓ ANALYSE. Soit  $f$  une solution de  $E_1$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Il existe  $(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \lambda_- x^2 & \text{pour } x < 0 \\ x^3 + \lambda_+ x^2 & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , elle est continue en 0 d'où  $f(0) = 0$  d'après les expressions ci-dessus.

- ✓ SYNTHÈSE. Soit  $(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{R}^2$  et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^3 + \lambda_- x^2 & \text{pour } x \leq 0 \\ x^3 + \lambda_+ x^2 & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

Cette fonction est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  par opérations sur les fonctions dérivables. Elle est de plus dérivable en 0 à gauche et à droite avec  $f'_g(0) = f'_d(0) = 0$ . Ainsi  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(0) = 0$  : l'équation  $\mathbf{E}_1$  est donc bien vérifiée en 0 donc sur  $\mathbb{R}$  tout entier.

- ✗ Résolvons l'équation  $\mathbf{E}_2 : xy' + y = 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

- ✓ Sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$ , l'équation homogène s'écrit  $y' + \frac{1}{x}y = 0$ . Comme  $\int \frac{dx}{x} = \ln|x|$ , les solutions de  $\mathbf{E}_1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sur  $\mathbb{R}_-^*$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda}{x} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

- ✓ ANALYSE. Soit  $f$  une solution de  $\mathbf{E}_1$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Il existe  $(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{R}^2$  tel que

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda_-}{x} & \text{pour } x < 0 \\ \frac{\lambda_+}{x} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

Comme  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , elle est continue en 0 d'où  $\lambda_- = \lambda_+ = 0$  d'après les expressions ci-dessus. Ainsi  $f = 0$ .

- ✓ SYNTHÈSE. La fonction nulle est clairement solution de  $\mathbf{E}_2$ .

- ✗ Résolvons l'équation  $\mathbf{E}_3 : xy' + y = -\frac{1}{x^2}$  sur  $\mathbb{R}$ .

- ✓ La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x^2}$  est solution sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $\mathbb{R}_-^*$  de l'équation  $\mathbf{E}_3$ . Les solutions sur ces intervalles de  $\mathbf{E}_3$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{1}{x^2} + \frac{\lambda}{x} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}$$

- ✓ ANALYSE. Soit  $f$  une solution de  $\mathbf{E}_3$  définie sur  $\mathbb{R}$ . Il existe  $(\lambda_-, \lambda_+) \in \mathbb{R}^2$  tel que

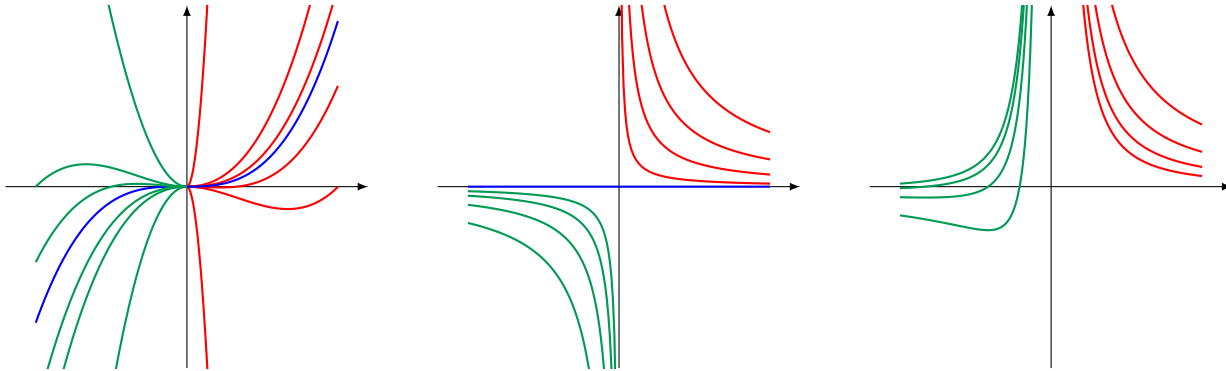
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} + \frac{\lambda_-}{x} & \text{pour } x < 0 \\ \frac{1}{x^2} + \frac{\lambda_+}{x} & \text{pour } x > 0 \end{cases}$$

On aboutit à une absurdité car  $f$  n'admet pas de limite réelle en 0 alors qu'elle est dérivable en ce point. L'équation  $\mathbf{E}_3$  n'a donc aucune solution sur  $\mathbb{R}$ .

— Tout peut se produire! —

Contrairement aux équations de la forme  $y' + a(x)y = b(x)$  où il existe une infinité de solutions, toutes définies sur le même intervalle  $I$  que  $a$  et  $b$ , tous les cas de figure peuvent se produire dans le cas des équations de la forme  $\alpha(x)y' + \beta(x)y = \gamma(x)$  : il peut n'exister aucune solution sur  $I$ , en exister une seule ou une infinité.

Les figures ci-dessous illustrent les trois configurations : une infinité de solutions (dans ce cas, toute solution à gauche – **vert** – se raccorde avec toute solution à droite – **rouge** – en une solution sur  $\mathbb{R}$  – **bleu**), une seule solution et aucune solution (aucun raccord possible) :



## 4. Équations différentielles linéaires d'ordre deux à coefficients constants

### 4.1. Résolution de l'équation homogène

Considérons  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  et  $\mathcal{E}_H : y'' + ay' + cy = 0$ . Considérons une solution  $y$  de cette équation. Comme  $y'' \in \text{Vect}(y, y') \subset \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , la fonction  $y''$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  donc  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^3$  et ainsi de suite : par une récurrence facile, on démontre que  $y$  est de classe  $\mathcal{C}^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

Considérons le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  et l'endomorphisme  $D$  défini par

$$D : E \rightarrow E, f \mapsto f'$$

D'après la remarque initiale,  $\mathcal{S}_H = \text{Ker}(D^2 - aD - \text{bid}_E) = \text{Ker} P(D)$  où  $P := X^2 - aX - b \in \mathbb{K}[X]$ .

✘ Supposons que  $\mathcal{E}_c$  admette deux racines  $\alpha$  et  $\beta$  distinctes dans  $\mathbb{K}$ . Comme  $P = (X - \alpha)(X - \beta)$ , on déduit du lemme des noyaux que

$$\mathcal{S}_H = \text{Ker} P(D) = \text{Ker}(D - \alpha \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(D - \beta \text{id}_E) = \text{Vect}(t \mapsto \lambda e^{\alpha t}) \oplus \text{Vect}(t \mapsto \lambda e^{\beta t})$$

car  $\text{Ker}(D - \mu \text{id}_E)$  est l'ensemble des solutions de  $y' - \mu y = 0$  pour tout scalaire  $\mu$ .

✘ Supposons que  $\mathcal{E}_c$  admette une racine double  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ . On ne peut plus appliquer le lemme des noyaux. On remarque que

$$\begin{aligned} y \in \text{Ker}((D - \alpha \text{id}_E)^2) &\iff D(y) - \alpha y \in \text{Ker}(D - \alpha \text{id}_E) \\ &\iff y' - \alpha y \in \text{Ker}(D - \alpha \text{id}_E) \\ &\iff y' - \alpha y \in \text{Vect}(t \mapsto e^{\alpha t}) \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{K}, \forall t \in \mathbb{R}, y'(t) - \alpha y(t) = \mu e^{\alpha t} \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{K}, \forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = \mu \text{ où } \gamma : t \mapsto y(t)e^{-\alpha t} \\ &\iff \exists (\mu, \lambda) \in \mathbb{K}^2, \forall t \in \mathbb{R}, \gamma'(t) = \mu t + \lambda \end{aligned}$$

On en déduit donc que  $\mathcal{S}_H = \text{Vect}(t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto t e^{\alpha t})$ .

- ✘ Étudions le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $\mathcal{E}_c$  admet deux racines complexes conjuguées non réelles  $r \pm is$  avec  $(r, s) \in \mathbb{R}^2$ . Considérons une solution à valeurs réelles  $y$ . On sait d'après le premier point que

$$y \in \text{Vect}_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto e^{ist} e^{rt}, t \mapsto e^{-ist} e^{rt}\right) \subset \text{Vect}_{\mathbb{C}}\left(t \mapsto \cos(st) e^{rt}, t \mapsto \sin(st) e^{rt}\right)$$

car  $t \mapsto e^{\pm ist} e^{rt}$  sont combinaisons linéaires de  $t \mapsto \cos(st) e^{rt}$  et  $t \mapsto \sin(st) e^{rt}$ .

### Proposition 10.11. Équation homogène à coefficients constants (???)

Soit  $(b, c) \in \mathbb{K}^2$ . On note  $\mathcal{S}_H^{\mathbb{K}}$  l'ensemble des solutions de  $\mathcal{E}_H$  à valeurs dans  $\mathbb{K}$ .

a. Si  $\mathcal{E}_c$  admet deux racines  $\alpha \neq \beta$  dans  $\mathbb{K}$ , alors  $\mathcal{S}_H^{\mathbb{K}} = \text{Vect}\left(t \mapsto \lambda e^{\alpha t}, t \mapsto e^{\beta t}\right)$ .

b. Si  $\mathcal{E}_c$  admet pour racines  $r \pm is$  (où  $r$  et  $s$  sont dans  $\mathbb{R}$ ), alors

$$\mathcal{S}_H^{\mathbb{R}} = \text{Vect}\left(t \mapsto \cos(st) e^{rt}, t \mapsto \sin(st) e^{rt}\right) = \left\{t \mapsto A \cos(t - \varphi) e^{rt}; (A, \varphi) \in \mathbb{R}^2\right\}$$

c. Si  $\mathcal{E}_c$  admet une racine double  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ , alors  $\mathcal{S}_H^{\mathbb{K}} = \text{Vect}\left(t \mapsto e^{\alpha t}, t \mapsto t e^{\alpha t}\right)$ .

Ainsi, dans tous les cas,  $\dim \mathcal{S}_H = 2$ .

- ✘ En particulier, pour  $y'' + \omega^2 y = 0$  avec  $\omega \in \mathbb{R}^*$ , on a  $\mathcal{S}_H^{\mathbb{R}} = \text{Vect}\left(t \mapsto \cos \omega t, t \mapsto \sin \omega t\right)$ .

- ✘ Pour  $y'' - \omega^2 y = 0$ , on trouve

$$\mathcal{S}_H^{\mathbb{R}} = \text{Vect}\left(t \mapsto e^{\omega t}, t \mapsto e^{-\omega t}\right) = \text{Vect}\left(t \mapsto \cosh \omega t, t \mapsto \sinh \omega t\right)$$

- ✘ Déterminons les solutions réelles de  $\mathcal{E}^\lambda : y'' + 2\lambda y' + y = 0$  pour  $\lambda \in \mathbb{R}$ .

Son équation caractéristique est  $\mathcal{E}_c^\lambda : z^2 + 2\lambda z + 1 = 0$ , de discriminant  $4(\lambda^2 - 1)$ .

- ✓ Cas 1 :  $\lambda \in \{-1, 1\}$ . L'équation  $\mathcal{E}_c^\lambda$  admet  $-\lambda$  pour racine double d'où

$$\mathcal{S}_H^\lambda = \text{Vect}\left(t \mapsto e^{-\lambda t}, t \mapsto t e^{-\lambda t}\right)$$

- ✓ Cas 2 :  $|\lambda| > 1$ . L'équation  $\mathcal{E}_c^\lambda$  admet deux racines distinctes  $r_\lambda^\pm := -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - 1}$ , d'où

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}\left(t \mapsto e^{r_\lambda^- t}, t \mapsto e^{r_\lambda^+ t}\right)$$

- ✓ Cas 3 :  $|\lambda| < 1$ . L'équation  $\mathcal{E}_c^\lambda$  admet deux racines distinctes  $r_\lambda := -\lambda + i\sqrt{1 - \lambda^2}$  et  $\bar{r}_\lambda$ , d'où

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}\left(t \mapsto \cos(\omega_\lambda t) e^{-\lambda t}, t \mapsto \sin(\omega_\lambda t) e^{-\lambda t}\right) \text{ avec } \omega_\lambda := \sqrt{1 - \lambda^2}$$

- ✘ Nous recommandons le test (?? 10.7) pour conclure ce paragraphe en beauté.

## 4.2. Résolution dans le cas d'un second membre polynôme-exponentielle

La théorie générale des équations différentielles linéaires d'ordre deux avec second membre n'est pas au programme. Le seul cas à connaître est celui des équations à coefficients constants avec un second membre polynôme-exponentielle, i.e. de la forme  $t \mapsto P(t) e^{\omega t}$  où  $P \in \mathbb{K}[X]$  et  $\omega \in \mathbb{K}$ .

Considérons  $(a, b, \omega) \in \mathbb{K}^2$ ,  $P \in \mathbb{K}[X]$  et l'équation  $\mathcal{E} : y'' + ay' + by = P(t)e^{\omega t}$ .

Comme l'ensemble  $\{t \mapsto Q(t)e^{\omega t}; Q \in \mathbb{K}[X]\}$  est stable par dérivation, il est raisonnable de rechercher une solution particulière de  $\mathcal{E}$  dans cet ensemble. Soit  $Q \in \mathbb{K}[X]$  et  $y : t \mapsto Q(t)e^{\omega t}$ . On a

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } \mathcal{E} &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Q''(t)e^{\omega t} + (2\omega + a)Q'(t)\omega e^{\omega t} + (\omega^2 + a\omega + b)Q(t)e^{\omega t} = P(t)e^{\omega t} \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, Q''(t) + (2\omega + a)Q'(t) + (\omega^2 + a\omega + b)Q(t) = P(t) \\ &\iff Q'' + (2\omega + a)Q' + (\omega^2 + a\omega + b)Q = P \end{aligned}$$

car un polynôme admettant une infinité de racine est nul.

Notons  $n$  le degré de  $P$  que l'on peut supposer non nul (les équations homogènes ont déjà été résolues). Si  $\omega^2 + a\omega + b = 0$ , alors on est ramené à une équation déjà étudiée au paragraphe 3.3. Supposons dorénavant que  $\omega^2 + a\omega + b \neq 0$ . Considérons l'endomorphisme suivant

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{K}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_n[X] \\ Q &\longmapsto Q'' + (2\omega + a)Q' + (\omega^2 + a\omega + b)Q \end{aligned}$$

L'équation  $Q'' + (2\omega + a)Q' + (\omega^2 + a\omega + b)Q = 0$  s'écrit  $Q'' + (2\omega + a)Q' = -(\omega^2 + a\omega + b)Q$ . Comme  $\omega^2 + a\omega + b \neq 0$ , on a nécessairement  $Q = 0$  car sinon les deux membres auraient des degrés différents. Ainsi  $\phi$  est injective donc bijective car  $\mathbb{K}_n[X]$  est de dimension finie.

On en déduit la proposition suivante.

### Proposition 10.12. Cas d'un second membre polynôme-exponentielle (???)

Soit  $(a, b, \omega) \in \mathbb{K}^3$  et  $Q \in \mathbb{K}[X]$ . L'équation  $\mathcal{E} : y'' + ay' + by = P(t)e^{\omega t}$  admet sur  $\mathbb{R}$  une solution particulière de la forme  $t \mapsto Q(t)e^{\omega t}$  où  $Q \in \mathbb{K}[X]$ .

✕ Résoudre sur  $\mathbb{R}$  l'équation  $y'' + 4y' + 5y = e^{-2x} \sin x$ .

- ✓ L'équation caractéristique s'écrit  $z^2 + 4z + 5 = 0$  et admet pour racines  $-2 \pm i$ . Les solutions de  $\mathcal{E}_H$  sont donc les fonctions de la forme  $x \mapsto (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{-2x}$  où  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ .
- ✓ Passons sur  $\mathbb{C}$  et recherchons une solution de  $\mathcal{E}_C : y'' + 4y' + 5y = e^{(-2+i)x}$ . On sait qu'il en existe une solution particulière de la forme  $f : x \mapsto P(x)e^{\omega x}$  avec  $P \in \mathbb{C}[X]$  et  $\omega := -2 + i$ . On a, pour tout nombre réel  $x$ ,

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (P'(x) + \omega P(x))e^{\omega x}, f''(x) = (P''(x) + 2\omega P'(x) + \omega^2 P(x))e^{\omega x}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } \mathcal{E} &\iff \forall x \in \mathbb{R}, P''(x) + (2\omega + 4)P'(x) + (\omega^2 + 4\omega + 5)P(x) = 1 \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}, P''(x) + 2iP'(x) = 1 \end{aligned}$$

On en déduit que  $\deg P = 1$  (en comparant les degrés de chacun des membres). En posant  $P := ax + b$ , on trouve  $a = \frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$  et  $b$  quelconque<sup>2</sup>. La partie imaginaire de cette solution particulière est une solution de l'équation initiale et vaut  $x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^{-2x}}{2}$ .

- ✓ Les solutions de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme

$$x \mapsto -\frac{x \cos(x)e^{-2x}}{2} + (\lambda \cos x + \mu \sin x)e^{-2x} \text{ avec } (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

Le lecteur continuera avec le test (?? 10.8).

2. C'était prévisible car  $x \mapsto e^{(-2+i)t}$  est une solution (à valeurs complexes) de l'équation homogène.

## 5. Équations de récurrence linéaires d'ordre un

Considérons  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et l'équation de récurrence linéaire suivante

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - a_n u_n = 0$$

On trouve par une récurrence facile que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = u_0 \prod_{k=0}^{n-1} a_k$ .

Considérons à présent  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et l'équation

$$\mathcal{E} : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - a_n u_n = b_n$$

La technique du facteur intégrant peut être adaptée sous l'hypothèse  $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \neq 0$ . L'équation  $\mathcal{E}$  est alors équivalente à<sup>3</sup>

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{a_0 \cdots a_n} - \frac{a_n u_n}{a_0 \cdots a_n} = \frac{b_n}{a_0 \cdots a_n}$$

c'est-à-dire, en posant  $p_n := a_0 \cdots a_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{u_1}{p_0} - u_0 = \frac{b_0}{p_0} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_{n+1}}{p_n} - \frac{u_n}{p_{n-1}} = \frac{b_n}{p_n}$$

d'où, par télescopage :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{u_n}{p_{n-1}} = \frac{u_1}{p_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \left( \frac{u_{k+1}}{p_k} - \frac{u_k}{p_{k-1}} \right) = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b_k}{p_k}$$

✘ L'équation de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} + u_n = b_n$  se résout en multipliant par  $(-1)^{n+1}$ .

✘ L'équations de récurrence  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (n+1)u_n + v_n$  se résout en divisant par  $(n+1)!$ .

Dans le cas général, on peut adapter cette méthode entre deux indices  $n_0 < m_0$  où la suite  $a_n$  ne s'annule pas.

## 6. Équations de récurrence linéaires d'ordre deux à coefficients constants

Considérons  $(a, b) \in \mathbb{K}^2$  et  $\mathcal{E}_H : \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} + a u_{n+1} + c u_n = 0$ .

Considérons le  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et l'endomorphisme  $S$  défini par

$$S : E \rightarrow E, (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$$

D'après la remarque initiale,  $\mathcal{S}_H = \text{Ker}(S^2 - aS - \text{bid}_E) = \text{Ker } P(S)$  où  $P := X^2 - aX - b \in \mathbb{K}[X]$ .

✘ Supposons que  $\mathcal{E}_c$  admette deux racines  $\alpha$  et  $\beta$  distinctes dans  $\mathbb{K}$ . Comme  $P = (X - \alpha)(X - \beta)$ , on déduit du lemme des noyaux que

$$\mathcal{S}_H = \text{Ker } P(S) = \text{Ker}(S - \alpha \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(S - \beta \text{id}_E) = \text{Vect}\left(\left(\alpha^n\right)_{n \in \mathbb{N}}\right) \oplus \text{Vect}\left(\left(\beta^n\right)_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

car  $\text{Ker}(S - \mu \text{id}_E)$  est l'ensemble des solutions de  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \mu u_n = 0$  pour tout scalaire  $\mu$ .

3. On retrouve exactement le même résultat en adaptant la méthode de variation de la constante : rechercher  $u_n$  sous la forme  $\lambda_n p_{n-1}$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .

✘ Supposons que  $\mathcal{E}_c$  admette une racine double  $\alpha$  dans  $\mathbb{K}$ . On ne peut plus appliquer le lemme des noyaux. On remarque que

$$\begin{aligned} u := (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}((S - \alpha \text{id}_E)^2) &\iff S(u) - \alpha u \in \text{Ker}(S - \alpha \text{id}_E) \\ &\iff (u_{n+1} - \alpha u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \text{Ker}(S - \alpha \text{id}_E) \\ &\iff y' - \alpha y \in \text{Vect}\left((\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}\right) \\ &\iff \exists \mu \in \mathbb{K}, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \alpha u_n = \mu \alpha^n \end{aligned}$$

Si  $\alpha \neq 0$ , alors peut appliquer la méthode vue précédemment :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - \alpha u_n = \mu \alpha^n &\iff \forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{\alpha^{n+1}} - \frac{u_n}{\alpha^n} = \frac{\mu}{\alpha} \\ &\iff \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_0 \alpha^{n+1} + (n+1) \frac{\mu}{\alpha} \alpha^{n+1} \end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}\left((\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}, (n\alpha^n)_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

On vérifie facilement que ce résultat est encore valable si  $\alpha$  est nul.

✘ Étudions le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  et  $\mathcal{E}_c$  admet deux racines complexes conjuguées non réelles  $\rho e^{\pm i\phi}$  avec  $(\rho, \phi) \in \mathbb{R}^2$ . On peut démontrer facilement à partir des résultats précédents que

$$\mathcal{S}_H = \text{Vect}_{\mathbb{R}}\left((\rho^n \cos(n\phi))_{n \in \mathbb{N}}, (\rho^n \sin(n\phi))_{n \in \mathbb{N}}\right)$$

## 7. Au delà de l'ordre deux

Dans le cas où l'équation caractéristique s'écrit

$$P(x) = 0 \quad \text{où} \quad P(X) = \prod_{k=1}^m (X - \alpha_k)^{\mu_k} \quad \text{avec les } \alpha_k \text{ distincts}$$

on applique le lemme des noyaux en utilisant que



$$\text{Ker}(D - \lambda \text{id}_E)^{\mu} = \left\{ t \mapsto P(t)e^{\lambda t}, P \in \mathbb{K}_{\mu-1}[X] \right\} \quad \text{et} \quad \text{Ker}(S - \lambda \text{id}_E)^{\mu} = \left\{ (P(n)\lambda^n), P \in \mathbb{K}_{\mu-1}[X] \right\}$$

où E vaut respectivement  $\mathcal{C}^{\infty}(I, \mathbb{K})$  et  $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ .



## 8. Énoncés des tests

10.1.  



Quelles sont les solutions de  $y'' = y'$  ?

10.2.  

Montrer que toute solution de  $y' + a(t)y = 0$  est soit est nulle, soit ne s'annule jamais.

10.3.  



Résoudre  $y' + \frac{1}{x}y = 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et  $y' + e^x y = e^x$  sur  $\mathbb{R}$ .

10.4.  



Trouver des solutions polynomiales aux équations  $y' - y = t^2$  et  $y' + ty = t^2 + t + 1$ .

10.5.  

Résoudre le problème de Cauchy  $y' + y = t$ ,  $y(0) = 0$ .

10.6.  

Soit  $E : y' + y = \sin x$ . Trouver une solution particulière  $y_0$  de  $E$ . Résoudre  $E$ .

10.7.  

Résoudre sur  $\mathbb{R}$   $y'' - 4y = 0$ ,  $y'' + 4y = 0$ ,  $y'' - 3y' + 2y = 0$  et  $y'' - 2y' + 5y = 0$  sur  $\mathbb{R}$ .

10.8.  

Résoudre sur  $\mathbb{R}$  les équations  $y'' - y' = te^t$  et  $y'' + y' = te^t$ .

## 9. Solutions des tests

### 10.1.

$y$  est solution de  $y'' = y'$  si et seulement si  $y'$  est solution de  $z' = z$ , si et seulement si il existe  $k_1 \in \mathbb{R}$  telle que  $y' : t \mapsto k_1 e^t$ , si et seulement si il existe  $(k_1, k_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $y : t \mapsto k_1 e^t + k_2$ .

### 10.2.

Les solutions sont de la forme  $y = ke^{-A}$  où  $A$  est une primitive de  $a$ . Si  $y$  n'est pas la fonction nulle,  $k \neq 0$  et  $y$  ne s'annule pas.

### 10.3.

- a. Sur  $\mathbb{R}_+^*$ ,  $\int \frac{dx}{x} = \ln(x)$ . Les solutions de  $y' + y/x = 0$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto \frac{k}{x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Appliquons la méthode de la variation de la constante. On sait que les solutions de  $y' + y/x = 1$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  sont les fonctions de la forme  $y : x \mapsto k(x)/x$  avec  $k : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable vérifiant,  $\forall x > 0$ ,

$$\frac{k'(x)}{x} = 1$$

ie  $k'(x) = x$ . On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme

$$y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R} \\ x \longmapsto \frac{x^2/2 + k}{x}$$

- b. Sur  $\mathbb{R}$ ,  $\int e^x dx = e^x$ . Les solutions de  $y' + e^x y = 0$  sont donc les fonctions de la forme

$$x \mapsto ke^{-e^x}, \quad k \in \mathbb{R}$$

Appliquons la méthode de la variation de la constante. On sait que les solutions de  $y' + e^x y = e^x$  sur  $\mathbb{R}$  sont les fonctions de la forme  $y : x \mapsto k(x)e^{-e^x}$  avec  $k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable vérifiant,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$k'(x)e^{-e^x} = e^x$$

ie  $k'(x) = e^x e^{e^x}$ . On en déduit que les solutions sont les fonctions de la forme

$$y : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}, \quad k \in \mathbb{R} \\ x \longmapsto 1 + ke^{-e^x}$$

#### Commentaire

On pouvait aussi remarquer que 1 est une solution évidente.

### 10.4.

- a. Si  $y' - y = t^2$  admet une solution polynomiale  $P$ , celle-ci est nécessairement de degré deux :

$$\underbrace{P'(t) - P(t)}_{\text{de degré } \deg(P)} = \underbrace{t^2}_{\text{de degré deux}}$$

Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  et  $y_0 : t \mapsto at^2 + bt + c$ ;  $y_0$  est solution de l'équation si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad -at^2 + (2a - b)t + b - c = t^2$$

Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux, ainsi  $y_0$  est solution si et seulement si  $-a = 1$ ,  $2a - b = 0$  et  $b - c = 0$ , ie  $a = -1$ ,  $b = c = -2$ .

- b. Si  $y' + ty = t^2 + t + 1$  admet une solution polynomiale, celle-ci est nécessairement de degré un :

$$\underbrace{P'(t) + tP(t)}_{\text{de degré } \deg(P) + 1} = \underbrace{t^2 + t + 1}_{\text{de degré deux}}$$

Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  et  $y_0 : t \mapsto at + b$ ;  $y_0$  est solution de l'équation si et seulement si

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad at^2 + bt + a = t^2 + t + 1$$

Deux fonctions polynomiales sont égales si et seulement si leurs coefficients sont égaux, ainsi  $y_0$  est solution si et seulement si  $a = 1$  et  $b = 1$ .

10.5.  

Le second membre étant de la forme exponentielle-polynôme, on recherche une solution particulière de l'équation sous la forme  $P(t) = \alpha t + \beta$ . La fonction  $P$  est solution *si et seulement si*  $\forall t \in \mathbb{R}, \alpha t + \beta + \alpha = t$ , soit, après identification des coefficients,  $\alpha = 1$  et  $\alpha + \beta = 0$ . Ainsi  $t \mapsto P(t) = t - 1$  est solution. La solution générale de l'équation est donc  $t \mapsto t - 1 + \lambda e^{-t}$ . La condition initiale  $y(0) = 0$  est donc équivalente à  $\lambda = 1$ . La solution recherchée est donc  $t \mapsto t - 1 + e^{-t}$ .

10.6.  

Le second membre est du type polynôme-sinus, on passe sur  $\mathbb{C}$  et on recherche une solution particulière de l'équation  $y' + y = e^{ix}$  de la forme  $x \in \mathbb{R} \mapsto a e^{ix}$ . On aboutit à  $a = (1 - i)/2$ . Puisque, pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$\operatorname{Im} \left( \frac{1 - i}{2} e^{ix} \right) = \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x)$$

les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{2} \sin(x) - \frac{1}{2} \cos(x) + \lambda e^{-x}, \lambda \in \mathbb{R}$$

10.7.  

- a. On répond sans passer par l'équation caractéristique, les solutions de  $y'' - 4y = 0$  sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto a \cosh(2t) + b \sinh(2t), (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

ou encore de la forme

$$t \mapsto \alpha e^{2t} + \beta e^{-2t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- b. On répond sans passer par l'équation caractéristique, les solutions de  $y'' + 4y = 0$  sont les fonctions de la forme

$$t \mapsto a \cos(2t) + b \sin(2t), (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- c. L'équation caractéristique  $r^2 - 3r + 2 = 0$  admet 1 et 2 pour racines, les solutions de  $y'' - 3y' + 2y = 0$  sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \alpha e^t + \beta e^{2t}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

- d. L'équation caractéristique  $r^2 - 2r + 5 = 0$  admet  $1 \pm 2i$  pour racines, les solutions de  $y'' - 2y' + 5y = 0$  sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto (\alpha \cos(2t) + \beta \sin(2t)) e^t, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

10.8.  

- a. L'équation  $y'' - y' = t e^t$  admet une solution particulière de la forme  $y_0 : t \mapsto P(t) e^t$  avec  $P$  polynomiale;  $y_0$  est solution *si et seulement si*, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(P''(t) + 2P'(t) + P(t) - (P'(t) + P(t))) e^t = t e^t$$

ie  $\forall t \in \mathbb{R}, P''(t) + P'(t) = t$ ; ceci impose que  $P$  soit de degré deux : il existe  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = at^2 + bt + c$ . La fonction  $y_0$  est solution *si et seulement si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, 2at + (2a + b) = t$$

ie  $2a = 1$  et  $2a + b = 0$ , ie  $a = 1/2$  et  $b = -1$ . Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \left( \frac{t^2}{2} - t \right) e^t + a e^t + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

- b. L'équation  $y'' + y' = t e^t$  admet une solution particulière de la forme  $y_0 : t \mapsto P(t) e^t$  avec  $P$  polynomiale;  $y_0$  est solution *si et seulement si*, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$(P''(t) + 2P'(t) + P(t) + (P'(t) + P(t))) e^t = t e^t$$

ie  $\forall t \in \mathbb{R}, P''(t) + 3P'(t) + 2P(t) = t$ ; ceci impose que  $P$  soit de degré un : il existe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $\forall t \in \mathbb{R}, P(t) = at + b$ . La fonction  $y_0$  est solution *si et seulement si*

$$\forall t \in \mathbb{R}, 2at + (3a + 2b) = t$$

ie  $2a = 1$  et  $3a + 2b = 0$ , ie  $a = 1/2$  et  $b = -3/4$ . Les solutions de l'équation sont donc les fonctions de la forme

$$t \mapsto \left( \frac{t}{2} - \frac{3}{4} \right) e^t + a e^{-t} + b, (a, b) \in \mathbb{R}^2$$