AN 11 | Développements limités

La formule de Taylor-Young permet d'approcher localement une fonction f par des polynômes. Connaissant cette approximation, on pourra déterminer des propriétés locales de la fonction f (signe, dérivabilité, extremum, etc).

La conversion de Saint-Paul, Jacques Callot

11 Développements limités 1
1 Développements limités 2
1.1 Développement limité au voisinage de 0 3
1.2 Développement limité en un point quelconque 4
1.3 Formule de Taylor-Young et développements limités usuels 5
2 Opérations sur les développements limités 6
2.1 Somme et produit 6
2.2 Composée et quotient 9
2.3 Intégration d'un développement limité 11
3 Introduction aux développements asymptotiques 12
4 Applications des développements limités 13
4.1 Recherche d'un équivalent 13
4.2 Étude locale d'une fonction 14
4.3 Étude des branches infinies d'une fonction 15
4.4 Asymptotique d'une suite définie par une relation de récurrence d'ordre un 15
4.5 Asymptotique d'une suite définie implicitement 16
5 Énoncés des tests 18
6 Solutions des tests 19

L'invention du calcul différentiel (essentiellement par I. Newton et G.W. Leibniz) remonte aux dernières decennies du XVII [e] siècle. Les mathématiciens et physiciens élaborèrent dès lors de nouveaux et puissants outils d'Analyse afin d'aborder de nombreuses questions ouvertes héritées du passé. Citons par exemple la résolution du problème de Kepler, les problèmes d'approximations (dont on se doute qu'ils furent essentiels à une époque où tous les calculs s'effectuaient à la main ...) ou encore la modélisation des phénomènes vibratoires.

Brook Taylor

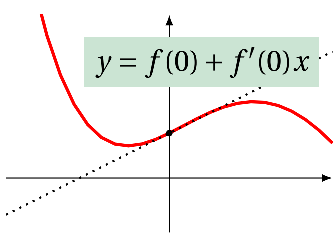
C'est dans ce contexte que **Brook Taylor** publia en 1715 son ouvrage *Methodus incrementorum directa et inversa*. Le savant anglais, déjà connu pour ses travaux sur le calcul des différences finies (dans le sillage d'Isaac Newton) ou encore l'invention de l'intégration par parties, y exposa pour la première fois la célèbre formule éponyme. Il s'interressa également à certaines séries (dites aujourd'hui de Taylor ; c'est Lhuilier qui employa pour la première fois cette terminologie en 1786).

On peut dire qu'historiquement, la notion de dérivée est née de l'idée d'approcher par une droite le graphe d'une fonction au voisinage de l'un de ses points.

La formule de Taylor *généralise* ce principe en recherchant (dans un certain sens) des polynômes approchant « au mieux » une fonction au voisinage d'un point. La connaissance de ce polynôme permet de décrire (dans une certaine mesure !) l'aspect local du graphe de la fonction (présente-t-il un maximum ou un minimum local, un point d'inflexion, etc).

1. Développements limités

L'existence d'une tangente en 0 au graphe d'une fonction f signifie que f est dérivable en 0.



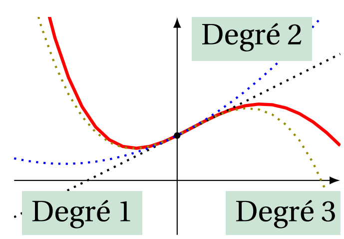
La dérivabilité de f en 0 équivaut à l'existence d'un développement de $f(u)$ pour u au voisinage de 0 de la forme :

$$f(x) \underset{u\to 0}{=} f(0) + f'(0)u + o(u)$$

appelé *formule de Taylor-Young* à l'ordre un en 0.

La tangente correspond donc à une approximation par un polynôme P de degré au plus un de $f(u)$ quand u tend vers 0, avec une erreur qui est un $o(u)$.

On se doute qu'on peut *améliorer cette approximation* en augmentant le degré du polynôme P. C'est le point de départ de la théorie des développements limités que nous allons à présant exposer.



L'intérêt de savoir développer au-delà du degré est manifeste dans certains calculs d'équivalent. Par exemple, si on recherche un équivalent de $\sin(u) - u$ au voisinage de 0, le développement de Taylor-Young à l'ordre un $\sin(u) = u + o(u)$ aboutit à $\sin(u) - u = o(u)$. Cela ne donne pas l'ordre de grandeur *exact* de $\sin(u) - u$ (on a $u^2 = o(u)$ mais aussi $u^3 = o(u)$, etc) et nous sommes bloqué. Nous verrons en fait plus loin que

$$\sin(u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right) \quad , \quad \text{et donc que } \sin(u) - u = -\frac{u^3}{6} + o\left(u^3\right) \underset{u\to 0}{\sim} -\frac{u^3}{6}$$

Ce cas est typique de la recherche d'un équivalent de $f(u) - g(u)$ avec $f(u) \sim g(u)$: les ordres de grandeurs de $f(u)$ et $g(u)$ *se neutralisent* et il faut pousser plus loin les calculs pour trouver un équivalent de la différence. Les développments limités permettront de résoudre les problèmes posés par le calcul d'un équivalent d'une somme.

1.1. Développement limité au voisinage de 0

Définition 11.0. Développement limité en 0

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ où I est un vrai intervalle et 0 est adhérent à I. On dit que f admet un développement limité d'ordre $n \in \mathbb{N}$ en 0 s'il existe un polynôme P_n de degré au plus n tel que

$$f(u) \underset{u\to 0}{=} \mathrm{P}_n(u) + o\left(u^n\right)$$

Le polynôme P_n est alors unique et appelé partie principale d'ordre n de f au voisinage de 0.

Donner le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f (c'est ainsi que l'on note en abrégé[1] « *le développement limité d'ordre n en* 0 *de f* »), c'est calculer P_n.

- L'existence d'un $\mathrm{DL}_0(0)$ équivaut l'existence d'une limite réelle en 0. Si f est définie en zéro, alors ceci équivaut à la continuité de f en 0. Si f n'est pas définie en ce point, alors ceci équivaut à la possibilité de la prolonger par continuité en 0.

- Moyennant un éventuel prolongement par continuité en 0, l'existence d'un $\mathrm{DL}_1(0)$ équivaut à la dérivabilité de f en 0.
  - Supposons l'existence de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(x) = a + bx + o(x)$ en 0. On a alors $f(x) \xrightarrow[x\to 0]{} a$. Quitte à prolonger f par continuité en 0, on peut supposer que $a = f(0)$. On a alors

    $$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{bx + o(x)}{x} = b + o(1) \xrightarrow[x\to 0]{} b$$

    par opération sur les « petits o ». Ainsi f est dérivable en 0 avec $f'(0) = b$.

  - Supposons f dérivable en 0. En notant $b := f'(0)$, on a donc $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} - b = o(1)$, d'où $f(x) - f(0) - bx, = o(1)$ par opérations sur les « petits o ». Ainsi

    $$f(x) = f(0) + bx + o(1) \quad \text{au voisinage de } 0$$

- Considérons la fonction $g : x \mapsto \sin\left(\sqrt{x}\right)$. Comme $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on a $g(x) = o(1)$ donc g admet un $\mathrm{DL}_0(0)$. La fonction f n'admet pas de $\mathrm{DL}_1(0)$ car n'est pas dérivable en 0 :

  $$\forall x > 0, \ \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = \frac{\sin\left(\sqrt{x}\right)}{x} \sim \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \quad \text{ainsi} \quad \frac{g(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0+]{} +\infty$$

Lorsque l'on écrit un développement limité, on ordonne ses termes par ordre de prédominance décroissante.

1. Une fois n'est pas coutume, cette abréviation est autorisée.

Les grands devant, les petits derrière !

⇛ Quand on écrit un DL, on range les termes par ordre de prédominance décroissante :

$$f(u) \underset{u\to 0}{=} \underbrace{p_0 + p_1 u + \cdots + p_n u^n + o\left(u^n\right)}_{\longrightarrow \text{ prédominance décroissante } \longrightarrow}$$

⇛ Rappel : $\cdots \underset{u\to 0}{\ll} u^4 \underset{u\to 0}{\ll} u^3 \underset{u\to 0}{\ll} u^2 \underset{u\to 0}{\ll} u \underset{u\to 0}{\ll} 1$

⇛ Ainsi, on n'écrira pas $f(u) \underset{u\to 0}{=} u^2 + u + 1 + o\left(u^2\right)$ mais $f(u) \underset{u\to 0}{=} 1 + u + u^2 + o\left(u^2\right)$.

La raison en est pratique : cette présentation est adaptée aux calculs que nous allons entreprendre sur les DL (somme, produit, etc.).

Proposition 11.0. Troncature d'un DL

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors f admet un $\mathrm{DL}_k(0)$ tout tout $k \leqslant n$ obtenu par troncature de P_n à l'ordre k, ie en ne retenant dans P_n que les monômes de degré inférieur ou égal à k.

Par exemple, si $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + \underbrace{2x^2 + x^3 + o\left(x^3\right)}_{=o(x)}$, alors $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + x + o(x)$.

Proposition 11.1. DL d'une fonction paire ou impaire

Si f est paire (resp. impaire) et admet un $\mathrm{DL}_n(0)$ alors sa partie principale est paire (resp. impaire).

1.2. Développement limité en un point quelconque

La notion générale de DL s'obtient au moyen d'une translation.

Définition 11.2. DL en un point quelconque x_0

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ où I est un vrai intervalle et $x_0 \in \mathbb{R}$ adhérent à I. On dit que f admet un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ si $\widetilde{f} : u \to f(x_0 + u)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0)$. En notant P_n la partie principale du $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\widetilde{f}$, le $\mathrm{DL}_n(x_0)$ s'écrit

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} \mathrm{P}_n(x - x_0) + o\left((x - x_0)^n\right) \quad \text{ou encore} \quad f(x_0 + u) \underset{u\to 0}{=} \mathrm{P}_n(u) + o\left(u^n\right)$$

Un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ d'une fonction f s'écrit donc $f(x) \underset{x\to x_0}{=} p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n + o\left((x - x_0)^n\right)$.

Par exemple, nous démontrerons que $\cos(x) \underset{x\to \pi/3}{=} \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) - \dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2 + o\left(\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right)^2\right)$.

Conserver la variable qui tend vers 0

Il ne faut surtout pas développer les puissances de $x-x_0$ dans un $\mathrm{DL}_n(x_0)$. Il deviendrait alors inutilisable pour rechercher un équivalent, pour enchaîner des opérations sur les DL (somme, produit, etc.). C'est pour cette raison qu'il est préférable d'écrire un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ sous la forme :

$$f(x_0+u) \underset{u\to 0}{=} p_0 + p_1 u + \cdots + p_n u^n + o\left(u^n\right)$$

On conseille vivement de ne manipuler que des variables au voisinage de 0 en posant $x = x_0 + u$.

1.3. Formule de Taylor-Young et développements limités usuels

Les développements limités usuels (i.e. des fonctions usuelles) sont obtenus par la formule de Taylor. Nous commençons par établir le lemme d'intégration d'un petit « o ».

Lemme 11.3. Intégration d'un petit ô

Soit $g \in \mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ où I est un vrai intervalle contenant 0 et $n \in \mathbb{N}$ tels que $g(u) = o(u^n)$.
On a alors $\displaystyle\int_0^u g(t)\mathrm{d}t \underset{u\to 0}{=} o\left(u^{n+1}\right)$.

Ce résultat va nous pemettre une démonstration par récurrence de la formule de Taylor. Nous verrons plus loin qu'il est aussi un outil efficace pour obtenir des DL.

Proposition 11.4. Formule de Taylor-Young

Pour $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I},\mathbb{R})$ et x_0 dans I vrai intervalle, on a $\displaystyle f(x_0+u) \underset{u\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} u^k + o\left(u^n\right)$.

- Le $\mathrm{DL}_2\left(\frac{\pi}{3}\right)$ de la fonction cosinus est donné par :

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}+u\right) \underset{u\to 0}{=} \cos\frac{\pi}{3} + u\cos'\frac{\pi}{3} + \frac{u^2}{2}\cos''\frac{\pi}{3} + o\left(u^2\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}u - \frac{u^2}{4} + o\left(u^2\right)$$

- Nous avons démontré que l'existence d'un DL à l'ordre un en 0 équivaut à la possibilité de la prolonger en 0 en une fonction dérivable. Ceci ne se généralise pas aux ordres supérieurs à un : une fonction admettant un $\mathrm{DL}_2(0)$ n'implique pas que f soit deux fois dérivable en ce point. Considérons par exemple la fonction définie par

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,,\ f(x) := \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

  Comme $f(x) = o\left(x^2\right)$, f admet un $\mathrm{DL}_2(0)$. Du $\mathrm{DL}_1(0)$ obtenu par troncature, $f(x) = o(x)$, on déduit que f est dérivable en 0 avec $f'(0) = 0$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{R}^*\ ,\ f'(x) = -x\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

ainsi, pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = -\sin\left(\frac{1}{x}\right) + 3x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $3x\sin\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $x \mapsto -\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ n'admet pas de limite en 0 (cf. le chapitre AN 3), f' n'est pas dérivable en 0.

✘ Le lecteur s'entraînera au moyen du test (↯ **11.1**).

On en déduit la liste suivante à connaître sur le bout des ongles.

Formulaire des DL usuels en 0

a. $e^x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o\left(x^n\right)$;

b. $\sin x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o\left(x^{2n+1}\right)$;

c. $\cos x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o\left(x^{2n}\right)$;

d. $\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + o\left(x^{n+1}\right)$;

e. $\frac{1}{1+x}, \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k + o\left(x^n\right)$;

f. $\arctan x \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} + o\left(x^{2n+1}\right)$;

g. $\tan x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$;

h. $\tanh x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{3} + o\left(x^3\right)$;

i) $\arcsin x \underset{x\to 0}{=} x + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$;

j) $(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$.

✘ Déterminer la limite de visibilité depuis un point d'altitude h au-dessus du niveau de la mer. Application à la tour Eiffel : $h = 324$ m et $\mathrm{R} = 6371$ km (rayon de la terre).

✘ Le lecteur est renvoyé au test (↯ **11.2**).

2. Opérations sur les développements limités

Dans de nombreux cas, recourir à la formule de Taylor-Young afin d'obtenir un développement limité est maladroit (le calcul des dérivées successives peut s'avérer très lourd et chronophage). C'est pour cette raison que nous allons développer dans ce paragraphe des opérations spécifiques aux DL.

2.1. Somme et produit

En guise d'introduction, déterminons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\cos x - e^x$.

Comme la somme d'une expression en $o\left(x^3\right)$ et d'une autre en $o\left(x^3\right)$ en est une troisième en $o\left(x^3\right)$, il suffit de développer les deux fonctions à l'ordre 3 :

$$\cos x \underset{u\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{2} + o\left(x^3\right) \quad \text{et} \quad e^x \underset{u\to 0}{=} 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$$

d'où $\cos x - e^x \underset{u\to 0}{=} -x - x^2 - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)$

DL d'une somme

Pour calculer le DL de $f+g$, on développe les deux fonctions à l'ordre n :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0+\cdots+a_n x^n+o\left(x^n\right) \quad \text{et} \quad g(x) \underset{x\to 0}{=} b_0+\cdots+b_n x^n+o\left(x^n\right)$$

On obtient le $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f+g$ en additionnant les deux parties principales puis en ajoutant $o\left(x^n\right)$, car la somme de deux expressions négligeables devant x^n est aussi négligeable devant x^n.

✗ Étudions le cas de $x \longmapsto (\cos x)e^x$. En posant $\mathrm{P} := 1-\dfrac{\mathrm{X}^2}{2}$ et $\mathrm{Q} := 1+\mathrm{X}+\dfrac{\mathrm{X}^2}{2}$, on a

$$(\cos x)e^x \underset{x\to 0}{=} \left(\mathrm{P}(x)+o\left(x^2\right)\right)\left(\mathrm{Q}(x)+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)+\mathrm{P}(x)\times o\left(x^2\right)+\mathrm{Q}(x)\times o\left(x^2\right)+o\left(x^4\right)$$

le terme en $o\left(x^4\right)$ provenant du produit des deux $o\left(x^2\right)$. Comme $\mathrm{P}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(1)$ et $\mathrm{Q}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(1)$, les expressions $\mathrm{P}(x)\times o\left(x^2\right)$ et $\mathrm{Q}(x)\times o\left(x^2\right)$ sont toutes les deux en $o\left(x^2\right)$, d'où

$$(\cos x)e^x \underset{x\to 0}{=} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1+x\underbrace{-\frac{x^3}{2}+\frac{x^4}{4}}_{o\left(x^2\right)}+o\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1+x+o\left(x^2\right)$$

Cela se généralise :

DL d'un produit

Si $f(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n}_{\mathrm{P}(x)}+o\left(x^n\right)$ et $g(x) \underset{x\to 0}{=} \underbrace{b_0+b_1x+\cdots+b_nx^n}_{\mathrm{Q}(x)}+o\left(x^n\right)$, alors

$$f(x)g(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)+o\left(x^n\right) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{R}(x)+o\left(x^n\right) \qquad \text{car } \mathrm{P}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(1) \text{ et } \mathrm{Q}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(1)$$

où R est la troncature de PQ à l'ordre n.

Dans le cas où $\mathrm{P}(0)$ et $\mathrm{Q}(0)$ sont non nuls, le fait de partir de deux DL à l'ordre n est optimal. Si ce n'est pas le cas, on peut développer un peu moins.

✗ Intéressons-nous au produit $x \longmapsto (\sin x)e^x$. Déterminons-en un $\mathrm{DL}_3(0)$. Au brouillon, on prépare les calculs ainsi :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} \underbrace{x+\cdots+\lambda x^{?}}_{\mathrm{P}(x)}+o\left(x^{?}\right) \quad \text{et} \quad e^x \underset{x\to 0}{=} \underbrace{1+x+\cdots+\mu x^{?}}_{\mathrm{Q}(x)}+o\left(x^{?}\right)$$

En effectuant le produit, on obtient :

$$\begin{aligned} e^x\sin x &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)+\mathrm{P}(x)\times o\left(x^{?}\right)+\mathrm{Q}(x)\times o\left(x^{?}\right)+o\left(x^{?+?}\right) \\ &\underset{x\to 0}{=} \mathrm{P}(x)\mathrm{Q}(x)+o\left(x^{?+1}\right)+o\left(x^{?}\right)+o\left(x^{?+?}\right) \qquad \text{car } \mathrm{P}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(x) \text{ et } \mathrm{Q}(x) \underset{x\to 0}{=} \mathrm{O}(1) \end{aligned}$$

Le choix optimal consiste donc en $? = 3$ et $?+1 = 3$, i.e. les $\mathrm{DL}_2(0)$ et $\mathrm{DL}_3(0)$ de exp et sin :

$$(\sin x)e^x \underset{x\to 0}{=} \left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x+x^2-\frac{x^3}{6}+\frac{x^3}{2}+o\left(x^3\right) \underset{x\to 0}{=} x+x^2+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

- Le lecteur poursuivra avec le test (⚡ **11.3**).

- Déterminons le $\text{DL}_5(0)$ de la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{x^2 \sin x}{1+x}\cdot$ On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(x+\cdots+x^{?}+o\left(x^{?}\right)\right)\left(1-x+x^{?}+o\left(x^{?}\right)\right)$$

Pour obtenir le DL_5 demandé, il suffit donc de choisir $? = 3$ et $? = 2$:

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x^2\left(x-\frac{x^3}{6}+o\left(x^3\right)\right)\left(1-x+x^2+o\left(x^2\right)\right) \underset{x\to 0}{=} x^3-x-\frac{7}{6}x^5+o\left(x^5\right)$$

- En pratique, les calculs menant au choix de ? et ? sont à laisser au brouillon.
- Nous recommandons ici le test (⚡ **11.4**).

Calcul d'un DL de $u(x)$, $u(x)^2$, etc.

Il est conseiller de factoriser le $\text{DL}_m(0)$ de $u(x)$ par son premier terme (n'oubliez pas : les grands devant, les petits derrière!) afin de faciliter le calcul des $\text{DL}_m(0)$ des puissances suivantes. Lorsque ce terme n'est pas constant, les DL successifs seront de plus en plus facile à obtenir (ils compterons au moins un terme en moins à chaque itération).

- Calculons les $\text{DL}_5(0)$ de $(\sin x)^\ell$ pour $\ell \in [\![1,3]\!]$. On a $\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+o\left(x^5\right)$ et

$$\begin{aligned}
(\sin x)^2 &\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right)^2 && \text{Grâce au « } x^2 \text{ », il suffit de développer le facteur suivant}\\
&\underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^3\right)\right)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2\left(1-\frac{x^2}{3}+o\left(x^3\right)\right) && \text{à l'ordre trois, d'où la troncature}\\
(\sin x)^3 &\underset{x\to 0}{=} x^3\left(1-\frac{x^2}{6}+\frac{x^4}{120}+o\left(x^4\right)\right)^3 && \text{Idem : par le « } x^3 \text{ », on se limite à l'ordre deux}\\
&\underset{x\to 0}{=} x^3\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^3 \underset{x\to 0}{=} x^3\left(1-\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)\right)
\end{aligned}$$

- Pour calculer le DL précédent de $\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^3$, on a utilisé le $\text{DL}_1(0)$ de $(1+y)^3$ qui n'est autre que troncature de la formule de Newton $(1+y)^3 = 1+3y+o(y)$. Comme $-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right) \sim -\frac{x^2}{6}$, ceci fournit bien par composition à droite que :

$$\left(1-\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)\right)^3 \underset{x\to 0}{=} 1-3\times\frac{x^2}{6}+o\left(x^2\right)$$

En pratique, ces petits calculs se font le plus souvent de tête.

- Pour $(\sin x)^4$, on peut varier d'argument : on sait que $x \mapsto (\sin x)^4$ admet un $\text{DL}_5(0)$ (par la formule de Taylor-Young car elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$). On a $\sin x \sim x$ d'où $(\sin x)^4 \sim x^4$ d'où, par parité de $x \mapsto (\sin x)^4$, on a $(\sin x)^4 = x^4+o\left(x^5\right)$. Comme $(\sin x)^5 \sim x^5$, on a directement $(\sin x)^5 = x^5+o\left(x^5\right)$.

2.2. Composée et quotient

Commençons à nouveau par le calcul du $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\cos\big(\sin x\big)$. Notons $f := \cos$ et $u := \sin$. On a

$$f(y) \underset{y\to 0}{=} 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{24} + o\big(y^4\big)$$

Comme $u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, on peut composer à droite dans le terme en $o\big(y^4\big)$:

$$f\big(u(x)\big) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^4}{24} + o\big(u(x)^4\big)$$

Puisque $u(x) \sim x$, on a $u(x)^4 \sim x^4$ et donc le terme en $o\big(u(x)^4\big)$ est aussi un $o\big(x^4\big)$. On a donc

$$f\big(u(x)\big) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{u(x)^2}{2} + \frac{u(x)^4}{24} + o\big(x^4\big)$$

Il suffit donc de développer $u(x)^2$ et $u(x)^4$ à l'ordre quatre pour obtenir le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f\circ u$ par somme de $\mathrm{DL}_4(0)$. On a

$$u(x)^2 = (\sin x)^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\big(x^2\big)\right)^2 = x^2\left(1 - \frac{x^2}{3} + o\big(x^2\big)\right) \quad \text{et} \quad u(x)^4 = x^4 + o\big(x^4\big)$$

d'où $f\big(u(x)\big) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2 - \frac{x^4}{3}}{2} + \dfrac{x^4}{24} + o\big(x^4\big) \underset{x\to 0}{=} 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{5x^4}{24} + o\big(x^4\big)$. Plus généralement, on retiendra :

DL d'une composée

Calcul du $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f\circ u$ avec $u(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et $f(y) \underset{y\to 0}{=} a_0 + a_1 y + a_2 y^2 + \cdots$ (ordre à déterminer).

- ⇛ Au moyen d'un équivalent de $u(x)$ en 0, on détermine le plus petit entier k tel que $u(x)^k = o\left(x^n\right)$.
- ⇛ On obtient alors par composition à droite dans le petit « $o\big(y^k\big)$ » que :

$$\begin{aligned} f\big(u(x)\big) &\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 u(x) + \cdots + a_{k-1}\big(u(x)\big)^{k-1} + a_k\big(u(x)\big)^k + o\big(u(x)^k\big) \\ &\underset{x\to 0}{=} \underbrace{a_0 + a_1 u(x) + \cdots + a_{k-1}\big(u(x)\big)^{k-1}}_{\text{seuls termes contribuant au } \mathrm{DL}_n(0) \text{ de } f(u(x))} + o\big(x^n\big) \end{aligned}$$

- ⇛ Il suffit alors de développer $u(x)$ à l'ordre n, ainsi que les $u(x)^i$ pour $0 < i < k$, et de sommer ces $\mathrm{DL}_n(0)$ pour obtenir celui de $f\big(u(x)\big)$.

✗ Calculons le $\mathrm{DL}_4(0)$ de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}\cdot$ On va utiliser les deux DL suivants :

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots \quad \text{et} \quad \frac{1}{1+u} \underset{u\to 0}{=} 1 - u + u^2 - u^3 + u^4 + \cdots$$

Comme $\sin x \sim x$, il faut développer selon u jusqu'à l'ordre 4 (pour $\ell \geqslant 5$, $(\sin x)^\ell = o\big(x^4\big)$). Il faut ensuite développer $\sin x$, $(\sin x)^2$, $(\sin x)^3$ et $(\sin x)^4$ à l'ordre quatre. On a

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o\big(x^4\big)\ ,\ (\sin x)^2 \underset{x\to 0}{=} x^2\Big(1-\frac{x^2}{6}+o\big(x^2\big)\Big)^2 = x^2\Big(1-\frac{x^2}{3}+o\big(x^2\big)\Big)$$

puis $(\sin x)^3 = x^3+o\big(x^4\big)$ et $(\sin x)^4 = x^4+o\big(x^4\big)$. D'où

$$\frac{1}{1+\sin x} \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{x^3}{6}+x^2-\frac{x^2}{3}-x^3+x^4+o\big(x^4\big) \underset{x\to 0}{=} 1-x+\frac{2}{3}x^2-\frac{5}{6}x^3+x^4+o\big(x^4\big)$$

✗ Le lecteur est renvoyé au test (↯ **11.5**).

Il faut développer au voisinage des bons points !

Les calculs précédents se généralisent à des DL en des points autres que 0.
Pour un $\mathrm{DL}_n(x_0)$ de $f\circ u$ (sous réserve d'existence), il faut développer u en x_0 et f en L, qui est le limite de f en ℓ, où est la limite de u en x_0.

✗ Passons au $\mathrm{DL}_4(0)$ de $g : x \longmapsto \exp(\cos x)$. Attention, comme $\cos x \xrightarrow[x\to 0]{} 1$, il faudra utiliser un DL du cosinus en 0 et un DL de l'exponentielle en 1. On a

$$\cos x \underset{x\to 0}{=} 1\underbrace{-\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big)}_{u(x)} \quad \text{et} \quad e^{1+y} = e\times e^y \underset{y\to 0}{=} e\big(1+y+o(y)\big)$$

Comme $u(x)\sim -\frac{x^2}{2}$, on a $o\big(u(x)^2\big) = o\big(x^4\big)$. On se limite donc à un développement de l'exponentielle à l'ordre deux. Par composition à droite :

$$e^{\cos x} \underset{x\to 0}{=} e\times e^{u(x)} \underset{x\to 0}{=} e\Big(1+u(x)+\frac{u(x)^2}{2}+o\big(u(x)^2\big)\Big) \underset{x\to 0}{=} e\Big(1+u(x)+\frac{u(x)^2}{2}+o\big(x^4\big)\Big)$$

On doit ensuite développer $u(x)$ et son carré à l'ordre quatre :

$$u(x) = -\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o\big(x^4\big) \ \text{ et } \ u(x)^2 = \frac{x^4}{4}+o\big(x^4\big)$$

d'où $e^{\cos x} \underset{x\to 0}{=} e-\dfrac{ex^2}{2}+\dfrac{ex^4}{6}+o\big(x^4\big)$.

✗ Le lecteur est renvoyé au test (↯ **11.6**).

Le développement d'un inverse peut être vu comme un cas particulier de composition.

✗ Déterminons le $\mathrm{DL}_3(0)$ de $x \longmapsto \dfrac{1}{1+\ln(1+x)}\cdot$ En posant $u : x \longmapsto \ln(1+x)$, on a

$$u(x) \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^2}{2}+o\big(x^2\big) \ \text{ il faut donc développer l'inverse au voisinage de 1 : } \frac{1}{1+y} \underset{y\to 0}{=} 1-y+o(y)$$

Comme $u(x)\sim x$, on a $o\big(u(x)^3\big) = o\big(x^3\big)$. On doit donc développer l'inverse à l'ordre trois. Par composition à droite :

$$\frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1-u(x)+u(x)^2-u(x)^3+o\big(u(x)^3\big) \underset{x\to 0}{=} 1-u(x)+u(x)^2-u(x)^3+o\big(x^3\big)$$

Il reste à développer $u(x)$, $u(x)^2$ et $u(x)^3$ à l'ordre trois :

$$u(x) \underset{x\to0}{=} x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o\big(x^3\big),\ u(x)^2 \underset{x\to0}{=} x^2\left(1-\frac{x}{2}+o(x)\right)^2 = x^2\big(1-x+o(x)\big) \text{ et } u(x)^3 \underset{x\to0}{=} x^3+o\big(x^3\big)$$

Ainsi $\displaystyle\frac{1}{1+\ln(1+x)} \underset{x\to0}{=} 1-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+x^2-x^3-x^3+o\big(x^3\big) \underset{x\to0}{=} 1-x+\frac{3x^2}{2}-\frac{7x^3}{3}+o\big(x^3\big)$.

On retiendra donc :

DL d'un inverse

Si $f(x) \underset{x\to0}{=} a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+o(x^n)$ avec $a_0\neq0$, on développe son inverse en remarquant que :

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{a_0}\times\frac{1}{1+\dfrac{a_1}{a_0}x+\cdots+\dfrac{a_n}{a_0}x^n+o\big(x^n\big)} \quad \text{et on effectue une composée avec } y\mapsto(1+y)^{-1} \text{ en } 0$$

en posant $u(x) := \dfrac{a_1}{a_0}x+\cdots+\dfrac{a_n}{a_0}x^n+o\big(x^n\big)$.

Le lecteur finira sa lecture par le test (↯ **11.7**).

2.3. Intégration d'un développement limité

Le lemme d'intégration d'un petit « o » admet un corollaire souvent utile :

Proposition 11.5. Intégration d'un DL

Pour $f\in\mathscr{C}^0(\mathrm{I},\mathbb{R})$ (avec I vrai intervalle contenant 0), admettant un $\mathrm{DL}_n(0)$ $f(u) \underset{u\to0}{=} \mathrm{P}_n(u)+o(u^n)$, on a $\displaystyle\int_0^u f(t)\mathrm{d}t \underset{u\to0}{=} \int_0^u \mathrm{P}_n(t)\mathrm{d}t+o\big(u^{n+1}\big)$.

✗ On déduit de ce résultat un développement de $\tan u$ en 0 à l'ordre 5. Comme tan est continue en 0 et $\tan 0=0$, on a

$$\tan'(x) = 1+(\tan x)^2 \underset{x\to0}{=} 1+o(1) \text{ d'où } \tan x-\tan 0 = x+o(x) \text{ donc } \tan'(x) \underset{x\to0}{=} 1+x^2+o\big(x^2\big)$$

$$\text{d'où } \tan x \underset{x\to0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o\big(x^3\big)$$

par deux applications sucessives du théorème d'intégration d'un DL. Cette technique permet de calculer efficacement les DL de la tangente en 0, plus rapidement que toute autre méthode.

DL de tan et tanh

On peut exploiter les formules de dérivation $\tan' = 1+\tan^2$ et $\tanh' = 1-\tanh^2$ pour calculer de proche en proche des DL de tan et tanh en 0 par intégration.

Ce résultat est intéressant quand f' est plus facile à obtenir que celui de f.

DL obtenus à partir de celui de $(1+x)^\alpha$

On peut obtenir de nombreux développements à partir de la formule-mère

$$(1+x)^\alpha \underset{x\to 0}{=} 1+\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o\left(x^n\right)$$

en appliquant le théorème d'intégration des DL.

- Par exemple, arcsin est dérivable sur $]-1,1[$ et, sur cet intervalle :

$$\arcsin' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}} \underset{x\to 0}{=} 1+\frac{x^2}{2}+o\left(x^2\right)$$

  par composition à droite dans le DL $(1+y)^{-\frac{1}{2}} \underset{y\to 0}{=} 1-\dfrac{y}{2}+o(y)$. On déduit donc du théorème d'intégration d'un DL que

$$\arcsin x - \arcsin 0 \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o\left(x^3\right)$$

- Soit $n\in\mathbb{N}$. Puisque

$$\arctan' x = \frac{1}{1+x^2} = \left(1+x^2\right)^{-1} \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+o\left(x^{2n}\right)$$

  on déduit du théorème d'intégration d'un DL que $\arctan x \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}+o\left(x^{2n+1}\right)$.

3. Introduction aux développements asymptotiques

Les développements limités utilisent l'échelle de comparaison des puissances de x au voisinage de 0 :

$$\cdots \underset{x\to 0}{\ll} x^3 \underset{x\to 0}{\ll} x^2 \underset{x\to 0}{\ll} x \underset{x\to 0}{\ll} 1$$

Par exemple, $e^x \underset{x\to 0}{=} 1+x+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+o(x^n)$. On en déduit $\exp\left(\dfrac{1}{x}\right) \underset{x\to +\infty}{=} 1+\dfrac{1}{x}+\cdots+\dfrac{1}{n!x^n}+o\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$.

On obtient alors un développement selon l'échelle : $\cdots \underset{x\to +\infty}{\ll} \dfrac{1}{x^3} \underset{x\to +\infty}{\ll} \dfrac{1}{x^2} \underset{x\to +\infty}{\ll} \dfrac{1}{x} \underset{x\to +\infty}{\ll} 1$

On a généralise la notion de développement à une échelle quelconque $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ en x_0 :

$$\cdots \underset{x\to x_0}{\ll} u_{-2}(x) \underset{x\to x_0}{\ll} u_{-1}(x) \underset{x\to x_0}{\ll} u_0(x) \underset{x\to x_0}{\ll} u_1(x) \underset{x\to x_0}{\ll} u_2(x) \underset{x\to x_0}{\ll} \cdots$$

On dit que $f(x)$ admet un développement asymptotique (DAS en abrégé) en x_0 dans l'échelle $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ s'il existe $n_0\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{N}$ et des réels $a_{n_0},\ldots,a_{n_0-n}$ tels que

$$f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_{n_0}u_{n_0}(x)+a_{n_0-1}u_{n_0-1}(x)+\cdots+a_{n_0-n}u_{n_0-n}(x)+o\left(u_{n_0-n}(x)\right)$$

Les relations de comparaison de l'échelle $(u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ garantissent l'unicité des a_i. Ce n'est plus un développement limité, on parle dans ce cas de développement asymptotique. La notion d'ordre n'a plus de sens, on utilise celle de *précision*.

✗ Déterminons un DAS de $u_n := \left(\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\sqrt{n}}$ à la précision $o\left(\frac{1}{\sqrt{n}n}\right)$. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \exp\left(\sqrt{n}\ln\cos\frac{1}{n}\right) = \exp\left(\sqrt{n}\ln\left(1-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) = \exp\left(\sqrt{n}\left(-\frac{1}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right)\right) = 1-\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}+o\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\right) \end{aligned}$$

4. Applications des développements limités

Dans cette section, nous regroupons une collection d'exemples où le calcul asymptotique est utile.

4.1. Recherche d'un équivalent

Le résultat fondamental est que le premier terme non nul d'un DL est un équivalent de l'expression développée.

DL et équivalents

Si $f(x) \underset{x\to x_0}{=} a_p(x-x_0)^p+\cdots+a_n(x-x_0)^n+o\big((x-x_0)^n\big)$ avec $a_p\neq 0$, alors $f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} a_p(x-x_0)^p$.

✗ Les développements limités vont nous aider à déterminer un équivalent d'une expression dans les cas où aucun théorème de s'applique : ceux des sommes et des composées. Rappelons d'abord qu'on ne peut ni additionner membre à membre des équivalents, ni leur appliquer une fonction :

$$\left\{\begin{array}{l} f(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x) \\ u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x) \end{array}\right. \not\Longrightarrow f(x)+u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} g(x)+v(x) \quad\text{et}\quad u(x) \underset{x\to x_0}{\sim} v(x) \not\Longrightarrow f\big(u(x)\big) \underset{x\to x_0}{\sim} f\big(v(x)\big)$$

En revanche, il est possible comme nous l'avons démontré, d'additionner et de composer des DL.

- ✔ Déterminons un équivalent de $x\mapsto \sin x-\tan x$ en 0. On a

$$\sin x \underset{x\to 0}{=} x-\frac{x^3}{6}+o(x^3) \quad\text{et}\quad \tan x \underset{x\to 0}{=} x+\frac{x^3}{3}+o(x^3)\,,\ \text{d'où}\ \sin x-\tan x \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{2}+o(x^3)$$

et donc $\sin x-\tan x \underset{x\to 0}{\sim} -\frac{x^3}{2}$.

- ✔ Continuons par un exemple plus subtil : un équivalent de $u_n := \sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}-2\sqrt{n}$ en $+\infty$. Il faut ici transformer l'expression afin de faire apparaître des DL usuels. On remarque que

$$\begin{aligned} u_n &= n^{\frac{1}{2}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}+\left(1-\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{2}}-2\right) \quad \text{On va exploiter } (1+y)^{\frac{1}{2}} \underset{y\to 0}{=} 1+\frac{y}{2}-\frac{y^2}{8}+o(y^2) \\ &\underset{n\to+\infty}{=} n^{\frac{1}{2}}\left(1+1-2+\frac{1}{2n}-\frac{1}{2n}-\frac{1}{8n^2}-\frac{1}{8n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} n^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{1}{4n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} -\frac{1}{4n^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

Nous avons utilisé un DL à l'ordre deux car les termes d'ordre zéro et un se simplifient : un $\mathrm{DL}_1(0)$ n'aurait pas suffit à obtenir un équivalent.

4.2. Étude locale d'une fonction

L'existence d'un prolongement par continuité en un point, sa dérivabilité et la position de son graphe par rapport à la tangente peuvent être obtenus par un DL.

Tangentes

Supposons f non définie en 0 et $f(x) \underset{u\to 0}{=} a + bx + o(x)$.

⇛ La fonction f est prolongeable par continuité en 0 par $f(0) := a$, dérivable en 0 et $f'(0) = b$.

⇛ Un développement à un ordre supérieur permet éventuellement de positionner le graphe de f par rapport à sa tangente en 0.

✘ Étude au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{x}\cdot$ On a

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x - \frac{x^3}{6} + o\left(x^3\right)} - \frac{1}{x} \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(\left(1 - \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)^{-1} - 1\right) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{x}\left(-1 + 1 + \frac{x^2}{6} + o\left(x^2\right)\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} \frac{x}{6} + o(x)$$

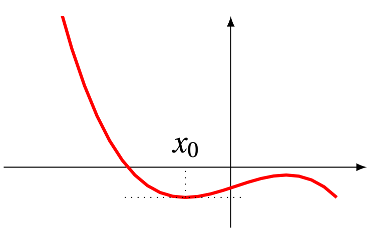
On en déduit que f est prolongeable par continuité en 0 en posant $f(0) := 0$ et que son prolongement est dérivable en ce point avec $f'(0) = \frac{1}{6}\cdot$ En développant un peu plus (jusqu'au premier non nul suivant l'ordre un), on pourrait même déterminer la position de la courbe par rapport à sa tangente.

Un cas particulier important est celui des points critiques, ie des points x_0 tels que $f'(x_0) = 0$. On sait que si x_0 est intérieur à I, $f'(x_0) = 0$ est une condition *nécessaire mais non suffisante* d'extremum local en x_0. Si la fonction est de classe $\mathscr{C}^2$, on peut compléter ce résultat par une condition suffisante portant sur la dérivée seconde :

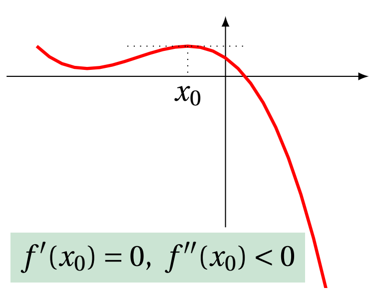
Condition suffisante de minimum

Soit $f \in \mathscr{C}^2(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ et $x_0 \in \mathrm{I}$. Si $f'(x_0) = 0$ et $f''(x_0) > 0$, alors f admet un minimum local en x_0.

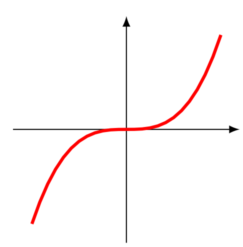
Si $f''(x_0) = 0$, on ne peut pas conclure (cf. les deux dernières figures de droite ci-dessous).



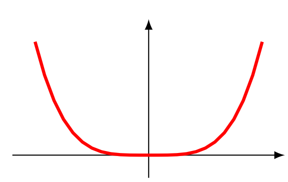
$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) > 0$



$f'(x_0) = 0,\ f''(x_0) < 0$



$$f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} \underbrace{\frac{f''(0)}{2}(x - x_0)^2}_{>0} \qquad f(x) - f(x_0) \underset{x\to x_0}{\sim} \underbrace{\frac{f''(0)}{2}(x - x_0)^2}_{<0}$$



Le lecteur abordera avec profit le test (↯ **11.8**).

4.3. Étude des branches infinies d'une fonction

Nous allons à présent appliquer le calcul asymptotique à l'étude des branches infinies d'une fonction. On dit qu'une fonction f, définie sur un voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) présente une branche infinie en $+\infty$ (resp. $-\infty$) si $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \pm\infty$ (resp. limite en $-\infty$). Le cas d'une asymptote est le plus important.

Asymptotes

La droite $\mathscr{D} : y = ax+b$ est asymptote à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ *si et seulement si* $f(x) \underset{x\to+\infty}{=} ax+b+o(1)$.
La connaissance d'un terme supplémentaire dans ce développement permet éventuellement de positionner la courbe par rapport à son asymptote au voisinage de $+\infty$.

- Étudions en $+\infty$ la fonction $f : x \mapsto x\arctan x$. On a, pour $x>0$:

$$f(x) = x\arctan x = x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan\frac{1}{x}\right) \quad \text{Cette formule nous permet d'utiliser les DL(0) de arctan}$$
$$\underset{x\to+\infty}{=} x\left(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + o\left(\frac{1}{x^3}\right)\right) \underset{x\to+\infty}{=} \frac{\pi}{2}x - 1 + \frac{1}{3x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

Ainsi la droite d'équation $\mathscr{D} : y = \frac{\pi}{2}x - 1$ est asymptote au graphe de f en $+\infty$. Comme

$$f(x) - \frac{\pi}{2}x + 1 \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{3x^2}$$

on en déduit que le graphe de f est situé au-dessus de son asymptote au voisinage de $+\infty$.

- Le lecteur est renvoyé au test (↯ **11.9**).

4.4. Asymptotique d'une suite définie par une relation de récurrence d'ordre un

- Considérons la suite définie par $u_0 := 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} := u_n + \dfrac{1}{u_n}\cdot$ Posons $\mathrm{I} := [1, +\infty[$.
  - Comme I est stable par $f : x \mapsto x + \frac{1}{x}$, la suite est bien définie et à valeurs dans I. On en déduit que, pour tout n dans $\mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n > 0$. Ainsi la suite est croissante. On déduit du théorème de la limite monotone qu'elle admet une limite dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Puisque f est continue et n'admet aucun point fixe sur I, la suite ne peut converger. Ainsi $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
  - Grâce à cette information, nous pouvons utiliser le calcul asymptotique. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :
  $$u_{n+1}^{\alpha} = u_n^{\alpha}\left(1+u_n^{-2}\right)^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} u_n^{\alpha}\left(1+\alpha u_n^{-2} + o\left(u_n^{-2}\right)\right) \underset{n\to+\infty}{=} u_n^{\alpha} + \alpha u_n^{\alpha-2} + o\left(u_n^{\alpha-2}\right)$$
  En choisissant $\alpha := 2$, on obtient donc $u_{n+1}^2 - u_n^2 \underset{n\to+\infty}{=} 2 + o(1)$ d'où $u_{n+1}^2 - u_n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$.
  - On déduit du théorème de Césaro que
  $$\frac{u_n^2}{n} - \frac{u_0^2}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(u_{k+1}^2 - u_k^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$
  Ainsi, par opérations sur les limites, $\frac{u_n^2}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$. Comme 2 est non nul, on a $u_n^2 \sim 2n$ puis $u_n \sim \sqrt{2n}$ par positivité de u_n.

Cette technique peut être utilisée plus généralement dans le cas d'une suite vérifiant une récurrence de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ où f admet un DL de la forme :

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} x + \lambda x^p + o\big(x^p\big) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}^* \text{ et } p > 1$$

Équivalent d'une suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$

- ⇛ En cas de convergence vers 0 ou divergence vers $\pm\infty$: on utilise les DL usuels pour rechercher $\alpha \neq 0$ tel que $u_{n+1}^{\alpha} - u_n^{\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \neq 0$.
- ⇛ En cas d'existence, $u_n^{\alpha} - u_0^{\alpha} = \sum_{k=0}^{n-1} \big(u_{k+1}^{\alpha} - u_k^{\alpha}\big) \sim \ell n$. On en déduit un équivalent de u_n.

✗ Passons à la suite définie apr $u_0 := \dfrac{\pi}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} := \sin u_n$.

- ✔ Une étude classique permet de conclure que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par valeurs positives.
- ✔ Comme précédemment, effectuons un calcul pour un réel α quelconque que l'on calibrera a posteriori :

$$\begin{aligned} u_{n+1}^{\alpha} &\underset{n\to+\infty}{=} (\sin u_n)^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} \left(u_n - \frac{u_n^3}{6} + o\big(u_n^3\big)\right)^{\alpha} \underset{n\to+\infty}{=} u_n\alpha\left(1 - \frac{u_n^2}{6} + o\big(u_n^2\big)\right)^{\alpha} \\ &\underset{n\to+\infty}{=} u_n^{\alpha}\left(1 - \frac{\alpha u_n^2}{6} + o\big(u_n^2\big)\right) \underset{n\to+\infty}{=} u_n^{\alpha} - \frac{\alpha u_n^{2+\alpha}}{6} + o\big(u_n^{2+\alpha}\big) \end{aligned}$$

  En choisissant $\alpha := -2$, on obtient donc $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \underset{n\to+\infty}{=} \dfrac{1}{3} + o(1)$ d'où $u_{n+1}^{-2} - u_n^{-2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$.

- ✔ On déduit du théorème de Césaro que

$$\frac{u_n^{-2}}{n} - \frac{u_0^{-2}}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\big(u_{k+1}^{-2} - u_k^{-2}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$$

  Ainsi, par opérations sur les limites, $\frac{u_n^{-2}}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{3}$. Comme $\frac{1}{3}$ est non nul, on a $u_n^{-2} \sim \frac{n}{3}$ puis $u_n \sim \sqrt{\frac{3}{n}}$ par positivité de u_n.

4.5. Asymptotique d'une suite définie implicitement

Le calcul asymptotique permet également d'obtenir des renseignements qualitatifs sur une suite définie par une famille d'équations. Dans ce cadre, une méthode souffrant fructueuse est d'obtenir les uns après les autres les termes d'un DAS de la suite u_n.

Développement asymptotique de u_n défini implicitement par $f_n(u_n) = 0$

- ⇛ En encadrant u_n (cf. les variations de f_n), on trouve la limite voire un équivalent de u_n.
- ⇛ On réinjecte l'information obtenue (limite ou équivalent) dans la relation $f_n(u_n) = 0$ afin de trouver un terme supplémentaire dans le DAS de u_n.

✗ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\exists ! u_n \in [0,1]$ tel que $u_n^5 + nu_n - 1 = 0$. Déterminer un DAS à deux termes de u_n.

- ✔ L'étude de $f_n : x \mapsto x^5 + nx - 1$ sur $[0,1]$ est facile : cette fonction est strictement croissante et continue sur $[0,1]$. Comme $f_n(0) = -1 > 0$ et $f_n(1) = n \geqslant 0$, f_n s'annule en un unique point de ce segment par le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires.

- ✔ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $nu_n - 1 = -u_n^5 \leqslant 0$ d'où $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par le théorème d'encadrement. On en conclut que $u_n = o(1)$.

- ✔ On a $nu_n - 1 = -u_n^5 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ d'où $nu_n \sim 1$, i.e. $u_n \sim \dfrac{1}{n}\cdot$ On obtient donc $u_n = \dfrac{1}{n} + o\big(\dfrac{1}{n}\big)$.

- ✔ Écrivons $u_n = \frac{1}{n} + v_n$ avec $v_n = o\big(\frac{1}{n}\big)$. L'équation vérifiée par u_n se transforme en une équation pour v_n :

$$nv_n = -\left(\frac{1}{n} + v_n\right)^5 \sim -\frac{1}{n^5}$$

Ainsi $v_n \sim -\frac{1}{n^6}\cdot$ en résumé, $u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n^6} + o\big(\dfrac{1}{n^6}\big)$.

- ✔ Écrivons $v_n = -\frac{1}{n^6} + w_n$ avec $v_n = o\big(\frac{1}{n^6}\big)$. L'équation vérifiée par v_n se transforme en une équation pour w_n :

$$-\frac{1}{n^5} + nw_n = -\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + w_n\right)^5 \quad \text{d'où} \quad 1 - n^5 w_n = \left(1 - \frac{1}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)\right)^5 = 1 - \frac{5}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$$

et donc $-n^5 w_n = -\frac{5}{n^5} + o\left(\frac{1}{n^5}\right)$ et donc $-n^5 w_n \sim -\frac{5}{n^5}$ d'où $w_n \sim \frac{5}{n^{10}}$. Ainsi

$$u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^6} + \frac{5}{n^{10}} + o\left(\frac{1}{n^{10}}\right)$$

5. Énoncés des tests

11.1.

Justifier l'existence puis donner le $\mathrm{DL}_4(\pi/6)$ de sin.

11.2.

Expliciter les $\mathrm{DL}_n(0)$ de $f : x \mapsto \sqrt{1+x}$ et $g : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ au moyen de factorielles.

11.3.

On a, au voisinage de 0, $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$ et $g(x) = x^3 + x^4 + o(x^4)$. Que dire de $f(x) \times g(x)$?

11.4.

On a $f(x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x^6)$ au voisinage de 0. Que dire de $f(x)^2$, $f(x)^3$, $f(x)^4$, $f(x)^5$, $f(x)^6$ et $f(x)^7$?

11.5.

Déterminer un $\mathrm{DL}_3(0)$ de la fonction $x \mapsto f(2x) - f(x)$ où f est définie par $f : x \mapsto \sin\left(x - x^2\right)$.

11.6.

Calculer le développement limité à l'ordre 7 au voisinage de 0 de $f : x \mapsto \ln(\cos(x))$.

11.7.

Déterminer le $\mathrm{DL}_4(0)$ de la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+\cos(x)}$.

11.8.

Étudier $f : x \mapsto \tan(x)^{-1} - \ln(1+x)^{-1}$ au voisinage de 0 : prolongement par continuité, dérivabilité de celui-ci, position de la courbe par rapport à sa tangente.

11.9.

Soit $f : x \mapsto (1+x)e^{1/x}$.Étudier les branches infinies de f et déterminer la position des asymptotes par rapport à la courbe.

6. Solutions des tests

11.1.

Le sinus est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ donc, d'après la formule de Taylor-Young, admet des DL en $\pi/6$ à tout ordre. Par application de la susdite formule :

$$\begin{aligned}\sin(x) \underset{x\to\pi/6}{=} & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\left(x-\frac{\pi}{6}\right) \\ & -\frac{1}{4}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^2-\frac{1}{4\sqrt{3}}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^3 \\ & +\frac{1}{48}\left(x-\frac{\pi}{6}\right)^4+o\left(\left(x-\frac{\pi}{3}\right)^4\right)\end{aligned}$$

11.2.

⇛ On applique le j) du formulaire pour $\alpha=1/2$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} &= \frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\frac{1-2\ell}{2} \\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{2^k k!}\prod_{\ell=1}^{k-1}(2\ell-1)\end{aligned}$$

or

$$\prod_{\ell=1}^{k-1}(2\ell-1)=\frac{(2k-2)!}{2\times\cdots\times(2(k-1))}=\frac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!}$$

ainsi

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}=\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}$$

Ainsi

$$f(x)\underset{x\to 0}{=}1+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(2k-2)!}{2^{2k-1}k!(k-1)!}x^k+o\left(x^n\right)$$

⇛ On applique le j) du formulaire pour $\alpha=-1/2$. Pour $k\in\mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!} &= \frac{1}{k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}\frac{-1-2\ell}{2} \\ &= \frac{(-1)^{k}}{2^k k!}\prod_{\ell=0}^{k-1}(2\ell+1)\end{aligned}$$

or

$$\prod_{\ell=0}^{k-1}(2\ell+1)=\frac{(2k)!}{2\times\cdots\times(2k)}=\frac{(2k)!}{2^k k!}$$

ainsi

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}=\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!^2}$$

Ainsi

$$g(x)\underset{x\to 0}{=}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k(2k)!}{2^{2k}k!^2}x^k+o\left(x^n\right)$$

11.3.

D'après les règles usuelles,

$$f(x)g(x)=x^4+2x^5+o(x^5)$$

11.4.

On a successivement d'après les règles de calcul usuelles,

$$\begin{cases} f(x)^2=x^2+o(x^7),\ f(x)^3=x^3+o(x^8) \\ f(x)^4=x^4+o(x^9),\ f(x)^5=x^5+o(x^{10}) \\ f(x)^6=x^6+o(x^{11}),\ f(x)^7=x^7+o(x^{12}) \end{cases}$$

11.5.

On développe $f(x)$ à l'ordre 3 en 0. Posons u : $x\mapsto x-x^2$. Comme $u(x)\sim x$, il faut développer $\sin(u)$ en 0 à l'ordre 3 :

$$\sin(u)\underset{u\to 0}{=}u-\frac{u^3}{6}+o(u^3)$$

On a

$$-\frac{u(x)^3}{6}=-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

Ainsi

$$f(x)\underset{0}{=}x-x^2-\frac{x^3}{6}+o(x^3)$$

puis

$$f(2x)\underset{0}{=}2x-4x^2-\frac{4x^3}{3}+o(x^3)$$

ainsi,

$$g(x)\underset{0}{=}x-3x^2-\frac{7}{6}x^3+o(x^3)$$

11.6.

On a

$$f(x) = \ln(1+u(x)) \text{ avec } u : x \mapsto \cos(x) - 1$$

Comme $u(x) \sim -x^2/2$, il suffit de développer $\ln(1+u)$ à l'ordre 3 :

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{=} u - \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{3} + o(u^4)$$

Le premier terme de ce développement impose de calculer u avec la précision $o(x^7)$:

$$u = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + o(x^7)$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} u(x)^2 &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \frac{x^8}{320} + o(x^9) \\ &= \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + o(x^7) \\ u(x)^3 &= -\frac{x^6}{8} + \frac{x^8}{32} - \frac{7x^{10}}{1920} + o(x^{11}) \\ &= -\frac{x^6}{8} + o(x^7) \end{aligned}$$

Ainsi

$$\ln(\cos(x)) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} - \frac{x^6}{45} + o(x^7)$$

11.7.

Comme

$$f(x) = \frac{1/2}{1+u(x)}, \text{ avec } u(x) = \frac{\cos(x)-1}{2} \sim -\frac{x^2}{4}$$

il suffit de développer $(1+u)^{-1}$ en 0 à l'ordre 2 :

$$\frac{1}{1+u} \underset{0}{=} 1 - u + u^2 + o(u^2)$$

Ainsi, il faut développer $u(x)$à l'ordre 4 :

$$\cos(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 + o(x^4)$$

ainsi

$$\begin{cases} u(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4) \\ u(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{16}x^4 + o(x^4) \end{cases}$$

D'où

$$f(x) \underset{x\to 0}{=} \frac{1}{2} + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{48}x^4 + o(x^4)$$

11.8.

Il faut au moins un $\mathrm{DL}_2(0)$ de $f(x)$.

⇛ Comme

$$\frac{1}{\tan(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+u(x)}, \text{ avec } u(x) = \frac{\tan(x)-x}{x}$$

il faut un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(1+u(x))^{-1}$. Comme $u(x) \sim x^2/3$,il faut développer $(1+u)^{-1}$ à l'ordre 1 :

$$\frac{1}{1+u} = 1 - u + o(u)$$

Ainsi, il faut développer $u(x)$ à l'ordre 3 :

$$u(x) \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x^2}{3} + o(x^4)$$

Ainsi

$$\frac{1}{1+u(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 - \frac{x^2}{3} + o(x^3)$$

Comme

$$\frac{1}{\ln(x)} = \frac{1}{x}\frac{1}{1+v(x)}, \text{ avec } u(x) = \frac{\ln(1+x)-x}{x}$$

il faut un $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(1+v(x))^{-1}$. Comme $v(x) \sim -x/2$,il faut développer $(1+v)^{-1}$ à l'ordre 3 :

$$\frac{1}{1+v} = 1 - v + v^2 - v^3 + o(v^3)$$

Comme $(1+v)^{-1} = 1 - v + o(u)$, il faut développer $v(x)$ à l'ordre 3 :

$$v(x) \underset{x\to 0}{=} -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + o(x^3)$$

Ainsi

$$\begin{cases} v(x)^2 \underset{x\to 0}{=} \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{3} + o(x^3) \\ v(x)^3 \underset{x\to 0}{=} -\frac{x^3}{8} + o(x^3) \end{cases}$$

d'où

$$\frac{1}{1+v(x)} \underset{x\to 0}{=} 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{12} + \frac{x^3}{24} + o(x^3)$$

D'où,

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(-\frac{x^2}{3}-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right) \\ &\underset{0}{=} \frac{1}{x}\left(-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^3}{24}+o(x^3)\right) \\ &\underset{0}{=} -\frac{1}{2}-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{24}+o(x^2) \end{aligned}$$

La fonction f admet un $\mathrm{DL}_1(0)$, elle est donc prolongeable par continuité en 0 par $f(0) = -1/2$ puis dérivable en 0 avec $f'(0) = -1/4$. Puisque

$$f(x)+\frac{1}{2}+\frac{x}{4} \underset{x\to 0}{=} \underbrace{-\frac{x^2}{2}}_{<0}$$

le graphe de f est en-dessous de sa tangente au voisinage de 0.

11.9.

On a au voisinage de $\pm\infty$,

$$e^{\frac{1}{x}} = 1+\frac{1}{x}+\frac{1}{2x^2}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$$

ainsi

$$f(x) = x+2+\frac{3}{2x}+\mathrm{o}\left(\frac{1}{x}\right)$$

La courbe admet donc la droite d'équation $y = x+2$ pour asymptote en $\pm\infty$, la courbe étant située au-dessus de l'asymptote au voisinage de $+\infty$, et inversement au voisinage de $-\infty$.