



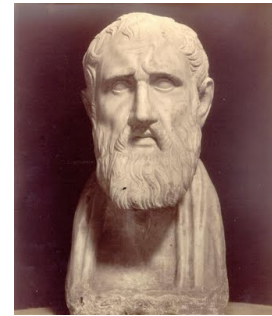
Où le lecteur découvrira quel sens donner à la somme d'une infinité de termes. Les séries sont au fondement de la branche des Mathématiques appelée « Analyse ». La manipulation peu scrupuleuse de séries divergentes fut à l'origine du programme de fondement de l'Analyse lancé par quelques mathématiciens du XIX^e siècle et qui ne fut véritablement achevé qu'à l'époque de Weierstrass. L'Analyse est alors devenue aussi rigoureuse que ses aînées, l'Algèbre et la Géométrie.



12	Séries numériques	1
1	Introduction à la théorie des séries numériques	5
1.1	Nature d'une série numérique	6
1.2	Séries géométriques	8
1.3	Comparaison série-intégrale	9
2	Séries à termes positifs	10
2.1	Séries de Riemann	10
2.2	Comparaison des séries à termes positifs	10
2.3	La règle de D'Alembert	12
2.4	La règle « $n^\alpha u_n$ »	12
3	Séries à valeurs réelles ou complexes	14
3.1	Séries alternées	14
3.2	Absolute et semi convergence	15
4	Calcul de la somme d'une série numérique convergente	17
5	Applications des séries numériques	18
5.1	Séries et suites numériques	18
5.2	Développements décimaux	19
6	Récapitulatif sur l'étude des séries	21
7	Énoncés des tests	22
8	Solutions aux tests	23

LA manipulation des sommes infinies est étroitement liée à l'idée de limite. Durant de nombreux siècles, l'absence de fondement rigoureux à la notion de limite engendra d'incessantes interrogations et spéculations parmi les savants, à l'exemple des paradoxes de Zénon :

Un archer se tient à un mètre d'un arbre, sur le point de lancer une flèche avec son arc. Il lance sa flèche dans la direction de l'arbre à la vitesse de 1 ms^{-1} . Avant que celle-ci puisse atteindre l'arbre, elle doit traverser la première moitié d'un mètre. Il faut un certain temps $t_1 = 1/2$ seconde, à cette flèche pour se déplacer sur cette distance. Ensuite, il lui reste encore $1/2$ mètre à parcourir, dont elle accomplit d'abord la moitié, $1/4$ de mètre, ce qui lui prend temps $t_2 = 1/4$ seconde, et ainsi de suite ad infinitum avec, à la k -ème étape, un temps valant $t_k = 1/2^k$ seconde. Zénon en conclut que la flèche ne pourra frapper l'arbre qu'au bout d'un temps infini, $t_1 + t_2 + t_3 + \dots$ c'est-à-dire jamais.



Zénon d'Elée

L'expérience nous enseigne bien-sûr que la flèche atteindra l'arbre au bout de 1 seconde. *Levons ce paradoxe* : pour tout entier n non nul, on a

$$t_1 + t_2 + \dots + t_n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} \cdot \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$$

d'après la formule de la série géométrique. On retrouve donc la durée d'une 1 seconde en faisant tendre n vers $+\infty$ dans $t_1 + t_2 + \dots + t_n$. Cette somme, bien qu'étant *infinie*, est de valeur *finie*, ce qui lève le paradoxe. L'erreur de Zénon était de penser qu'une somme infinie de nombres réels strictement positifs ne pouvait être qu'égal à $+\infty$. Plus généralement, pour donner un sens à des *sommes infinies* $u_0 + u_1 + \dots$, nous poserons :

$$u_0 + u_1 + \dots = \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_0 + u_1 + \dots + u_n)$$

En Angleterre, *Richard Suiseth* calcule au XIV-ème siècle la somme de la série de terme général $n/2^n$ et *Nicole Oresme* établit que la série harmonique (terme général $1/n$) est divergente; c'est la première fois qu'un savant se pose la question de ce qu'on appelle aujourd'hui la *convergence* d'une série.



Nicole Oresme

La preuve d'Oresme (vers 1350)

$$\begin{aligned} H &= 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}}_{\geq 4 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{2}} \\ &\quad + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}}_{\geq 8 \times \frac{1}{16} = \frac{1}{2}} \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

les sommes partielles de la série sont croissantes mais ne sont pas majorées d'où $H = +\infty$.

Mais les sommes infinies n'ont fait leur *vraie* apparition en tant qu'*objet mathématique* qu'au XVII^e siècle. A cette époque, une nouvelle branche des Mathématiques commence à se former.

James Gregory redécouvre plusieurs de ces résultats, notamment le développement des fonctions trigonométriques en séries de Taylor et la série de Gregory permettant le calcul de π .

En 1715, *Brook Taylor*, en donnant la construction générale des séries qui portent son nom, établit un lien fructueux avec le calcul différentiel. Au XVIII^e-ième siècle également, *Leonhard Euler* établit de nombreuses relations remarquables portant sur des séries et introduit les séries hypergéométriques.

Les savants sont confrontés à des modélisations (en Mécanique céleste par exemple) faisant intervenir une infinité d'opérations algébriques élémentaires.

C'est l'origine de l'Analyse que l'on pourrait qualifier¹ de « science des opérations infinies » par opposition à l'algèbre qui serait la « science des opérations finies ». Nous illustrerons ce glissement du fini vers l'infini par l'usage que firent de la formule du binôme deux des plus éminents savants de cette époque, **Isaac Newton** et **Léonard Euler**.



Brook Taylor

Le développement du binôme de $(1+x)^k$ pour x réel et k entier naturel était alors bien connu depuis sa démonstration par **Pascal** en 1654. Les formules

$$(1+x)^2 = 1 + \frac{2}{1}x + \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 2}x^2$$

$$(1+x)^3 = 1 + \frac{3}{1}x + \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3$$

$$(1+x)^4 = 1 + \frac{4}{1}x + \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}x^4$$

se généralisent en

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x)^k = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k \cdot (k-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Cette somme est en fait finie et calculée en appliquant la règle de distributivité de la multiplication sur l'addition dans l'expression $(1+x)^k$. **Newton** essaya de trouver une formule généralisant le développement de $(1+x)^r$ à des exposants rationnels r . Inspiré par les travaux de **Wallis** parmi lesquels le célèbre développement de $\frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \frac{8 \cdot 8}{7 \cdot 9} \dots$$

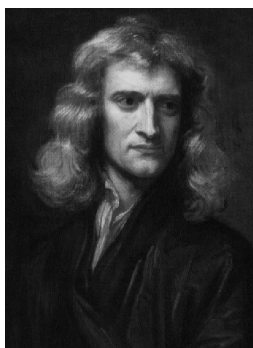
le savant anglais proposa le développement suivant :

$$\forall -1 < x < 1, \quad (1+x)^r = 1 + \frac{r}{1}x + \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

dit *développement du binôme de Newton*². Si $r \notin \mathbb{N}$, cette somme n'est pas finie. L'Analyse était encore balbutiante et **Newton** se contenta d'énoncer cette formule en l'accompagnant d'une justification que l'on peut résumer de la manière suivante :

0. Cette terminologie est bien-sûr trop caricaturale pour être considérée comme une description définitive de ces deux domaines...

2. La formule dite *du binôme de Newton* est donc due à Pascal... Sa généralisation, le *développement du binôme*, fut énoncée par Isaac Newton mais il fallut attendre le XIX^e siècle et Abel pour une preuve rigoureuse.



Issac Newton

En interpolant les polynômes

$$(1+x)^0, (1+x)^1, (1+x)^2, \dots$$

donnés par le théorème de Pascal :

$$(1+x)^k = 1 + \frac{k}{1}x + \frac{k \cdot (k-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{k \cdot (k-1) \cdot (k-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

pour une infinité d'exposants $k = 0, 1, 2, \dots$, on obtient la formule suivante :

$$(1+x)^r = 1 + \frac{r}{1}x + \frac{r \cdot (r-1)}{1 \cdot 2}x^2 + \frac{r \cdot (r-1) \cdot (r-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^3 + \dots$$

Le lecteur contemporain est frappé par le peu de rigueur de cette argumentation du grand **Newton**. Le savant se contente de remarquer que la formule coïncide avec celle énoncée par **Pascal** dans le cas où $r = k \in \mathbb{N}$: les coefficients $r \cdot (r-1) \cdots (r-n+1)$ sont alors nuls à partir du rang $n = k+1$ et on retrouve le développement pascalien de $(1+x)^k$. Certes, la formule fût également prouvée pour $k = -1$ (cf. la série géométrique de raison $-x$) et dans d'autres cas particuliers avant **Newton**, mais on ne peut parler de *démonstration* au sens moderne. Cela aurait d'ailleurs été impossible à l'époque, les passages du fini à l'infini n'ayant jamais été clairement définis. Ce fut le lot de l'Analyse de rester pendant longtemps moins rigoureuse que son aînée l'Algèbre.

Quelques années plus tard, **Leonard Euler** appliqua la formule du binôme pour calculer des produit du type $(1 + \frac{1}{n})^n$ où n est un « grand » entier naturel³ :

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \frac{1}{n^2} + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \frac{1}{n^3} + \dots \\ &= 1 + 1 + \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n})}{1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots \end{aligned}$$

Les arguments d'**Euler** peuvent être ainsi résumés :

Comme on a l'approximation $1 - \frac{k}{n} \approx 1$ pour n infiniment grand, en faisant tendre n vers $+\infty$ dans l'expression :

$$1 + 1 + \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n})}{1 \cdot 2} + \frac{1 \cdot (1 - \frac{1}{n}) \cdot (1 - \frac{2}{n})}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots$$

on obtient la somme infinie suivante

$$1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$

Ceci définit un nouveau nombre, appelé *nombre d'Euler*⁴ :

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \dots$$



Léonard Euler

Bien que plus explicite que **Newton**, **Euler** n'apporte aucune justification rigoureuse à son procédé. Son raisonnement est dangereux et, disons-le, faux au regard des canons actuels.

3. Le type de question à cette époque...

4. Il s'agit de la première apparition du nombre $e \approx 2,71$, base de l'exponentielle.

Nous prouverons que les règles de calcul usuelles de l'algèbre des sommes finies (associativité, commutativité et distributivité) ne sont plus valables *en général* pour les sommes infinies⁵, ce qui nous oblige à la plus grande des rigueurs dans la manipulation des sommes infinies.

1. Introduction à la théorie des séries numériques

La théorie des séries est un nouveau regard sur celle des suites : on va s'intéresser à une suite $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en la considérant comme une accréation de termes :

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0) \\ \sigma_2 &= \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_1) \\ \sigma_3 &= \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) \\ \sigma_4 &= \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) + (\sigma_4 - \sigma_3) \\ \sigma_5 &= \sigma_0 + (\sigma_1 - \sigma_0) + (\sigma_2 - \sigma_1) + (\sigma_3 - \sigma_2) + (\sigma_4 - \sigma_3) + (\sigma_5 - \sigma_4)\end{aligned}$$

Définition 12.0. Série numérique

On appelle série numérique la donnée de $((u_n)_{n \geq 0}, (S_n)_{n \geq 0}) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \times \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

- ⇒ On convient de noter $\sum_{n \geq 0} u_n$ cette série. On dit que u_n est le terme général de la série.
- ⇒ La somme S_n est appelée somme partielle d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. On dit aussi que $(S_n)_{n \geq 0}$ est la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

En reprenant les notations précédentes, on a $u_0 = S_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$S_n - S_{n-1} = u_n$$

Les sommes partielles ne sont donc pas des suites particulières. Toute suite peut-être vue comme une somme partielle :

$$\begin{aligned}\phi : \mathbb{K}^{\mathbb{N}} &\longrightarrow \mathbb{K}^{\mathbb{N}} && \text{est clairement un isomorphisme} \\ (u_n)_{n \geq 0} &\longmapsto (u_0 + \dots + u_n)_{n \geq 0}\end{aligned}$$

de réciproque $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $u_0 := \sigma_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n := \sigma_n - \sigma_{n-1}$.

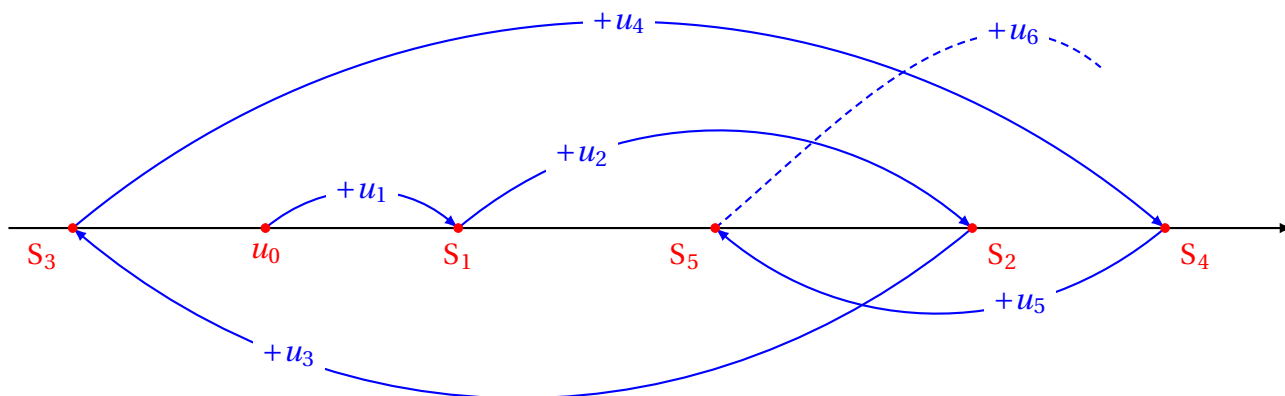
Suites Vs. séries

Entre les deux théories, seule l'approche est différente :

- ⇒ L'objet du cours sur les suites est de déterminer des conditions *suffisantes* sur $(u_n)_{n \geq 0}$ pour que la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ soit convergente (théorème des suites monotones, etc.)
- ⇒ L'objet de la théorie des séries est de déterminer des conditions *suffisantes* (idéalement *nécessaires et suffisantes*) sur la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ pour que la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ soit convergente.

On peut se représenter une série numérique comme *une série de sauts* sur l'axe réel :

5. Le lecteur est renvoyé aux compléments de cette leçon (cf. le TD) pour de plus amples développements sur ce thème.



1.1. Nature d'une série numérique

Définition 12.1. Convergence, somme, suite des sommes partielles d'une série

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite d'éléments de \mathbb{K} . On reprend les notations de la définition 1

⇒ On dit que que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n \geq 0}$ est convergente. On dit de manière équivalente que la série de terme général u_n est convergente.

⇒ En cas de convergence, on note $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k := \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$. Ce nombre est appelé somme de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

⇒ Dans le cas contraire, on dit que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge ou encore qu'elle est divergente.

Extension à des suites définies à partir d'un certain rang : la série $\sum_{n \geq n_0} u_n$ désigne en fait $\sum_{n \geq 0} u_{n+n_0}$.

✘ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a par la formule des sommes géométriques que

$$\sum_{k=0}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2$$

Ainsi la série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{2^n}$ converge et sa somme vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 2$.

✘ Puisque $\sum_{k=0}^n (-1)^k$ vaut 0 si n est impair et 1 sinon, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n$ diverge.

✘ Démontrons que la série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. En reprenant les notations de ??, on a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, S_{2n} - S_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \quad (\text{on minore les termes par le plus petit d'entre-eux})$$

Ainsi $(S_n)_{n \geq 1}$ ne peut converger (car sa convergence impliquerait que $S_{2n} - S_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$).

Définition 12.1. Nature d'une série

On appelle nature d'une série donnée $\sum_{n \geq 0} u_n$ son caractère convergent ou divergent.

La série obtenue en « *supprimant* » un nombre fini de termes dans $\sum_{n \geq 0} u_n$ et de même nature que $\sum_{n \geq 0} u_n$:

$$\forall n_0 \in \mathbb{N}, \left(\text{la série } \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge} \right) \iff \left(\text{la série } \sum_{n \geq n_0} u_n \text{ converge} \right)$$

Définition 12.2. Restes d'une série convergente

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série numérique convergente. Pour tout entier naturel n_0 , la suite $(R_n)_{n \geq 0}$ définie par

$$\forall n \geq 0, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

est appelée suite des restes de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. Pour tout entier naturel n , R_n est appelé reste d'ordre n de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}, R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k = \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k \right) - S_n$$

De plus, $u_n = R_{n-1} - R_n$ pour tout n dans \mathbb{N}^* .

Proposition 12.3. Condition nécessaire de convergence

Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

✘ Attention, la proposition « $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ » n'est pas une condition suffisante de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$. La série harmonique $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$ diverge bien que $\frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

Définition 12.4. Série grossièrement divergente

Si la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum u_n$ est dite grossièrement divergente (on dit aussi qu'elle diverge grossièrement).

✘ Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Donnons une CNS de divergence grossière de $\sum \alpha^n n^\alpha$. Par croissances comparées,

$$\lim |u_n| = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 \leq \alpha < 1 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

On en déduit que $\sum u_n$ diverge grossièrement *si et seulement si* $\alpha < -1$ ou $\alpha \geq 1$. Rappelons que, pour $-1 \leq \alpha < 1$, le terme général tend vers 0 mais on ne peut rien en déduire quant à la convergence de la série $\sum u_n$.

✘ Nous recommandons le test (**12.1**) au lecteur.

Nous continuons par un premier résultat concernant les opérations sur les séries numériques.

Proposition 12.5. Combinaisons linéaires de deux séries convergentes

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries convergentes à valeurs dans \mathbb{K} . Alors, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, la série $\sum_{n \geq 0} (u_n + \lambda v_n)$ converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (u_n + \lambda v_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n + \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$

✘ La proposition précédente peut être reformulée de manière plus abstraite : le sous-ensemble $\mathcal{C}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}})$ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ constitué des suites $(u_n)_{n \geq 0}$ telles que la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge est un sev de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et la somme d'une série convergente dépend linéairement de celle-ci

$$S : \mathcal{C}(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}) \rightarrow \mathbb{K}, (u_n)_{n \geq 0} \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$$

✘ La convergence de la somme de deux séries divergentes est une forme indéterminée : le résultat peut être une série divergente ou convergente : cf. $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right)$ et $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n}\right)$.

Un autre résultat vient compléter l'étude de la somme de deux séries numériques : la somme de deux séries de natures différentes est toujours divergente.

Proposition 12.6. Divergente + convergente

La somme d'une série convergente et d'une série divergente est divergente.

Puisque la convergence dans \mathbb{C} des sommes partielles $(S_n)_{n \geq 0}$ d'une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est équivalente à la convergence dans \mathbb{R} des suites $(\operatorname{Re} S_n)_{n \geq 0}$ et $(\operatorname{Im} S_n)_{n \geq 0}$, on en déduit le résultat suivant.

Proposition 12.7. Séries à valeurs complexes

La convergence de la série à terme complexe $\sum_{n \geq 0} u_n$ est équivalente à celle des séries $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Re} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} \operatorname{Im} u_n$. En cas de convergence, on a

$$\operatorname{Re} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Re} u_n \quad \text{et} \quad \operatorname{Im} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \operatorname{Im} u_n$$

1.2. Séries géométriques

La formule des sommes géométriques ouvre la voie à l'étude des séries du type $\sum_{n \geq 0} x^n$ où $x \in \mathbb{K}$.

Définition 12.8. Séries géométriques

On appelle série géométrique les séries de la forme $\sum_{n \geq 0} \lambda x^n$ où $(\lambda, x) \in \mathbb{K}^2$.

Proposition 12.9. Convergence des séries géométriques

Soit $x \in \mathbb{K}$. La série géométrique $\sum_{n \geq 0} x^n$ converge si et seulement si $|x| < 1$. De plus,

$$\forall x \in \mathbb{K} \text{ tel que } |x| < 1, \quad \sum_{n=n_0}^{+\infty} x^n = \frac{x^{n_0}}{1-x} = \frac{\text{premier terme}}{1-\text{raison}}$$

Voici une application du passage sur \mathbb{C} au calcul des sommes de Poisson.

✘ Considérons la série $\sum_{n \geq 0} \lambda^n \cos n\theta$ pour $\lambda \in]-1, 1[$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Comme $\sum_{n \geq 0} \lambda^n e^{in\theta}$ converge (série géométrique dont le module de la raison est < 1), la série $\sum_{n \geq 0} \lambda^n \cos n\theta$ converge. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a

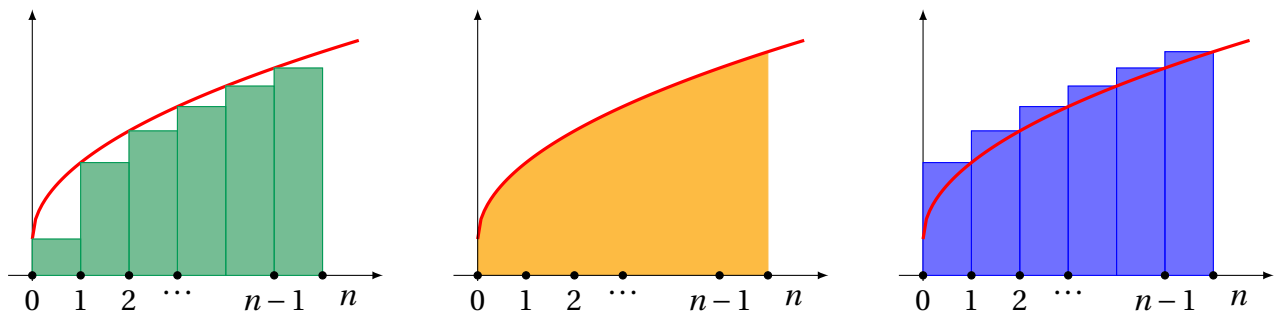
$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k e^{ik\theta} = \frac{1}{1-\lambda e^{i\theta}} = \frac{1-\lambda e^{-i\theta}}{(1-\lambda e^{i\theta})(1-\lambda e^{-i\theta})} = \frac{1-\lambda e^{-i\theta}}{1-2\lambda \cos\theta + \lambda^2}$$

d'où, en prenant la partie réelle : $\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda^n \cos n\theta = \frac{1-\lambda \cos\theta}{1-2\lambda \cos\theta + \lambda^2}$.

✘ Le lecteur pourra aborder le test ([§ 12.2](#)).

1.3. Comparaison série-intégrale

Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et croissante. Pour étudier la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$, on peut encadrer ses sommes partielles S_n par la méthode des rectangles :



On a

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \leq \int_0^n f(t) dt \leq \sum_{k=1}^n f(k) \quad \text{ou encore} \quad \int_0^n f(t) dt + f(0) \leq \sum_{k=0}^n f(k) \leq \int_0^{n+1} f(t) dt$$

On peut formaliser cet encadrement en appliquant la croissance de l'intégrale :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_k^{k+1} f(t) dt \geq f(k) \geq \int_{k-1}^k f(t) dt$$

puis, en sommant les inégalités obtenues et en utilisant la relation de Chasles, on obtient l'encadrement de S_n .

Cette méthode permet d'estimer les sommes partielles de la série $\sum_{n \geq 0} f(n)$ et plus particulièrement est intéressante lorsque l'on sait calculer facilement ces intégrales. On adapte sans peine cette méthode au cas d'une fonction décroissante.

2. Séries à termes positifs

Les séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est à valeurs réelles positives s'étudient au moyen du théorème de la limite monotone :

Proposition 12.10. Alternative pour les séries à termes positifs

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ une série à termes positifs. Notons $(S_n)_{n \geq 0}$ la suite des sommes partielles associée. On a alors l'alternative suivante :

- a.** Si $(S_n)_{n \geq 0}$ est majorée, alors la série $\sum u_n$ converge; **b.** Sinon, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

Dans les paragraphes qui suivent, nous allons forger plusieurs outils permettant de conclure quant à la convergence ou la divergence d'une série à termes positifs $\sum_{n \geq 0} u_n$ donnée. Le principe sera de comparer (au sens des relations de comparaison usuelles \leq et celles forgées dans le cours d'analyse asymptotique) la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à des séries de référence : les séries géométriques et les séries de la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

2.1. Séries de Riemann

Après les séries géométriques, nous allons étudier un exemple fondamental, aux applications multiples.

Définition 12.11. Séries de Riemann

On appelle série de Riemann les séries de la forme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ où $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'importance de ce type de série vient du cours d'analyse asymptotique : les développements limités permettent dans de nombreux cas de comparer une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ à une série de Riemann.

Proposition 12.12. Séries de Riemann

Pour tout réel α , la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

2.2. Comparaison des séries à termes positifs

Nous commençons par un résultat de comparaison directe par inégalité :

Proposition 12.13. (Comparaison par majoration et/ou minoration)

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ des séries telles que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq v_n$. On a alors :

- a. $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge $\implies \sum_{n \geq 0} v_n$ diverge; b. $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge $\implies \sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

En cas de convergence des deux séries, on a de plus $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

Ce résultat nécessite souvent un peu de souplesse dans son application : puisqu'une série tronquée est de même nature que la série initiale, le résultat précédent reste valable si les inégalités ne sont vérifiées qu'à partir d'un certain rang.

- ✘ La série $\sum e^{-n^2}$ converge. En effet, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq e^{-n}$ et $\sum e^{-n}$ est une série géométrique convergente car $|e^{-1}| < 1$.

Le résultat suivant justifie presque à lui seul l'introduction des grands « O ».

Proposition 12.14. Comparaison par les O ou o

Soit $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = O(v_n)$. On a alors :

- a. $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge $\implies \sum_{n \geq 0} v_n$ diverge; b. $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge $\implies \sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

On a de plus la même conclusion en supposant $u_n = o(v_n)$.

- ✘ Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Discutons la nature $\sum_{n \geq 0} u_n$
- ✓ Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} a$, $a = 0$ est une condition nécessaire de convergence de la série.
 - ✓ Supposons $a = 0$ et $b \neq 0$. Comme $u_n \sim \frac{b}{n}$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{b}{n}$ diverge, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge par comparaison à une série divergente de terme général positif.
 - ✓ Supposons $a = b = 0$. On a $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est positive, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge.

Ainsi $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge si et seulement si $a = b = 0$.

Proposition 12.15. Comparaison par un équivalent

Deux séries à termes positifs $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n \geq 0} v_n$ telles que $u_n \sim v_n$ sont de même nature.

- ✘ Déterminons la nature de la série de terme général $u_n = 1 - \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^n$. Pour cela, nous allons déterminer un équivalent simple de u_n :

$$n \sin\left(\frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{6n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \quad \text{d'où} \quad n \ln\left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right) = -\frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

et $u_n = \frac{1}{6n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{6n}$. Les séries $\sum_{n \geq 1} u_n$ et $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{6n}$ sont donc à termes positifs à partir d'un certain rang et de même nature. On reconnaît dans la deuxième série une série de Riemann divergente (à un coefficient multiplicateur près) : $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

✘ Le lecteur traitera le test (**12.3**).

Attention à $\sum u_n$ avec u_n de signe variable

Les conclusions des trois théorèmes de comparaison énoncés dans ce paragraphe ne sont plus valables en général si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne sont pas supposées à termes positifs (ou négatifs). Voir plus loin dans ce cours des contre-exemples (cf. 3.1 à la pas 15).

2.3. La règle de D'Alembert

Il s'agit en fait d'une comparaison aux séries géométriques. La règle de D'Alembert est particulièrement adaptée aux séries dont le terme général est un produit mais elle ne sera pas efficace pour des expressions rationnelles en n et $\ln n$: on ne pourra pas toujours conclure.

Proposition 12.16. Règle de D'Alembert

Soit $(u_n)_{n \geq 0}$ une suite de nombres réels strictement positifs telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.

a. $\ell > 1 \implies \sum_{n \geq 0} u_n$ diverge et $\ell < 1 \implies \sum_{n \geq 0} u_n$ converge;

b. Dans le cas où $\ell = 1$, on ne peut **RIEN** en conclure.

✘ Le cas où $\ell = 1$ est appelé le *cas douteux* de la règle de D'Alembert : il existe aussi bien des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ convergentes et divergentes pour lesquelles $\ell = 1$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $u_n := n^{-\alpha}$ pour tout entier naturel n non nul. Puisque $(n+1)^\alpha \sim n^\alpha$, le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers 1. Mais pour $\alpha > 1$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge et pour $\alpha < 1$, $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge.

✘ La série $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{\binom{2n}{n}}$ converge car

$$\forall n \geq 0, \frac{\binom{2n}{n}}{\binom{2n+2}{n+1}} = \frac{(2n)!((n+1)!)^2}{(n!)^2(2n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n+1}{4n+2} \sim \frac{1}{4}$$

✘ Il est recommandé de trouver un équivalent du terme général *avant* d'appliquer cette règle. Déterminons la nature de la série de terme général $u_n = \pi^{\sqrt{n^2+2n}} x^n$ où $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a

$$\begin{aligned} \pi^{\sqrt{n^2+2n}} &= \exp\left(\sqrt{n^2+2n} \ln \pi\right) = \exp\left((n \ln \pi) \left(1 + \frac{2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{\frac{1}{2}}\right) = \exp\left((n \ln \pi) \left(1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)\right) \\ &= \exp((n+1) \ln \pi + o(1)) = \pi^{n+1} \exp(o(1)) \sim \pi^{n+1} \quad \text{d'où} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} \sim \pi x \end{aligned}$$

✓ Si $x < \frac{1}{\pi}$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge par la règle de D'Alembert.

✓ Si $x > \frac{1}{\pi}$, alors $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge par la règle de D'Alembert.

✓ Si $x = \frac{1}{\pi}$, alors $u_n \sim \frac{1}{\pi}$ et donc $\sum_{n \geq 0} u_n$ diverge grossièrement;

✘ Nous recommandons ici le test (**12.4**).

2.4. La règle « $n^\alpha u_n$ »

Il s'agit de comparer une série à termes positifs $\sum u_n$ à une série de Riemann $\sum n^{-\alpha}$.

Proposition 12.17. Règle « $n^\alpha u_n$ »

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs. Alors

$$\mathbf{a.} \exists \alpha \leq 1, \frac{1}{n^\alpha} = o(u_n) \implies \sum_{n \geq 0} u_n \text{ diverge}; \quad \mathbf{b.} \exists \alpha > 1, u_n = o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \implies \sum_{n \geq 0} u_n \text{ converge.}$$

La même conclusion vaut pour un grand « O ».

✘ Étudions la série $\sum_{n \geq 0} n^2 2^{-n}$. Par croissances comparées, $n^2 2^{-n} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ ainsi $n^2 2^{-n} = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$: $\sum_{n \geq 0} n^2 2^{-n}$ converge.


✘ Passons à l'exemple plus élaboré des séries de Bertrand. Il est recommandé de connaître le résultat énoncé ci-dessus, qui généralise le résultat analogue sur les séries de Riemann, bien qu'il ne soit pas officiellement au programme.

Pour $n \geq 2$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, posons $u_n := \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n}$. On a

$$\sum_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha \ln^\beta n} \text{ converge si et seulement si } \begin{cases} \alpha > 1 \\ \text{ou} \\ \alpha = 1 \text{ et } \beta > 1 \end{cases}$$

✓ Cas 1 : $1 < \alpha$. Posons $\gamma := \frac{1+\alpha}{2}$  On a $1 < \gamma < \alpha$.

Ainsi $n^\gamma u_n = n^{\gamma-\alpha} \ln^{-\beta} n$ d'où, par croissances comparées, $n^\gamma u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ i.e. $u_n = o\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$. Comme $\gamma > 1$, la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

✓ Cas 2 : $\alpha < 1$. Posons $\gamma := \frac{1+\alpha}{2}$  Cette fois-ci $\alpha < \gamma < 1$.

Ainsi $n^\gamma u_n = n^{\gamma-\alpha} \ln^{-\beta}(n)$ d'où, par croissances comparées, $n^\gamma u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty$ i.e. $\frac{1}{n^\gamma} = o(u_n)$. Comme $\gamma < 1$, la série $\sum_{n \geq 2} u_n$ diverge.

✓ Cas 3 : $\alpha = 1$.

✦ Si $\beta \leq 0$, alors $u_n \geq \frac{1}{n}$ donc $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge.

✦ Supposons $\beta > 0$. Comparons $\sum_{n \geq 2} u_n$ à une intégrale. La fonction $f_\beta : x \mapsto \frac{(\ln x)^{-\beta}}{x}$ est continue et décroissante sur $[2, +\infty[$. Ainsi

$$\forall n \geq 2, \int_2^{n+1} \frac{dt}{t \ln^\beta t} \leq \sum_{k=2}^n \frac{1}{k \ln^\beta k} \leq \frac{1}{2 \ln^\beta 2} + \int_2^n \frac{dt}{t \ln^\beta t}$$

$$\text{On a } \int_2^n \frac{dt}{t \ln^\beta t} \begin{cases} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty & \text{si } \beta \leq 1 \\ \text{est majorée} & \text{si } \beta > 1 \end{cases} \text{ puisque } \int_2^n \frac{dt}{t \ln^\beta t} = \begin{cases} \frac{\ln^{1-\beta} n - \ln^{1-\beta} 2}{1-\beta} & \text{si } \beta \neq 1 \\ \ln \ln n - \ln \ln 2 & \text{si } \beta = 1 \end{cases}$$

On en déduit que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge si et seulement si $\beta > 1$.

✘ Nous recommandons ici le test (**12.5**).

Le lecteur poursuivra avec profit par le test (**12.6**).

3. Séries à valeurs réelles ou complexes

Après avoir étudié le cas des séries $\sum_{n \geq 0} u_n$ dont le terme général u_n est de signe constant à partir d'un certain rang, nous allons considérer le cas où u_n change de signe une infinité de fois.

3.1. Séries alternées

Nous commençons par le cas où le signe de u_n alterne selon la parité de l'indice n .

Définition 12.18. Série alternée

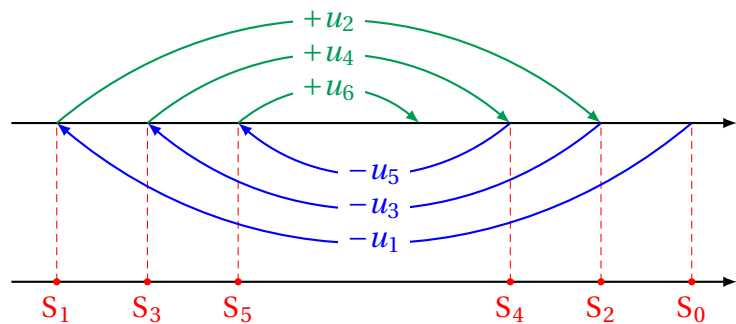
Une série à termes réels $\sum_{n \geq 0} a_n$ est dite alternée son terme général a_n peut s'écrire $a_n = (-1)^n u_n$ où u_n est de signe constant (i.e. indépendant de n).

Sous l'hypothèse supplémentaire de décroissance de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, la dynamique d'une série alternée $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$, bien que plus complexe que celle d'une série à termes positifs, peut être décrite facilement. Notons $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$.

On observe que $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont bornées respectivement décroissante et croissante : elles convergent donc. Comme

$$|S_{n+1} - S_n| = u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, la série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ converge si et seulement si $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.



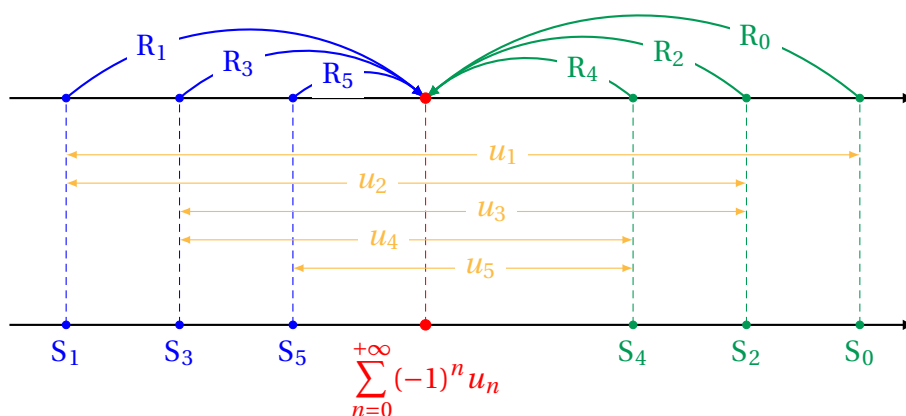
Proposition 12.19. Critère spécial des séries alternées

Soit $(u_n)_{n \geq 0} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui décroît vers 0.

- La série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ est convergente.
- La valeur absolue d'un reste est majorée par la valeur absolue de son premier terme :

$$\forall n \geq 0, \quad |R_n| = \left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leq u_{n+1}$$

- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le signe de R_n est celui de son premier terme $(-1)^{n+1} u_{n+1}$.



- ✘ Les séries alternées de Riemann $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$. On commence par remarquer que cette série est alternée. Pour $\alpha \leq 0$, la série diverge grossièrement et, pour $\alpha > 0$, $(\frac{1}{n^\alpha})_{n \geq 1}$ décroît vers 0, on conclut en appliquant le critère spécial pour les séries alternées.
- ✘ Retour aux théorèmes de comparaison. Le *critère spécial des séries alternées* permet de donner des contre-exemples très simples aux théorèmes de comparaisons. On a

$$u_n := \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \sim \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$$

La $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge par le critère spécial des séries alternées mais la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diverge en tant que somme d'une série convergente et d'une série divergente.

- ✘ On poursuivra par le test (**12.7**).

3.2. Absolue et semi convergence

Afin de se ramener aux théorèmes sur les séries à termes positifs, il est judicieux d'introduire les notations suivantes.

Définition 12.20. Parties positive et négative d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

⇒ On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ := \max(0, u_n)$ et $u_n^- := \min(0, u_n)$.

⇒ Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_n^+ + u_n^-$ et $|u_n| = u_n^+ - u_n^-$.

⇒ Les suites $(u_n^+)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement appelées parties positive et négative de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Ainsi, par linéarité de la somme des séries convergentes, la convergence des séries $\sum_{n \geq 0} u_n^\pm$ implique celle de $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Définition 12.21. Convergence absolue

Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ à valeurs dans \mathbb{K} est dite absolument convergente si la série $\sum_{n \geq 0} |u_n|$ est convergente.

Ceci équivaut à la convergence de chacune des séries $\sum_{n \geq 0} u_n^\pm$. On en déduit le théorème suivant auquel on adjoint l'inégalité triangulaire pour les sommes « infinies ».

Proposition 12.22. Convergence et convergence absolue.

Une série réelle $\sum_{n \geq 0} u_n$ absolument convergente est convergente et $\left| \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \right| \leq \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$. Le même résultat est valable pour les séries à valeurs complexes.

- ✘ La convergence n'implique pas la convergence absolue : $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge mais pas $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$.
- ✘ Le lecteur continuera par le test (❗ 12.8).

Théorèmes de comparaison et absolue convergence

Supposons que $u_n = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$ avec $\alpha > 1$. Même si le signe de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas constant, on peut appliquer le théorème de comparaison par grand « O » de la façon suivante :
Comme on a également $|u_n| = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)$, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument donc converge.

C'est pour cette raison qu'un développement asymptotique de u_n à la précision $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ est suffisant pour déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

- ✘ Revenons à l'exemple de la page 11 : soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ positive et $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $u_n = a + \frac{b}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.
 - ✓ On a vu que $(a, b) = (0, 0)$ est une condition nécessaire de convergence de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.
 - ✓ Supposons $a = b = 0$. On a $u_n = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Comme $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, la série $\sum_{n \geq 0} u_n$ converge absolument donc converge.

Définition 12.23. Semi convergence

Une série $\sum_{n \geq 0} u_n$ est dite semi-convergente si elle est convergente mais pas absolument convergente.

Dans ce cas, les deux séries $\sum_{n \geq 0} u_n^\pm$ divergent nécessairement.

Comment étudier une série semi-convergente ?

- ⇒ Utilisation du critère spécial des séries alternées si les hypothèses sont vérifiées.
- ⇒ Utilisation d'un développement asymptotique afin de se ramener à une somme de séries.

- ✘ Étudions la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{\sqrt{n} + (-1)^n n}$. $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} \frac{1}{1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)^{-1} = \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$$

La série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}$ converge d'après le critère spécial des séries alternées et toute série de terme général en $O(n^{-3/2})$ est absolument convergente (donc convergente) par comparaison aux séries de Riemann. On en déduit que $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge en tant que somme de trois séries convergentes.

✘ Voir le test (**12.9**) pour approfondir.

Les séries absolument convergentes et semi convergentes ont des propriétés très différentes. Nous aurons l'occasion d'approfondir ces aspects en TD :

Convergence et commutativité

⇒ Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est absolument convergente, alors $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, $\sum_{n \geq 0} u_{\sigma(n)}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

⇒ Si $\sum_{n \geq 0} u_n$ est semi convergente, alors $\forall x \in \overline{\mathbb{R}}$, $\exists \sigma \in \mathfrak{S}_{\mathbb{N}}$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$
(en étendant aux infinis la notation sommatoire)

En particulier, *sommer une infinité de termes*, au sens des séries, est une opération commutative pour les séries absolument convergentes mais pas en cas de semi convergence.

4. Calcul de la somme d'une série numérique convergente

Après nous être beaucoup occupé de la *convergence* des séries numériques, nous allons évoquer le problème du calcul de la somme d'une série convergente. Comme pour les intégrales, nous ne saurons calculer exactement que très peu de sommes ; dans de nombreux cas, nous devons nous contenter de valeurs approchées.

Quelques pistes pour le calcul de la somme d'une série convergente

Il faut revenir aux sommes partielles $(S_n)_{n \geq 0}$ et se ramener à l'une des situations suivantes :

⇒ S_n (ou $\lim S_n$) se calcule directement (formulaire, séries géométriques, passage sur \mathbb{C} , exponentielles, etc.) ;

⇒ S_n se simplifie par télescopage (penser à des formules pour l'arctangente, des décompositions en éléments simples, etc.) ;

⇒ Si u_n est de la forme $f^{(n)}(x_0) \frac{u^n}{n!}$, la formule de Taylor avec reste intégral permet d'étudier la convergence de la série et donne l'expression de la somme le cas échéant.

✘ Démontrons que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} &= \sum_{k=1}^n \int_0^1 (-t)^{k-1} dt = \int_0^1 \frac{1 + (-1)^{n-1} t^n}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{dt}{1+t} + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t} \\ &= \ln 2 + (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t} \text{ puis } \int_0^1 \frac{t^n dt}{1+t} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \text{ par un encadrement facile} \end{aligned}$$

✘ Séries télescopiques $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ avec $(u_n)_{n \geq 0}$ connue. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+3)} = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+3} \right) = \frac{1}{3} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \frac{1}{3} \sum_{k=4}^{n+3} \frac{1}{k} = \frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+3} \right)$$

après télescopage. Ainsi $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(n+3)}$ converge et sa somme vaut $\frac{11}{18}$.

✘ La formule de Taylor avec reste intégral permet d'obtenir des développements en série de certaines fonctions de classe \mathcal{C}^∞ . Par exemple :

$$\forall x \in \mathbb{R}, e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$$

✓ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Comme l'exponentielle est indéfiniment dérivable, on peut écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre n :

$$e^x = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \underbrace{\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t dt}_{=: r_n(x)}$$

✓ Pour tout t entre 0 et x , $0 \leq \left| \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \right| \leq \frac{|x|^n e^{|x|}}{n!}$ d'où $0 \leq |r_n(x)| \leq \frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{n!}$ par inégalité triangulaire puis croissance de l'intégrale.

✓ Comme $\frac{|x|^{n+1} e^{|x|}}{n!} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ par croissances comparées, on a $r_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ d'où le résultat.

✘ Le lecteur est renvoyé au test (**12.10**).

5. Applications des séries numériques

Nous terminons ce cours par une petite application aux suites et un paragraphe plus long et technique sur la formalisation des développements décimaux.

5.1. Séries et suites numériques

Le lecteur est renvoyé à l'introduction de ce chapitre : la convergence de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$ équivaut à celle de la série $\sum_{n \geq 0} u_n$.

Proposition 12.24. Suites convergentes et séries convergentes

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. La suite $(u_n)_{n \geq 0}$ converge si et seulement si la série $\sum_{n \geq 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge.

✘ Développement asymptotique de la série harmonique : $\exists \gamma \in \mathbb{R}$, $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$. Posons, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$$

Il s'agit de prouver que $(u_n)_{n \geq 1}$ est convergente. D'après la proposition 5.1, on sait que cela équivaut à la convergence de $\sum (u_{n+1} - u_n)$. Pour tout entier naturel non nul, posons $v_n = u_{n+1} - u_n$. On a

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \\ &= \frac{1}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) - \frac{1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

La série $\sum v_n$ est absolument convergente, on en déduit qu'elle converge et qu'il en est de même de la suite $(u_n)_{n \geq 1}$. La limite de cette suite est notée γ et appelée constante d'Euler. On a $\gamma \approx 1,52$. On sait peu de choses de la constante d'Euler; par exemple, on ne sait pas si γ est irrationnelle.

Une autre application remarquable est l'obtention de l'équivalent de Stirling :

Proposition 12.25. Équivalent de Stirling $n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$

En voici une démonstration sous forme d'exercice :

✘ Montrons que $\exists K \in \mathbb{R}_+^*$, $n! \sim K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$. Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $u_n := n! \times n^{-n-\frac{1}{2}} e^n$ et $v_n := \ln \frac{u_{n+1}}{u_n}$. On a

$$v_n = \ln \left(e \times \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n-\frac{1}{2}} \right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1 - \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right)\right) = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Ainsi $\sum_{n \geq 0} v_n$ converge, donc la suite $(\ln u_n)_{n \geq 0}$ converge (par 5.1) : en notant ℓ sa limite, on a $u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} K := e^\ell > 0$. D'où $n! \sim K\sqrt{n} \left(\frac{n}{e}\right)^n$.

✘ Les intégrales de Wallis vont nous permettre de calculer la constante K. Voici un petit rappel :

$$I_n := \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt, \quad (I_n)_{n \geq 0} \text{ est décroissante et } \forall n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} I_n$$

✓ On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{\pi}{2} \frac{(2n)!}{2^{2n} n!^2}$ et $(n+1)I_n I_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ (★).

✓ Des inégalités $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{n+1}{n+2} I_n \leq I_{n+1} \leq I_n$ on déduit que $I_n \sim I_{n+1}$ d'où $I_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ par (★).

✓ Du premier point, on déduit que $I_{2n} \sim \frac{\pi\sqrt{2}}{2K\sqrt{n}}$ d'où $\frac{\pi\sqrt{2}}{2K\sqrt{n}} \sim \sqrt{\frac{\pi}{4n}}$ ie $K \sim \sqrt{2\pi}$ donc $K = \sqrt{2\pi}$.

5.2. Développements décimaux

La théorie des séries va nous permettre de formaliser la notion de développement décimal. Il faut comprendre l'égalité

$$\frac{1}{3} = 0,333 \dots \quad \text{comme un développement en série : } \frac{1}{3} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{10^n}$$

Avec cette définition, on s'aperçoit qu'il n'y a pas toujours unicité du développement décimal :

$$0,1000\dots = 0,0999\dots \quad \text{car} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{9}{10^n} = \frac{9}{10^2} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{10}$$

Cependant, il y a unicité si on impose que les décimales ne stationnent pas à la valeur 9, c'est ce qu'on appelle le développement propre d'un nombre. Quitte à retrancher sa partie entière à un réel x , on se ramène au cas où $x \in [0, 1[$. On peut facilement deviner l'expression des décimales de x :

si $x = 0, c_1 c_2 c_3 \dots$ (en base 10) alors $10^k x = c_1 \dots c_k, c_{k+1} c_{k+2} \dots$ (en base 10)

d'où $\underline{c_1 \dots c_{k-1}}_{10} = \lfloor 10^{k-1} x \rfloor$ et finalement $c_k = \underline{c_1 \dots c_{k-1}}_{10} - 10 \times \underline{c_1 \dots c_{k-2}}_{10} = \lfloor 10^k x \rfloor - 10 \times \lfloor 10^{k-1} x \rfloor$.

C'est cette idée *simple* que la démonstration suivante formalise :

Proposition 12.26. Développement décimal propre

Pour tout $x \in [0, 1[$, il existe une unique suite $(c_n) \in \llbracket 0, 9 \rrbracket^{\mathbb{N}^*}$ qui ne stationne pas à 9 telle que

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{10^n} \quad (\text{cette écriture est appelée } \textit{développement décimal propre de } x)$$

L'unicité des décimales c_k est bien-sûr démontrée par l'analyse. Si x est un nombre rationnel, il suffit d'appliquer l'algorithme de la division à virgule de notre enfance pour trouver les décimales de x :

✘ Développement décimal de $x = 8/7$. On a $\lfloor x \rfloor = 1$ et $\alpha := x - \lfloor x \rfloor = 1/7$.

1 7 0	100 7 30 0,1 2	1000 7 300 0,142 6	10000 7 3000 0,1428 4	100000 7 30000 0,14285 5	1000000 7 300000 0,142857 1
--------------	----------------------------	--------------------------------	-----------------------------------	--------------------------------------	---

À partir du retour du chiffre 1, on retrouve la même séquence. Ainsi, $x = 1, \overline{142857}$.

✘ On retrouve bien le développement décimal propre par cet algorithme appliqué à $\frac{p}{q}$ avec $0 \leq p < q$. En effet, après obtention de n décimales $0, \underline{c_1 c_2 \dots c_{n-1}}$ au quotient, on a

$$10^n p = \underline{c_1 c_2 \dots c_{n-1}} \times q + r \quad \text{avec } 0 \leq r < q$$

d'où $\frac{p}{q} = 0, \underline{c_1 c_2 \dots c_{n-1}} + \frac{r}{q} 10^{-n}$ et $\frac{r}{q} 10^{-n} < 10^{-n}$.

On peut caractériser les rationnels au moyen de leur développement décimal propre (nous démontrerons le résultat suivant en TD).

Proposition 12.27. Caractérisation des décimaux par leur développement décimal

Un réel est rationnel si et seulement si son développement décimal propre est périodique APCR.

✘ Retrouvons la forme irréductible du rationnel $x = 0, 11\overline{123}$. On a

$$100x - 11 = 0, \overline{123} = 123 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{3k}} = \frac{123}{1000} \times \frac{1}{1 - 1/1000} = \frac{123}{999} = \frac{41}{333}$$

Ainsi $100x = 11 + \frac{41}{333} = \frac{3704}{333}$ puis $x = \frac{926}{8325}$.

- ✘ Les nombres réels décimaux, ie qui ne sont pas de la forme $\frac{p}{10^q}$ avec $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}$, admettent deux développements décimaux, les autres un seul (le développement propre).

6. Récapitulatif sur l'étude des séries

Plan d'étude de la nature d'une série numérique

Pour étudier la convergence d'une série numérique $\sum u_n$ on pourra se poser *dans l'ordre* les questions suivantes :

- ⇒ Y-a-t-il divergence grossière ? On pourra rechercher un équivalent du terme général pour répondre à cette question. En cas de réponse positive, l'étude est finie.
- ⇒ En cas de réponse négative, on distinguera deux cas de figure.

Si la série est à termes positifs

- ☞ Les tests de comparaison (minoration, majoration, recherche d'un équivalent, D'Alembert, comparaison à une série de Riemann) sont-ils concluants ?
- ☞ Peut-on comparer la série à une intégrale par la méthode des rectangles ?

Si le signe de u_n est variable

- ☞ La série est-elle absolument convergente ? On utilisera pour cela les tests de comparaison pour la série à termes positifs $\sum |u_n|$.
- ☞ Le critère spécial des séries alternées est-il applicable ?
- ☞ Peut-on obtenir un DAS de u_n ?

Bien-sûr (et heureusement), des cas plus exotiques pourront survenir...

7. Énoncés des tests

12.1. ☉ ↻

Étudier la divergence grossière des séries $\sum u_n$ définies par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n}, \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{-n}, 3^n \cos^n(\pi/8), \frac{n^2 x}{x^2 + n^2}, \left(1 - \ln\left(1 + \frac{1}{n^\alpha}\right)\right)^n \text{ avec } \alpha > 0$$

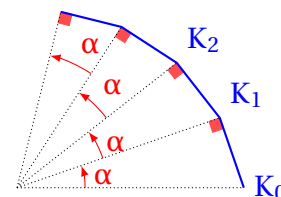
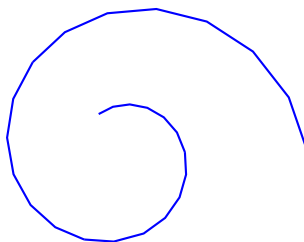
12.2. ☉ ↻

Un peu de biologie :

On dessine le squelette d'un coquillage par la construction esquissée ci-contre et qui se poursuit à l'infini.

On a $\alpha \in]0, \pi/2[$ et $OK_0 = 1$.

Quelle est la longueur totale du squelette ?



12.3. ☉ ↻

Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Établir que les séries $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

12.4. ☉ ↻

Déterminer la nature des séries $\sum u_n$ pour $u_n = \frac{1}{x^n + x^{-n}}$ pour $x > 0$, $\frac{n!}{n^n}$, $\frac{x^n}{n!}$ pour $x > 0$.

12.5. ☉ ↻

Existe-t-il une série à termes positifs $\sum u_n$ divergente telle que $u_n \ll \frac{1}{n}$?

12.6. ☉ ↻

Nature des séries $\sum u_n$ pour $u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\sqrt{n+1}}$, $\frac{n}{n^2 + 3^n}$, $e^{-\sqrt{\ln n}}$, $\frac{\ln n}{n^2}$.

12.7. ☉ ↻

Trouver une série $\sum_{n \geq 0} (-1)^n u_n$ divergente avec $(u_n)_{n \geq 0}$ positive de limite nulle.

12.8. ☉ ↻

Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 2} u_n$ où $u_n := \frac{(-1)^n + \sin(n)}{n^2 + (-1)^n}$.

12.9. ☉ ↻

Étudier la convergence de $\sum_{n \geq 2} u_n$ pour $\frac{(-1)^n}{n + (-1)^n}$, $\exp\left(\frac{(-1)^n}{n}\right) - 1$.

12.10. ☉ ↻

Établir l'existence et calculer les sommes $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!}$ en admettant que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} = e$.

8. Solutions aux tests

12.1.

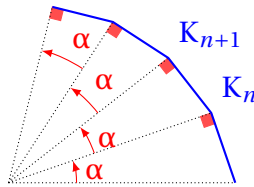
- a. $\sum u_n$ diverge grossièrement car on prouve avec un peu de calcul asymptotique que $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1}$.
- b. $\sum u_n$ diverge grossièrement car, par croissance comparées, $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1$.
- c. Comme $u_n \geq 3^n \cos^n(\pi/3) \geq (\frac{3}{2})^n$, on a $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$.
- d. Comme $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} x$, $\sum u_n$ diverge grossièrement *si et seulement si* $x \neq 0$.
- e. On a

$$\ln(u_n) = n \ln \left(1 - \frac{1}{n^\alpha} + o\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \right) \sim -n^{1-\alpha}$$

Ainsi, $\sum u_n$ diverge grossièrement *si et seulement si* $\alpha \geq 1$.

12.2.

Tout est dans la figure :



On a clairement, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$OK_{n+1} = \cos(\alpha)OK_n$$

donc $OK_n = \cos^n(\alpha)$. De plus,

$$K_n K_{n+1} = \sin(\alpha)OK_n = \sin(\alpha) \cos^n(\alpha)$$

La longueur totale du squelette est donc égale à

$$L = \sum_{k=0}^{+\infty} \sin(\alpha) \cos^k(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{1 - \cos(\alpha)}$$

12.3.

\Rightarrow Si $\sum u_n$ converge, alors $u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et

$$\frac{u_n}{1+u_n} \sim u_n$$

donc $\sum \frac{u_n}{1+u_n}$ converge.

\Rightarrow Réciproquement, supposons $\sum (u_n/(1+u_n))$ convergente. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{u_n}{1+u_n}$$

On a

$$u_n = \frac{v_n}{1-v_n} \sim v_n$$

car $v_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: la série $\sum u_n$ converge.

12.4.

a. On rappelle que $x > 0$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x^{2n+1} + x}{x^{2n+2} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} x^{-1} & \text{si } x > 1 \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ x & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

Dans le cas où $x = 1$, $u_n = 1/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $\sum u_n$ converge *si et seulement si* $x \neq 1$, par la règle de D'Alembert.

b. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^{-1} < 1$$

donc $\sum u_n$ converge par la règle de D'Alembert.

c. On rappelle que $x > 0$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{x}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\sum u_n$ converge par la règle de D'Alembert.

12.5.

Oui, la série de Bertrand

$$\sum \frac{1}{n \ln n}$$

convient.

12.6.

a. On a $u_n \sim \frac{1}{n^{3/2}}$ donc la série converge.

b. Comme

$$u_n \sim \frac{n}{3^n}$$

$u_n = o\left(\frac{1}{n^2}\right)$ par croissances comparées et $\sum u_n$ converge.

c. On a, par croissances comparées,

$$u_n \gg \frac{1}{n}$$

donc $\sum u_n$ diverge.

d. On a, par croissances comparées,

$$u_n \ll \frac{1}{n^{3/2}}$$

donc $\sum u_n$ converge.

12.7.

Il suffit de considérer

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{(-1)^n}{n}$$

12.8.

On a

$$\frac{(-1)^n + \sin(n)}{n^2 + (-1)^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ainsi $\sum_{n \geq 2} u_n$ est absolument convergente donc convergente.

12.9.

a. On a

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + \frac{(-1)^n}{n}\right)^{-1} \\ &= \frac{(-1)^n}{n} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ &= \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned}$$

ainsi $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

b. On a

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

donc $\sum_{n \geq 2} u_n$ converge.

12.10.

a. On a, pour tout $k \geq 2$,

$$\frac{1}{k^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right)$$

d'où

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2 - 1} &= \frac{1}{2} \sum_{k=2}^n \left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

après télescopage. Ainsi $\sum \frac{1}{k^2 - 1}$ converge et

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{1}{k^2 - 1} = \frac{3}{4}$$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{n^2}{n!} = \frac{n}{(n-1)!} = \frac{n-1}{(n-1)!} + \frac{1}{(n-1)!}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \frac{k^2}{k!} &= \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{k!} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{k-1}{(k-1)!} + \frac{1}{(k-1)!} \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{k-1}{(k-1)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=2}^n \frac{1}{(k-2)!} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{(k-1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} \end{aligned}$$

Ainsi, la série converge et

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{n!} = 2e$$