AN 13 | Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Le dernier chapitre du cours d'Analyse est dédié à l'étude des fonctions de deux variables, l'objectif principal étant de généraliser les notions de continuité, de dérivablité et d'extrema à ce nouveau cadre.

Été au bord de la mer, Edvard Munch

Le développement des fonctions à plusieurs variables est intimement lié à celui de la physique. Elles apparaissent très tôt dans l'histoire lors de l'étude de phénomènes complexes, dépendant de plus d'un paramètre. À l'époque moderne, l'invention du calcul infinitésimal aboutit naturellement à la résolution des équations différentielles et des équations aux dérivées partielles. Il faut cependant attendre la fin du XIXe siècle et le début du XXe pour que la rigueur s'impose dans les définitions et les calculs de dérivées partielles. Ce calcul différentiel à plusieurs variables aboutit naturellement à la géométrie différentielle via le théorème d'inversion locale et le théorème des fonctions implicites ouvrant la voie à la théorie des sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ et leurs généralisations.

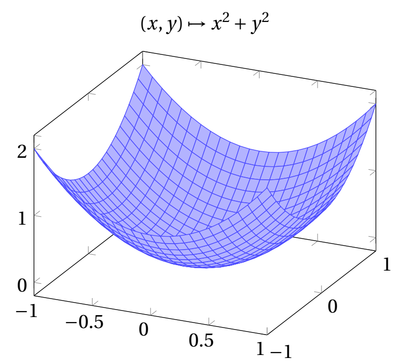
1. Représentation graphique

Étant donnée une fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et un point $a = (a_1, a_2) \in \mathrm{D}$, on notera indifféremment $f(a)$ ou $f(a_1, a_2)$ la valeur de f en ce point.

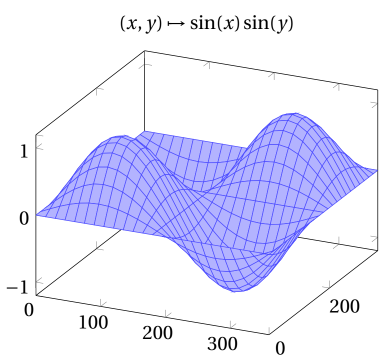
On peut représenter graphiquement une fonction $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ par son graphe

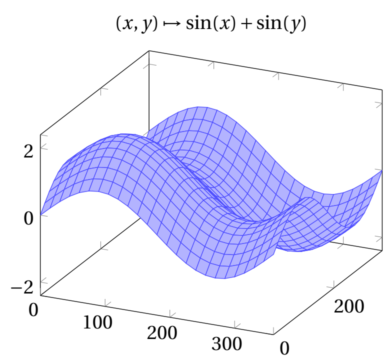
$$\Gamma_f := \left\{ \left(x, y, f(x, y)\right) ; (x, y) \in \mathrm{D} \right\}$$

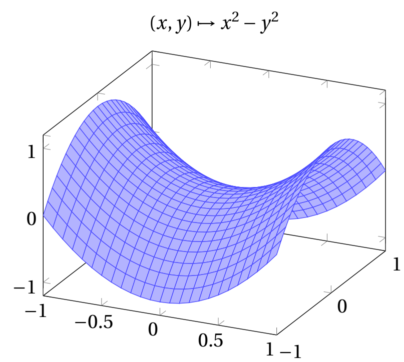
qui est une partie de $\mathrm{D} \times \mathbb{R}$, et donc de $\mathbb{R}^3$.



Par exemple, le graphe $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$, est la surface d'équation $z = x^2 + y^2$, appelée paraboloïde de révolution. L'intersection de cette surface avec le plan d'équation $z = a$ pour $a \in \mathbb{R}_+^*$ est un cercle de rayon $\sqrt{a}$. On peut également générer cette surface en faisant tourner la parabole d'équation $z = x^2$ du plan $(\mathrm{O}xz)$ selon l'axe $(\mathrm{O}z)$.







Nous recommandons vivement au lecteur d'essayer de tracer à la main quelques surfaces élémentaires afin de parfaire sa compréhension géométrique de l'espace $\mathbb{R}^3$: cf. le test (**13.1**).

2. Topologie de $\mathbb{R}^2$

On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne canonique $\|a\| := \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ où $a := (a_1, a_2)$. Le lecteur est renvoyé au chapitre AN 3 d'introduction à la topologie de $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

2.1. Ouverts, voisinages et points adhérents

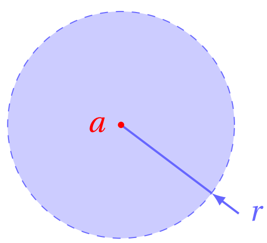
Les définitions fondamentales de l'analyse des fonctions à seule variable réelle (limite, continuité, etc) se généralisent aisément au cas de deux variables en remplaçant la valeur absolue par la norme euclidienne.

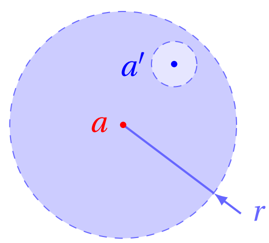
Définition 13.0. Boules ouvertes, ouverts et voisinages

Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et $r > 0$.

- On appelle boule ouverte de centre a et de rayon r la partie $\mathrm{B}(a, r) := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,;\, \|x - a\| < r\right\}$. La boule fermée, notée $\mathrm{B}'(a, r)$, est définie de même avec une inégalité au sens large.
- Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ si $\forall a \in \Omega,\ \exists r > 0,\ \mathrm{B}(a, r) \subset \Omega$.
- Soit $a \in \mathbb{R}^2$ et V une partie de $\mathbb{R}^2$. On dit que V est un voisinage de a s'il existe $r > 0$ tel que $\mathrm{B}(a, r) \subset \mathrm{V}$.

Pour $a \in \mathbb{R}^2$, on note $\mathcal{V}_a$ l'ensemble des voisinages de a dans $\mathbb{R}^2$.





L'ensemble $\mathrm{B}(p, r)$ est aussi qualifié de *disque ouvert de centre a et de rayon r*, noté $\mathrm{D}(p, r)$. Nous emploierons plutôt le terme de boule, usuel pour la généralisation à $\mathbb{R}^n$.

Dans les différentes définitions, la boule $\mathrm{B}(a, r)$ va jouer un rôle analogue à l'intervalle $]a-r, a+r[$ dans la définition de la limite d'une fonction à une seule variable réelle (pour $a \in \mathbb{R}$). Quand une variable $x \in \mathbb{R}^2$ tend vers a, elle peut le faire *dans toutes les directions du plan* alors que dans le cas réel, elle ne peut tendre vers a que dans une seule direction (à gauche et/ou à droite).

- Le demi-plan $\mathrm{H} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x > 0\right\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Toute boule ouverte de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert (cf. la figure ci-dessus).
- Le demi-plan $\mathrm{H}' := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, x \geqslant 0\right\}$ n'est pas un ouvert de $\mathbb{R}^2$ mais est un voisinage de tout les points de H. La droite $\Delta := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,;\, y = 0\right\}$ n'est pas un ouvert.

Proposition 13.1. Intersection finies

L'intersection d'un nombre fini d'ouverts est un ouvert. De même, l'intersection d'un nombre fini de voisinages d'un point de $\mathbb{R}^2$ est encore un voisinage de ce point.

Définition 13.2. Point adhérent à une partie de $\mathbb{R}^2$

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}^2$. On dit que a est adhérent à D (ou encore que a adhère à D) si

$$\forall \mathrm{V} \in \mathscr{V}_a,\ \mathrm{V} \cap \mathrm{D} \neq \varnothing$$

- Points adhérents à une boule ouverte ou fermée, un plan ouvert ou fermé.
- Poursuivre par le test (**13.2**).

2.2. Limite

Définition 13.3. Limite en un point adhérent

Soit $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ où $\mathrm{D} \subset \mathbb{R}^2$ et $a \in \mathbb{R}^2$ adhérent à D.

⇛ On dit que f admet une limite en a s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall \mathrm{V} \in \mathscr{V}_\ell,\ \exists \mathrm{U} \in \mathscr{V}_a,\ f(\mathrm{D} \cap \mathrm{U}) \subset \mathrm{V}$$

C'est-à-dire $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{B}(a, \alpha),\ \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$.

Ceci équivaut également à $\forall \varepsilon > 0,\ \exists \alpha > 0,\ \forall x \in \mathrm{D},\ \|x - a\| < \alpha \implies \left|f(x) - \ell\right| < \varepsilon$.

⇛ En cas d'existence, la limite est unique et l'on note $\ell = \lim\limits_{x \to a} f(x)$ ou encore $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} \ell$.

Les opérations sur les limites (sommes et produits) s'étendent naturellement à ce cadre avec des démonstrations analogues à celles données dans les chapitre d'analyse à une variable réelle.

3. Fonctions continues

Définition 13.3. Continuité ponctuelle et globale

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{D}$.

⇛ On dit que la fonction f est continue en a si $f(x) \xrightarrow[x \to a]{} f(a)$, c'est-à-dire

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{B}(a, \eta),\ \left|f(x) - f(a)\right| < \varepsilon$$

⇛ On dit que f est continue si elle est continue en tout point de D.

- On démontre facilement que des sommes, des produits et des quotients (lorsqu'ils sont définis) de fonctions continues sont continues. De même, si $\gamma : \mathrm{I} \to \mathrm{D}$ est continue (I est un intervalle de $\mathbb{R}$), alors $f \circ \gamma$ est continue.

Attention, la continuité de f n'est pas équivalente à celles de ses applications partielles.

- Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^2$ non vide, $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue en $a := (a_1, a_2)$.
  - ✔ Les applications $f_1 : x \mapsto f(x, a_2)$ et $f_2 : y \mapsto f(a_1, y)$ sont respectivement définies au voisinage de a_1 et a_2, et continues en ces points. En effet, on a $f_1 = f \circ \gamma_1$ et $f_2 = f \circ \gamma_2$ où

$$\gamma_1 : x \mapsto (x, a_2) \quad \text{et} \quad \gamma_1 : y \mapsto (a_1, y) \quad \text{sont continues en } a_1 \text{ et } a_2$$

- ✔ La réciproque est fausse. Considérons $f(x,y) := \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \neq (0,0)$ et $f(0,0) := 0$.
  - ✦ Soit $\theta_0 \in \mathbb{R}$ et $\gamma : t \longmapsto \big(t\cos\theta_0, t\sin\theta_0\big)$. On a $\forall t \in \mathbb{R}^*$, $(f\circ\gamma)(t) = \dfrac{\sin 2\theta_0}{2}\cdot$
  - ✦ Comme $\gamma(t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0)$, on en déduit que f n'est pas continue en $(0,0)$. En effet, si c'était le cas, on aurait par continuité de $f\circ\gamma$ que
  $$(f\circ\gamma)(t) \xrightarrow[t\to 0]{} (0,0) \quad \text{ce qui contredit le calcul précédent}$$
- ✔ Moralité : quand on fait tendre (x,y) vers $(0,0)$, *il faut considérer toutes les directions*, pas seulement celles parallèles aux axes !

Proposition 13.3.

Soit D une partie de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$, I un intervalle contenant $f(\mathrm{D})$ et $\theta : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Si f est continue en $a \in \mathrm{D}$ et θ est continue en $f(a)$, alors la composée $\theta\circ f$ est continue en a.

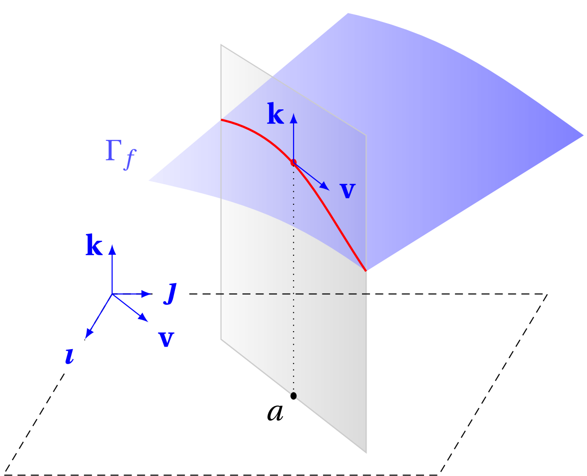
Le lecteur abordera avec profit le test (↯ **13.3**).

4. Généralisation de la dérivée

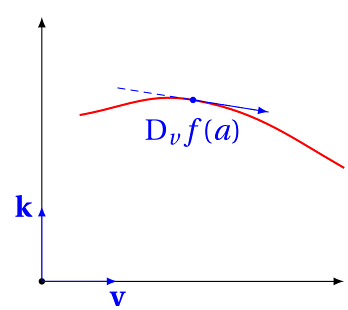
Dans toute cette section, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

4.1. Dérivée selon un vecteur

Afin de *comprendre* le graphe de f au voisinage du point $\big(a, f(a)\big)$, une idée naturelle est de se ramener à une seule variable en considérant l'intersection de D avec un plan vertical passant par ce point :



Un tel plan est entièrement défini par la donnée d'un vecteur non nul v de $\mathbb{R}^2$: en somme, on s'intéresse aux variations de f dans la direction v.



La courbe définie par $t \longmapsto f(a+tv)$ est tracée dans ce plan vertical ; lorsque cette fonction est dérivable en 0, sa dérivée en 0 est donc le vecteur vitesse à l'instant où la courbe passe par le point $\big(a, f(a)\big)$. Celui-ci dirige donc la tangente à cette courbe en ce point s'il est non nul.

Définition 13.4. Dérivée selon (ou suivant) un vecteur

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$, $a \in \Omega$ et $v \in \mathbb{R}^2$.

- L'application $f_v : t \mapsto f(a+tv)$ est définie au voisinage de 0.
- On dit que f admet une dérivée en a selon v si f_v est dérivable en 0.
- On note alors $\mathrm{D}_v f(a) := f_v'(0)$ cette dérivée, et on l'appelle dérivée de f en a selon (ou suivant) le vecteur v.

4.2. Dérivées partielles et gradient

Dans toute cette section, nous noterons (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{R}^2$

Définition 13.5. Dérivées partielles

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $a = (a_1, a_2) \in \Omega$. On dit que f admet en a :

- une première dérivée partielle si f admet une dérivée en a selon e_1 (notée $\partial_1 f(a) := \mathrm{D}_{e_1} f(a)$).
- une seconde dérivée partielle si f admet une dérivée en a selon e_2 (notée $\partial_2 f(a) := \mathrm{D}_{e_2} f(a)$).

Pour une fonction $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$, on note plutôt :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) := \partial_1 f(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a) := \partial_2 f(a)$$

Cette notation est potentiellement ambigüe, car les variables apparaissant dans f sont en fait des variables muettes, mais elle ne pose guère de problème à l'usage.

Calcul d'une dérivée partielle

Par exemple, pour le calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}$, le principe est simple :

- On s'intéresse à f_{e_1} (appelée première application partielle de f en a) :

$$\begin{array}{rcl} f_{e_1} : \ ]-r, r[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(a+te_1) = f(a_1+t, a_2) \end{array}$$ où r est un réel strictement positif tel que $\mathrm{B}(a, r) \subset \Omega$

- On calcule sous réserve d'existence sa dérivée en 0, ce qui équivaut à dériver $x \mapsto f(x, a_2)$ en a_1.
- Ainsi, pour calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2)$, on « fige » la seconde variable à a_2 et on dérive par rapport à x.

Cette méthode s'adapte sans peine au cas de $\frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2)$.

✘ Considérons la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + xy + y^2$. Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, f admet des dérivées partielles en (x, y) et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x + y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x + 2y$$

✘ Exemple de $f : \mathrm{H} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto x^y$ où $\mathrm{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 ; x > 0\}$. De même,

$$\forall (x,y) \in \mathrm{H}\ ,\ \mathrm{H}(x,y) = e^{y \ln x}\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y}{x} e^{y \ln x} = y x^{y-1} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = (\ln x) e^{y \ln x} = (\ln x) x^y$$

Proposition 13.6. Opérations sur les dérivées partielles

Soit $a \in \Omega$ et f, g deux fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en a et $\lambda \in \mathbb{R}$. Les fonctions $f + \lambda g$ et fg admettent aussi des dérivées partielles en a et

$$\frac{\partial (f + \lambda g)}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a) + \lambda \frac{\partial g}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial (fg)}{\partial x}(a) = f(a) \frac{\partial g}{\partial x}(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a) g(a)$$

et de même avec les secondes dérivées partielles.

L'existence de dérivées partielles en a n'implique pas la continuité en a.

✘ Contre-exemple : $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$

- ✔ On a vu précédemment que f n'est pas continue à l'origine.
- ✔ Notons $f_1 : x \mapsto f(x,0)$ et $f_2 : y \mapsto f(0,y)$. Comme f_1 et f_2 sont nulles, elles sont dérivables en 0, ainsi f admet des dérivées partielles à l'origine et

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0$$

Proposition 13.7. Composition à gauche par une fonction dérivable

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en $a \in \Omega$, I un intervalle contenant $f(\Omega)$ et $\theta : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable en $f(a)$. Alors $\theta \circ f$ admet des dérivées partielles en a et :

$$\frac{\partial (\theta \circ f)}{\partial x}(a) = \theta'\big(f(a)\big) \frac{\partial f}{\partial x}(a) \quad \text{et} \quad \frac{\partial (\theta \circ f)}{\partial y}(a) = \theta'\big(f(a)\big) \frac{\partial f}{\partial y}(a)$$

En utilisant pour θ la fonction inverse, on obtient par exemple que l'inverse d'une fonction qui ne s'annule pas sur Ω et admet des dérivées partielles en a, admet des dérivées partielles en a. On en déduit un résultat analogue pour un quotient $\frac{f}{g}$.

Définition 13.8. Gradient

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ admettant en $a \in \Omega$ des dérivées partielles. On pose $\nabla f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$.

Ce vecteur est appelé gradient de f en a.

✘ Cas d'une fonction affine $f : (x,y) \mapsto \alpha x + \beta y + \gamma$ où $(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3$. On a que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \alpha \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \beta \quad \text{et} \quad \nabla f(x,y) = \binom{\alpha}{\beta}$$

✗ Soit $g : (x, y) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$.

- ✔ On a que g admet des dérivées partielles en tout point (x, y) de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ d'après les opérations usuelles sur les fonctions dérivables d'une variable réelle et

$$\forall (x, y) \neq (0,0)\ ,\ \frac{\partial g}{\partial x}(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad , \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad \nabla g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \binom{x}{y}$$

- ✔ La fonction g n'admet pas de dérivées partielles à l'origine car les deux fonctions

$$g_1 : x \mapsto g(x, 0) = |x| \quad \text{et} \quad g_2 : y \mapsto g(0, y) = |y|$$

ne sont pas dérivables en 0.

5. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Dans toute cette section, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

5.1. Définition et premières propriétés

Définition 13.9. Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathscr{C}^1$ si :

⇛ elle admet des dérivées partielles en tout point de U ;

⇛ les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur Ω.

On note $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur Ω.

✗ Les fonctions f et g de l'exemple précédent sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur respectivement $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Proposition 13.9.

Soit $(f, g) \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})^2$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.

a. La combinaison linéaire $f + \lambda g$ et le produit fg sont des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.

b. Si de plus g ne s'annule pas sur Ω, alors $\frac{1}{g}$ et $\frac{f}{g}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$.

On obtient ainsi que $\mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\Omega, \mathbb{R})$ stable par multiplication.

5.2. Développement limité à l'ordre un

La proposition suivante généralise la formule de Taylor à l'ordre un pour les fonctions d'une variable réelle dérivable en un point.

Proposition 13.10. Développement limité à l'ordre 1

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a := (a_1, a_2) \in \Omega$. Il existe alors une fonction $\varepsilon : \Omega \to \mathbb{R}$ telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$ et pour tout $x := (x_1, x_2) \in \Omega$:

$$f(x) = f(a) + (x_1 - a_1)\frac{\partial f}{\partial x}(a) + (x_2 - a_2)\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|x - a\|\,\varepsilon(x)$$

Ce qui s'écrit de façon équivalente : $f(x) = f(a) + \left\langle \nabla f(a), x - a \right\rangle + \|x - a\|\,\varepsilon(x)$

Comme les DL à l'ordre un s'interprètent en terme de tangente dans le cas d'une seule variable réelle, un DL à l'ordre un pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est lié à la notion de plan tangent.

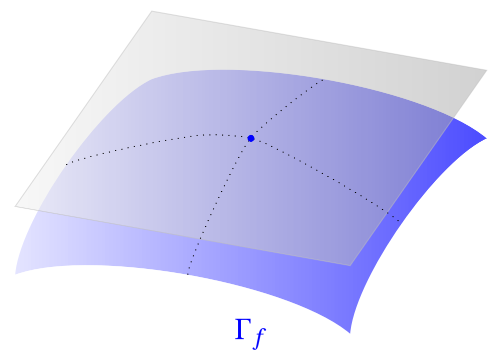
Le théorème précèdent affirme que la fonction affine :

$$(x, y) \longmapsto f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2)$$

approche au premier ordre la fonction f au voisinage de a. En particulier, le plan d'équation

$$z = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x - a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y - a_2)$$

qui est le graphe de cette fonction affine, est le plan tangent au graphe de f en a.



Réécriture du DL par changement de variable

En notant $\mathrm{U}_a = \{x - a \,;\, x \in \mathrm{U}\}$, on peut réécrire l'égalité de la proposition précédente sous la forme :

$$\forall h := (h_1, h_2) \in \mathrm{U}_a \quad f(a + h) = f(a) + h_1\frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2\frac{\partial f}{\partial y}(a) + \|h\|\,\varepsilon(h)$$

où $\varepsilon : \mathrm{U}_a \to \mathbb{R}$ est une fonction telle que $\varepsilon(u) \xrightarrow[u \to 0]{} 0$.

Corollaire 13.11.

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Alors f est continue.

Nous recommandons le test (ϟ **13.4**).

5.3. La règle de la chaîne

Dans tout ce paragraphe, I désigne un vrai intervalle de $\mathbb{R}$.

Après avoir étudier l'existence de dérivée partielles de $\theta \circ f$ pour $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $\theta : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ tel que $f(\Omega) \subset \mathrm{I}$, nous allons nous intéresser à la dérivabilité de $f \circ \gamma$ où γ est une fonction de I dans Ω.

Définition 13.12. Dérivée d'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^2$

Soit x, y deux fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$. On note $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$.

- On définit γ' par $\gamma' : t \mapsto \big(x'(t), y'(t)\big)$.
- Pour $t \in \mathrm{I}$, $\gamma'(t)$ est le vecteur vitesse à l'instant t du point dont la trajectoire est décrite par γ.

Proposition 13.13. Première règle de la chaîne

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $\big(x, y\big) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R})^2$ tels que $\gamma : t \mapsto \big(x(t), y(t)\big)$ soit à valeurs dans Ω.
Alors $\mathrm{F} : t \mapsto f\big(x(t), y(t)\big)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et l'on a, pour tout $t \in \mathrm{I}$:

$$\mathrm{F}'(t) = x'(t)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(t), y(t)\big) + y'(t)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(t), y(t)\big) = \big\langle \nabla f\big(\gamma(t)\big), \gamma'(t)\big\rangle$$

Voici deux illustrations classiques de la règle de la chaîne.

- Étude de $\mathrm{F} : t \mapsto f(\cos t, \sin t)$ pour $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ par la règle de la chaîne et

$$\begin{aligned}\forall t \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{F}'(t) &= \cos' t\,\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \sin' t\,\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t)\\ &= -\sin t\,\frac{\partial f}{\partial x}(\cos t, \sin t) + \cos t\,\frac{\partial f}{\partial y}(\cos t, \sin t)\end{aligned}$$

- Soit $f \in \mathscr{C}^1\big(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\big)$ une fonction telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x, y) = f(y, x)$. On obtient par la règle de la chaîne que

$$\frac{\partial f}{\partial x}\big(x, y\big) = \frac{\partial f}{\partial y}\big(y, x\big)$$

- Pour $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}^2$ et $a \in \Omega$, on a $\mathrm{D}_v f(a) = \big\langle \nabla f(a), v\big\rangle$. En effet, par la règle de la chaîne, la fonction $t \mapsto f(a + tv)$ admet pour dérivée en 0

$$\big\langle \nabla f\big(\gamma(0)\big), \gamma'(0)\big\rangle = \big\langle \nabla f(a), v\big\rangle$$

où $\gamma : t \mapsto a + tv$.

Proposition 13.14. Deuxième règle de la chaîne

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $(x, y) \in \mathscr{C}^1(\mathrm{U}, \mathbb{R})^2$ un couple de fonctions tel que l'application $(u, v) \mapsto \big(x(u, v), y(u, v)\big)$ soit à valeurs dans Ω. Alors l'application composée $\mathrm{F} : (u, v) \mapsto f\big(x(u, v), y(u, v)\big)$ définie sur U est de classe $\mathscr{C}^1$ et vérifie pour tout $(u, v) \in \mathrm{U}$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial u}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big) + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u, v), y(u, v)\big)\\ \frac{\partial \mathrm{F}}{\partial v}(u, v) &= \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial x}\big(x(u, v), y(u, v)\big) + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\frac{\partial f}{\partial y}\big(x(u, v), y(u, v)\big)\end{aligned}$$

On écrira de façon plus condensée :

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial f}{\partial y}$$

En manipulant cette écriture abusive mais universellement utilisée, il faut avoir conscience de l'omission des variables (u, v) et de la composée par $(u, v) \mapsto \big(x(u, v), y(u, v)\big)$: on perd en précision (ce qui nécessite d'être vigilent) mais on y voit incontestablement plus clair.

- Soit $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ et $F : (u, v) \mapsto f\left(u + uv, u - uv^2\right)$.
  - Comme $(u, v) \mapsto u + uv$ et $(u, v) \mapsto u - uv^2$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, F admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ et

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial u}(u, v) = (1 + v)\dfrac{\partial f}{\partial x}(u + uv, u - uv^2) + (1 - v^2)\dfrac{\partial f}{\partial y}(u + uv, u - uv^2) \\[2ex] \dfrac{\partial F}{\partial v}(u, v) = u\dfrac{\partial f}{\partial x}(u + uv, u - uv^2) - 2uv\dfrac{\partial f}{\partial y}(u + uv, u - uv^2) \end{cases}$$

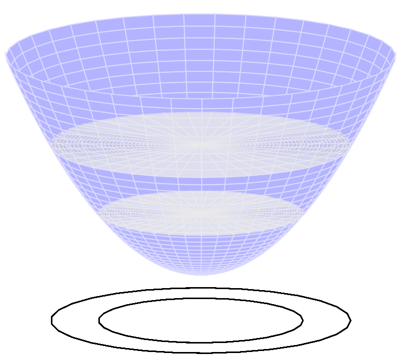
- Poursuivre par le test (↯ **13.5**).

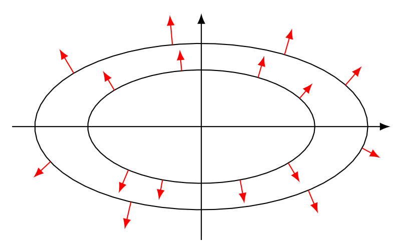
5.4. Application aux lignes de niveau

On appelle ligne de niveau d'une fonction $f = \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ toute partie de $\mathbb{R}^2$ d'équation $f(x, y) = c$.

- Lignes de niveau de la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont le singleton $\{(0, 0)\}$ et tous les cercles centrés à l'origine.

Supposons que f soit de classe $\mathscr{C}^1$. Si la fonction γ paramètre une ligne de niveau, c'est-à-dire si la composée $F := f \circ \gamma$ est constante, on obtient l'égalité $\langle \nabla f(\gamma(t)), \gamma'(t)\rangle = 0$, c'est-à-dire que le gradient $\nabla f(\gamma(t))$ est orthogonal au vecteur vitesse $\gamma'(t)$ qui dirige la tangente au point $\gamma(t)$ de la ligne de niveau.





Dans le cas général, on a $F'(t) = \left\langle \nabla f\left(\gamma(t)\right), \gamma'(t)\right\rangle$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$\left|F'(t)\right| \leqslant \left\|\nabla f\left(\gamma(t)\right)\right\| \left\|\gamma'(t)\right\| \ (\star)$$

On sait que $(\star)$ est une égalité *si et seulement si* les vecteurs $\nabla f\left(\gamma(t)\right)$ et $\gamma'(t)$ sont colinéaires (cf. le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz). Ainsi, f « varie le plus » dans la direction du gradient (le plus dans le cas croissant si on se déplace dans le sens du gradient, le plus dans le sens décroissant si on se déplace dans le sens opposé au gradient).
Le lecteur pourra s'exercer au moyen du test (↯ **13.6**).

6. Extrema

Dans toute cette section, Ω désigne un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$.

Définition 13.15. Extremum local ou global

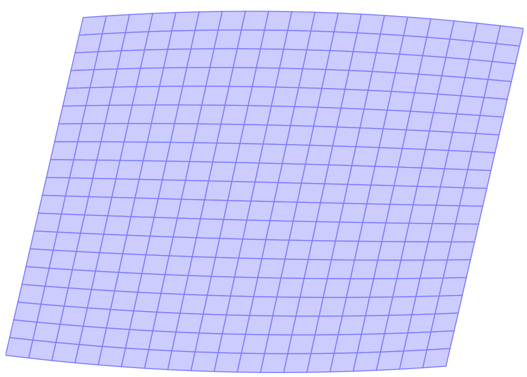
Soit D une partie non vide de $\mathbb{R}^2$, $f : \mathrm{D} \to \mathbb{R}$ une fonction et $a \in \mathrm{X}$.

- On dit que f admet un maximum en a si $\forall x \in \mathrm{D} \quad f(x) \leqslant f(a)$.
- On dit que f admet un maximum local en a si :

$$\exists \eta > 0 \quad \forall x \in \mathrm{D} \cap \mathrm{B}(a, \eta) \quad f(x) \leqslant f(a)$$

- On définit de même les notions de minimum et de minimum local.
- On dit que f admet un extremum en a si f admet un maximum ou un minimum en a. On définit de même la notion d'extremum local.

Afin de les distinguer des extrema locaux, les extrema sont parfois qualifiés de globaux.



La fonction dont le graphe est tracé ci-contre

$$f : \begin{array}{ccc} [-\pi, \pi]^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & \cos(x)\cos(2x)\sin(y) \end{array}$$

admet des maxima (certains seulement locaux et d'autres globaux) et des minima (idem).

Définition 13.16. Point critique

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$. On dit que a est un point critique pour f si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a) = \dfrac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$.

Autrement dit, le point a est critique *si et seulement si* $\nabla f(a) = 0$.

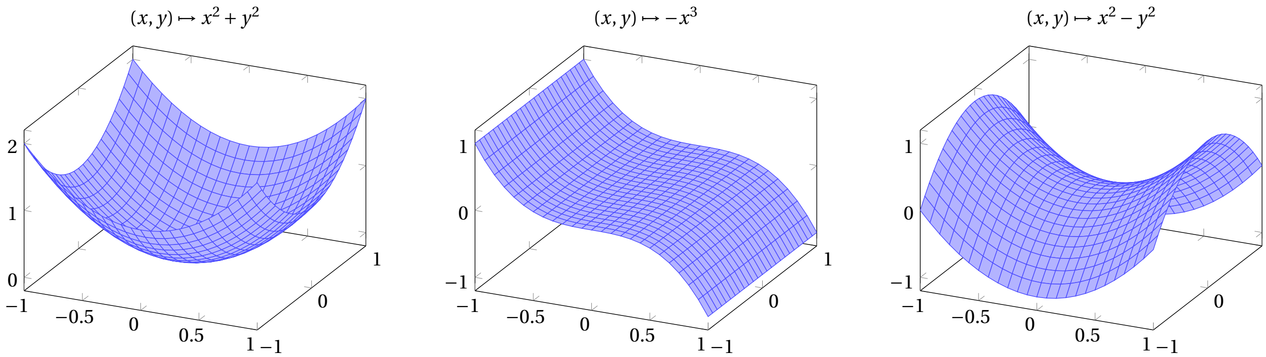
Proposition 13.17. Condition nécessaire d'extremum

Soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $a \in \Omega$. Si f admet un extremum local en a, alors a est un point critique de f.

- Ce résultat généralise la condition nécessaire d'extremum local en un point intérieur pour les fonctions d'une seule variable réelle.
  - On voit que, même si le théorème est énoncé dans le cadre d'une fonction globalement de classe $\mathscr{C}^1$, la démonstration n'utilise en fait que l'existence des dérivées partielles en a.

- ✔ Le théorème concernant les fonctions d'une seule variable exigeait que l'extremum local soit atteint en un point de l'intérieur de l'intervalle. Dans le théorème précédent, cette hypothèse est rendue superflue par le fait que Ω soit un ouvert de $\mathbb{R}^2$: le point a est pour ainsi dire automatiquement dans son intérieur.

✘ Comme dans le cas des fonctions d'une variable, la réciproque est fausse. Une fonction n'admet pas nécessairement d'extremum local en chacun de ses points critiques. Étude du point critique $(0,0)$ pour les fonctions ci-dessous.



Étude des extrema d'une fonction

Soit $f\in\mathscr{C}^1(\Omega,\mathbb{R})$. Pour étudier les extrema (locaux ou globaux) de f :

- ⇛ on trouve ses points critiques en résolvant les équations $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a)=\dfrac{\partial f}{\partial y}(a)=0$;
- ⇛ pour chaque point critique $a:=(a_1,a_2)$, on cherche à déterminer (soit au voisinage de a, soit globalement) le signe de $f(x,y)-f(a_1,a_2)$.

✘ Étudions des extrema des fonctions $f_\lambda:(x,y)\mapsto x^2+\lambda xy+y^2+1$ pour $\lambda\in\mathbb{R}$.

- ✔ Soit (x,y) un point où f admet un extremum. Comme f_λ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$, (x,y) est nécessairement un point critique de f d'où

$$\frac{\partial f_\lambda}{\partial x}(x,y)=\frac{\partial f_\lambda}{\partial y}(x,y)=0\text{ , i.e. }\ 2x+\lambda y=2y+\lambda x=0$$

- ✔ La matrice $\mathrm{A}:=\left(\begin{smallmatrix}2&\lambda\\ \lambda&2\end{smallmatrix}\right)$ a pour déterminant $4-\lambda^2$.
- ✔ Cas 1 : $\lambda\notin\{-2,2\}$. Le seul point critique possible est $(0,0)$. On a

$$f_\lambda(x,y)-f_\lambda(0,0)=x^2+\lambda xy+y^2=\left(x+\frac{\lambda}{2}y\right)^2+\left(1-\frac{\lambda^2}{4}\right)y^2$$

  - Cas 1.1 : $|\lambda|<4$. On a $f_\lambda(x,y)-f_\lambda(0,0)\geqslant 0$ pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a un minimum global.
  - Cas 1.2 : $|\lambda|>4$. On a affaire à un point selle car

$$\forall t\in\mathbb{R}^2,\ f_\lambda(t,0)-f_\lambda(0,0)>0\quad\text{et}\quad f_\lambda(-\lambda t,2t)-f_\lambda(0,0)<0$$

- ✔ Cas 2 : $\lambda=\pm 2$. On alors une infinité de points critiques définie par l'équation $x\pm y=0$. On a

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ,\ f_\lambda(x,y)-f_\lambda(0,0)=x^2+\pm 2xy+y^2=(x\pm y)^2\geqslant 0$$

Tous les points critiques correspondent à des minima.

7. Énoncés des tests

13.1.

Tracer la surface d'équation $z = 2x^2$.

13.2.

Que dire d'une partie de $\mathbb{R}^2$ qui est un voisinage de chacun de ses points ?

13.3.

Étudier la continuité de la fonction f définie par $f(0,0) := 0$ et $f(x,y) := \frac{xy^2}{x^2+y^2}$ pour $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

13.4.

Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$. Déterminer un vecteur normal au plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $a := (a_1, a_2)$.

13.5.

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On note $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $g(r,\theta) := f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ pour tout $(r,\theta) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^1$ et exprimer les dérivées partielles de g en fonction de celles de f.

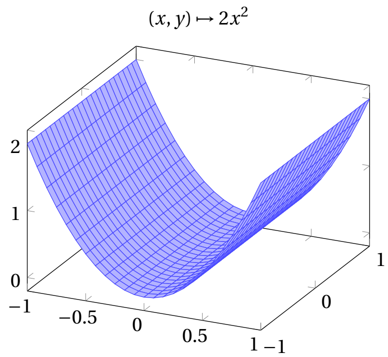
13.6.

Considérons $a \in \mathbb{R}^2$ et $\phi : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto \langle a, x\rangle$ (produit scalaire canonique). Calculer $\nabla\phi(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^2$. Interpréter ce résultat en terme de lignes de niveau de ϕ.

8. Solutions des tests

13.1.

Dans le plan (Oxz), la courbe d'équation $z = x^2$ est une parabole d'axe (Oz) facile à esquisser. On en déduit l'allure de la surface :



13.2.

Par les définitions, on a clairement qu'une partie de $\mathbb{R}^2$ est un ouvert *si et seulement si* c'est voisinage de chacun de ses points.

13.3.

La fonction f est continue en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ en tant que quotient de deux fonctions continue (le dénominateur ne s'y annulant pas). De plus, $\left|f(x,y)\right| \leqslant |x|$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $|x| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$, on déduit du théorème d'encadrement que $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0 = f(0,0)$. Ainsi f est continue en $(0,0)$.

13.4.

Comme l'équation de ce plan tangent est

$$f(a) + \frac{\partial f}{\partial x}(a)(x-a_1) + \frac{\partial f}{\partial y}(a)(y-a_2) - z = 0$$

le vecteur $\mathbf{n}\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \\ -1 \end{bmatrix}$ est normal à ce plan.

13.5.

Comme $(r,\theta) \mapsto r\cos\theta$ et $(r,\theta) \mapsto r\sin\theta$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$, on déduit de la second règle de la chaîne que g l'est aussi avec :

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \cos\theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta \frac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

13.6.

Notons $a = (a_1, a_2)^\perp$ et $x := (x_1, x_2)^\perp$. On a $\phi(x) = a_1 x_1 = a_2 x_2$ d'où ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ et $\nabla(x) = \left[\begin{smallmatrix} a_1 \\ a_2 \end{smallmatrix}\right] = a$. Comme les lignes de niveau de ϕ sont les droites affines d'équations $\langle x, a\rangle = k$ (où k est une constante réelle), on retrouve bien que a est orthogonal à ces droites.