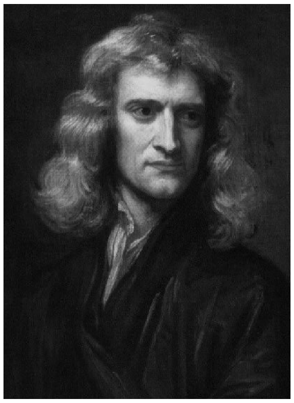
AN 6 | Fonctions dérivables

Après l'étude des fonctions continues, nous allons nous intéresser aux fonctions admettant un graphe lisse, i.e. admettant une tangente en chacun de ses points.

La vision de Saint Jean, Le Greco

Le *calcul différentiel et intégral*, dont seul l'aspect *différentiel* nous concerne dans ce chapitre, est né des travaux indépendants de Gottfried Wilhelm Leibniz et Isaac Newton au XVIIe siècle. La revendication de la paternité de cette nouvelle théorie fut l'objet de vives polémiques entre les deux hommes et cette controverse affecta beaucoup Leibniz sur la fin de sa vie. Entre 1664 et 1671, Newton travaille sur son ouvrage *Methodus fluxionum et serierum infiniturum* qui ne sera publié qu'après sa mort en 1736[1]. Il y introduit ce qu'il appelle le *calcul des fluxions* :



Isaac Newton (1642-1727)

« *J'appellerai quantités fluentes, ou simplement fluentes, ces quantités que je considère comme augmentées graduellement et indéfiniment, je les représenterai par les dernières lettres de l'alphabet* v, x, y *et* z *pour les distinguer des autres quantités qui, dans les équations, sont considérées comme connues et déterminées, qu'on représente par les lettres initiales* a, b, c*, etc., je représenterai par les mêmes dernières lettres surmontées d'un point* $\dot{v}, \dot{x}, \dots, \dot{y}$ *et* $\dot{z}$ *les vitesses dont les fluentes sont augmentées par le mouvement qui les produit, et, que par conséquent, on peut appeler fluxions...* »

Ainsi pour Newton les *quantités fluentes* x, y sont des fonctions soumises à des variations, à des changements, et les *fluxions* $\dot{x}, \dots, \dot{y}$ de ces *fluentes* mesurent leurs variations.

Il s'intéresse un peu plus loin dans l'ouvrage au problème inverse de la détermination des fluentes x, y, etc. à partir de la connaissance des fluxions $\dot{x}, \dot{y}$, etc. C'est le problème *réciproque* du calcul différentiel, à savoir le calcul intégral que nous avons mentionné ci-dessus et que nous aborderons dans un chapitre ultérieur. Leibniz publie pour la première fois ses travaux sur le calcul différentiel en 1684, dans les *Acta eruditorum*. Cependant, de nombreuses notes manuscrites produites sur les dix années antérieures contiennent déjà ses idées sur la question. Le point de départ de Leibniz sur ce sujet est plutôt celui des séries de nombres, pour lesquelles il calcule les différences des termes successifs qu'il va sommer. Cette idée présente dans son *De arte combinatoria* de 1666 repose sur sa vision philosophique du monde qui consiste à vouloir relier le *tout* et la *partie*[2]. Par exemple la série de nombres $1, 5, 9, 15, 22, 30$ donne lieu aux différences de termes successifs $4, 4, 6, 7, 8$ dont la somme $4+4+6+7+8 = 29$ est évidemment la différence entre le dernier et le premier terme de la série initiale, à savoir $30 - 1$. À partir de cette idée qu'il étendit aux séries infinies de nombres, puis au « cas d'une variable continue », il obtint son calcul différentiel et intégral.

La relation $4+4+6+7+8 = 30-1$ n'est autre qu'une version *discrète* et finie du théorème fondamental du calcul intégral. Ce théorème relie dérivées et intégrales, c'est-à-dire *différences infinitésimales* et *sommation de toutes ces différences* par l'expression

$$f(b) - f(a) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

C'est également Leibniz qui introduisit en particulier les notations $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, $\mathrm{d}x$ et $\mathrm{d}y$, très intuitives et très utilisées par les physiciens.

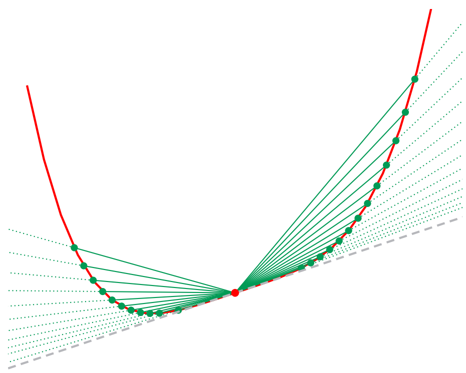
Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

1. C'est dans l'ouvrage *Philosophiae naturalis principia mathematica* que Newton publiera en 1687 sa théorie du calcul différentiel et intégral.
2. Qu'il expose dans sa fameuse *Monadologie* (1714).
2. En latin *Summa omnium* qui donna le symbole $\int$ ($\int umma$).

1. Dérivabilité : le point de vue local

La dérivabilité est une propriété locale, i.e. $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est dérivable en a *si et seulement si* il existe un voisinage U de a tel que $f|_{\mathrm{U}\cap\mathrm{I}}$ est dérivable en a.

1.1. Dérivabilité ponctuelle



D'un point de vue heuristique, une fonction est dérivable en x_0 *si et seulement si* son graphe est lisse en ce point, i.e. approchable par une droite qu'on qualifiera de tangente.

La pente de cette tangente est intuitivement la limite quand x tend vers x_0 de la pente de la corde joignant les points d'abscisses x_0 et x.

Définition 6.0. Dérivabilité en un point

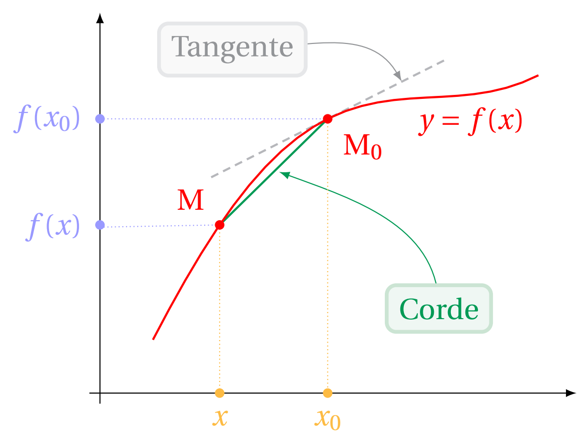
Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un vrai intervalle I de $\mathbb{R}$ et $x_0 \in \mathrm{I}$.

⇛ Dérivabilité ponctuelle : On dit que f est dérivable en x_0 lorsque le taux d'accroissement de f en x_0, noté $\tau_{x_0} f$ et défini par

$$\begin{array}{rccl} \tau_{x_0} f : & \mathrm{I} \setminus \{x_0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \end{array}$$

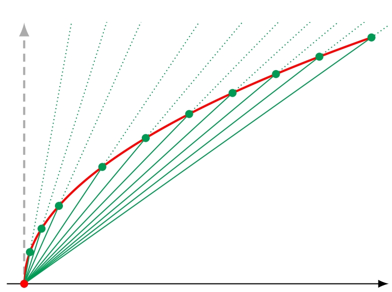
admet une limite réelle quand x tend vers x_0. Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en x_0 et on le note $f'(x_0)$.

⇛ Dérivabilité globale : si f est dérivable en tout x_0 dans I, on note $f' : \mathrm{I} \to \mathbb{R},\ x_0 \mapsto f'(x_0)$. Cette fonction est appelée dérivée de f.



Soit $x_0 \in \mathrm{I}$ en lequel f est dérivable ; la tangente au point $\mathrm{M}_0\big(x_0, f(x_0)\big)$ au graphe de f est par définition la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$



Définition 6.1. Tangente verticale

On reprend les notations de la définition précédente. Lorsque

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \right| \xrightarrow[x \to x_0]{} +\infty$$

on dit que le graphe de f pour tangente en x_0 la droite d'équation $x = x_0$. Cette tangente est dite verticale.

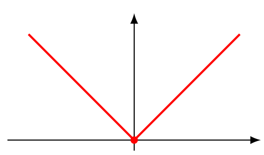
Nous allons illustrer cette définition au moyen de la fonction racine carrée. Soit $x_0 \in \mathbb{R}_+$ et $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{x_0\}$. Par opérations sur les limites, on a :

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x_0}}{x-x_0} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x_0}} \xrightarrow[x\to x_0]{} \begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} & \text{si } x_0 > 0 \\ +\infty & \text{si } x_0 = 0 \end{cases}$$

La limite $\sqrt{x} \xrightarrow[x\to x_0]{} \sqrt{x_0}$ est justifiée par la continuité de $x \mapsto \sqrt{x}$ en x_0 (cf. le chapitre AN 3). La fonction racine carrée n'est pas dérivable en 0 (mais admet sa courbe représentative admet une tangente verticale en ce point) et dérivable en tout point x de $\mathbb{R}_+^*$ avec une dérivée qui vaut $\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Proposition 6.2. Dérivabilité et continuité

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec I vrai intervalle de $\mathbb{R}$. Si f est dérivable en x_0, alors f est continue en x_0.



La réciproque est bien-sûr fausse, comme l'illustre la valeur absolue en 0 :

$$\frac{|x|-|0|}{x-0} = \frac{|x|}{x} = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

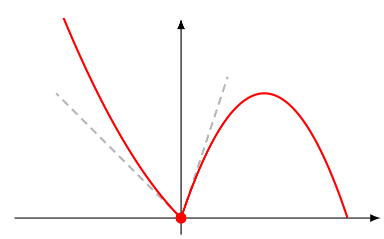
Définition 6.3. Dérivabilité à gauche, à droite

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur de I. La fonction f est dite :

- dérivable à gauche au point x_0 si le taux d'accroissement de f en a admet une limite à gauche en x_0. Dans ce cas, cette limite est notée $f'_g(x_0)$, dérivée à gauche de f en x_0.
- dérivable à droite au point x_0 si le taux d'accroissement de f en x_0 admet une limite à droite en x_0. Dans ce cas, cette limite est notée $f'_d(x_0)$, dérivée à droite de f en x_0.

La dérivabilité à gauche en un point x_0 s'interprète comme l'existence d'une *demi-tangente* à gauche au graphe de f en x_0, la droite d'équation

$$y = f(x_0) + f'_g(x_0)(x-x_0)$$



De même à droite.

Comme la continuité, la dérivabilité admet une caractérisation au moyen des limites latérales.

Proposition 6.4. Dérivabilité et dérivées latérales

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ avec I vrai intervalle de $\mathbb{R}$ et x_0 un point intérieur de I. La fonction f est dérivable en x_0 si et seulement si elle est dérivable à gauche et à droite en x_0 et $f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$. En cas de dérivabilité, on a $f'(x_0) = f'_g(x_0) = f'_d(x_0)$.

1.2. Opérations sur fonctions dérivables

Comme dans le cas des limites et des fonctions continues, les théorèmes opératoires nous offrent des moyens très efficaces de démontrer la dérivabilité et de calculer des dérivées. Les cas « rebels » nécessiteront un retour à la définition via le taux d'accroissement.

Proposition 6.5. Sommes, produits et quotients

Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ des fonctions dérivables en $x_0 \in \mathrm{I}$.

a. Les fonctions $u+v$ et uv sont dérivables en x_0 avec

$$(u+v)'(x_0) = u'(x_0) + v'(x_0) \quad \text{et} \quad (uv)'(x_0) = u(x_0)\,v'(x_0) + u'(x_0)\,v(x_0)$$

b. Si $v(x_0) \neq 0$, alors $\dfrac{1}{v}$ et $\dfrac{u}{v}$ sont définies au voisinage de x_0 et sont dérivables en ce point avec

$$\left(\frac{1}{v}\right)'(x_0) = -\frac{v'(x_0)}{v(x_0)^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{u}{v}\right)'(x_0) = \frac{v(x_0)\,u'(x_0) - v'(x_0)\,u(x_0)}{v(x_0)^2}$$

Ces calculs s'étendent par récurrence à un nombre fini quelconque de fonctions. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et f_1, …, f_n des fonctions dérivables de I dans $\mathbb{R}$, la somme et le produit des f_i sont dérivables et

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f_i' \quad \text{et} \quad \left(\prod_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} \left(f_i' \prod_{j \in [\![1,n]\!] \setminus \{i\}} f_j\right)$$

Les conditions énoncés dans cette proposition sont suffisantes mais nullement nécessaires : par exemple la somme de deux fonctions non dérivables peut être dérivable, la fonction $f : x \mapsto |x|$ est non dérivable en 0, son opposé non plus mais la somme des deux est nulle donc dérivable.

Proposition 6.6. Composées

Soit I et J deux vrais intervalles de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$, $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ des fonctions respectivement dérivables en x_0 et $u(x_0)$ telles que $u(\mathrm{I}) \subset \mathrm{J}$. La fonction $v \circ u$ est dérivable en x_0 et

$$(v \circ u)'(x_0) = u'(x_0) \times v'\big(u(x_0)\big)$$

Nous citerons deux cas très usuels : si $u > 0$, alors u^α est dérivable $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ et $(u^\alpha)' = \alpha u' u^{\alpha-1}$. En effet, $u^\alpha = v \circ u$ où $v : x \mapsto x^\alpha$, définie sur $\mathbb{R}_+^*$. Si u est une fonction dérivable ne s'annulant pas, alors $\ln|u|$ est dérivable et

$$\big(\ln|u|\big)' = \frac{u'}{u} \quad \text{(expression appelée dérivée logarithmique de } u\text{)}$$

Le dernier résultat « opératoire » porte sur la réciproque d'une bijection dérivable.

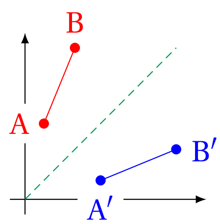
Proposition 6.7. Dérivabilité d'une fonction réciproque[3]

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathrm{J}$ une bijection entre deux vrais intervalles de $\mathbb{R}$, dérivable sur I. Soit $y \in \mathrm{J}$ et $x = f^{-1}(y)$.

a. f^{-1} est dérivable en y si et seulement si $f'\big(f^{-1}(y)\big) \neq 0$ et dans ce cas $\big(f^{-1}\big)'(y) = \dfrac{1}{f'\big(f^{-1}(y)\big)}$.

b. Lorsque $f'\big(f^{-1}(y)\big) = 0$, le graphe de la fonction f^{-1} admet en y une tangente verticale.

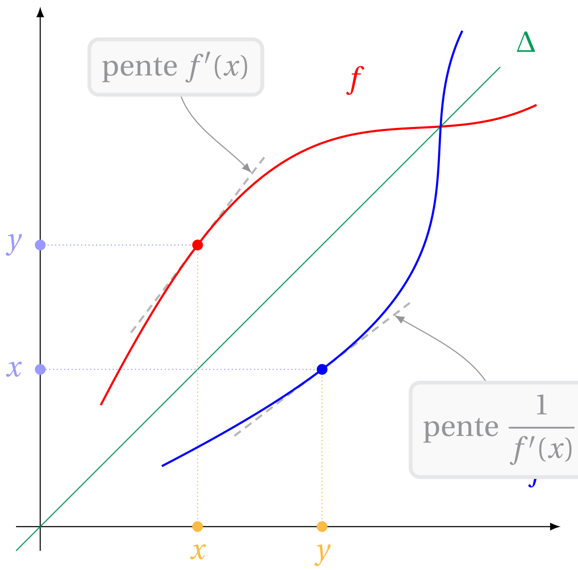
3. On notera que si la continuité de la fonction réciproque f^{-1} est acquise, sa dérivabilité n'est pas automatique et nécessite une petite discussion.

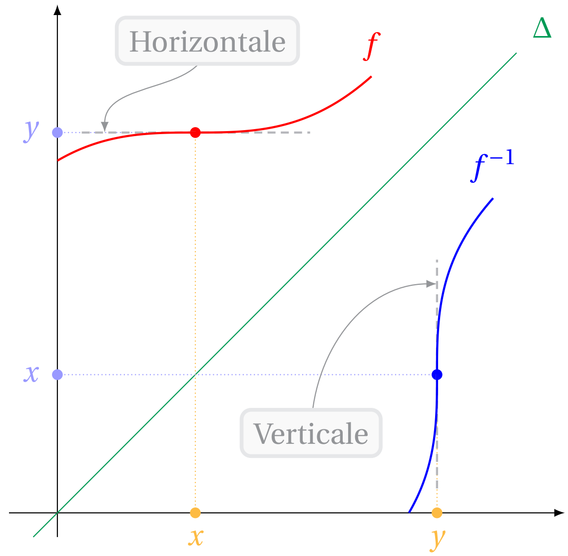


Cette proposition est une évidence géométrique : l'image d'une droite *non horizontale* (resp. horizontale) de pente p par la réflexion d'axe Δ, première bissectrice du repère, est une droite de pente $\frac{1}{p}$ (resp. verticale). En effet,

$$p = \frac{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}}{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}} \quad \text{et} \quad \frac{y_{\mathrm{B}'} - y_{\mathrm{A}'}}{x_{\mathrm{B}'} - x_{\mathrm{A}'}} = \frac{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}{y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{p} \quad \text{car} \quad \begin{cases} x_{\mathrm{A}'} = y_{\mathrm{A}}\,,\ y_{\mathrm{A}'} = x_{\mathrm{A}} \\ x_{\mathrm{B}'} = y_{\mathrm{B}}\,,\ y_{\mathrm{B}'} = x_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

On conclut en remarquant que les tangentes à la courbe de f en x (de pente $f'(x)$) et à la courbe de f^{-1} en $f(x)$ sont symétriques par rapport à Δ.





Illustrons ce théorème avec la fonction racine carrée, bijection réciproque de $f : x \mapsto x^2$ définie de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour $y \in \mathbb{R}_+$, $f'\big(f^{-1}(y)\big) = 2\sqrt{y}$. Ainsi, f^{-1} est non dérivable en 0 (sa courbe admettant en ce point une tangente verticale) et dérivable en tout $y > 0$ avec

$$\big(f^{-1}\big)'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$$

1.3. Quelques études de dérivabilité

Voici quelques pistes pour étudier la dérivabilité d'une fonction en un point x_0.

Prouver la dérivabilité d'une fonction en un point

Pour étudier la dérivabilité d'une fonction f en un point x_0 :

⇛ On commence par étudier si un théorème sur les opérations est applicable.

⇛ Si ce n'est pas le cas, on pose $x = x_0 + u$ et on étudie la FI $\dfrac{f(x_0+u) - f(x_0)}{u}$ pour $u \to 0$.

Ce changement de variable ramène le problème à une limite en zéro, ce qui est plus clair.

Application des théorèmes opératoires.

Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f : t \mapsto \frac{t}{\left(t^2+1\right)^n}$$

est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit des fonctions dérivables $t \mapsto t$ et $t \mapsto \left(t^2+1\right)^{-n}$ avec

$$\forall t \in \mathbb{R},\ f'(t) = 1 \times \left(t^2+1\right)^{-n} + t \times -n \times 2t \times \left(1+t^2\right)^{-n-1} = \frac{1+(1-2n)t^2}{\left(t^2+1\right)^{n+1}}$$

La fonction $t \mapsto \left(t^2+1\right)^{-n}$ est dérivable en tant que composées des fonctions dérivables $t \mapsto t^2+1$ et $x \mapsto x^{-n}$.

Produit d'une fonction dérivable par une fonction non dérivable.

Considérons à présent la fonction $g : x \mapsto \left(x^2-1\right)|x-1|$ définie sur $\mathbb{R}$. Comme $x \mapsto |x-1|$ est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et $x \mapsto x^2-1$ l'est partout, on peut appliquer le théorème sur les produit en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$: g est dérivable en tout point de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Il reste à étudier la dérivabilité de g au point 1. Pour cela, on effectue le changement de variable $x = 1+u$, on obtient :

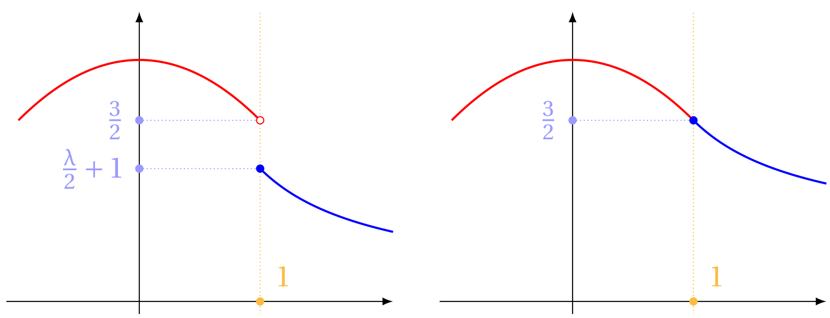
$$\frac{g(1+u)-g(1)}{u} = (u+2)\,|u| \xrightarrow[u \to 0]{} 0$$

La fonction g est donc dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Étude d'un raccord.

Considérons maintenant, pour un réel λ, la fonction h_λ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h_\lambda(x) := \begin{cases} \dfrac{4-x^2}{2} & \text{pour } x < 1 \\ \dfrac{1}{x} + \dfrac{\lambda}{2} & \text{pour } x \geqslant 1 \end{cases}$$



Il s'agit d'étudier la fonction obtenue en raccordant deux expressions analytiques eau point 1. Il est clair, par opérations sur les fonctions dérivables, que la fonction h_λ est dérivable en tout point distinct de 1 et

$$h'_\lambda(x) := \begin{cases} -2x & \text{si } x < 1 \\ -\dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

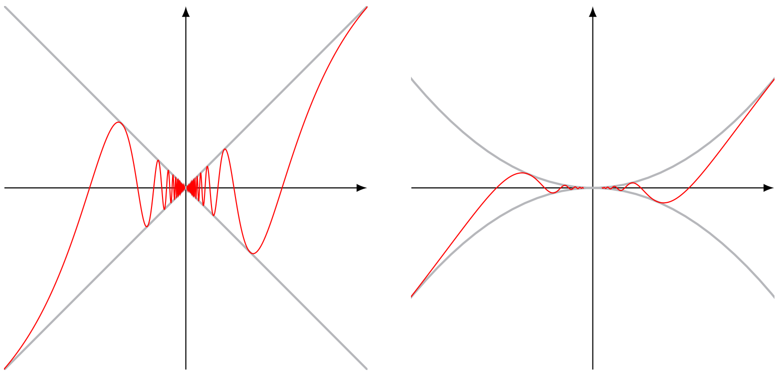
La continuité en 1 étant une condition nécessaire de dérivabilité en ce point, on en déduit que le seul cas à considérer est celui où $\lambda = 1$ (seule valeur telle que h_λ admette en 1 des limites latérales égales).

Comme $\forall x \geqslant 1$, $h_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2}$, h_1 est dérivable à droite en 1 avec ${h'_1}_d(1) = -\frac{1}{1^2} = -1$.

Comme $h_1(1) = \frac{3}{2}$, on a $\forall x \leqslant 1$, $h_1(x) = \frac{4-x^2}{2}$, h_1 est dérivable à gauche en 1 avec ${h'_1}_g(1) = \frac{-2\times 1}{2} = -1$.

Puisque ${h'_1}_g(1) = {h'_1}_d(1)$, h_1 est dérivable en 1.

Étude de la dérivabilité d'un prolongement par continuité.



Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par

$$f(x) := x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \quad \text{et} \quad g(x) := x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

Comme $f(x) = \mathrm{O}(x)$ et $g(x) = \mathrm{O}(x^2)$ en 0, ces fonctions sont prolongeables par continuité en 0 en posant $f(0) := 0$ et $g(0) := 0$.

Étudions leur dérivabilité en 0.

On sait que $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ n'admet pas de limite en 0 (cf. AN 3) et $\frac{g(x)}{x} = \mathrm{O}(x)$ en 0 donc $\frac{g(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$.

Ainsi f n'est pas dérivable en 0 et g est dérivable en ce point avec $g'(0) = 0$. Comme on l'observe sur les figures ci-dessus, l'amplitude $x \mapsto x^2$ « force » la courbe de g a être lisse en 0 (cf. l'entonnoir bleu). L'amplitude $x \mapsto x$ est moins contraignante au voisinage de 0 (on peut facilement démontrer que cette fonction admet des tangentes de pentes arbitrairement grandes au voisinage de 0).

Nous verrons un peu plus loin qu'il est possible d'étudier la dérivabilité d'un prolongement par continuité en appliquant le théorème de la limite de la dérivée.

On traitera avec profit le test (⚡ **6.1**).

2. Propriétés globales des fonctions dérivables

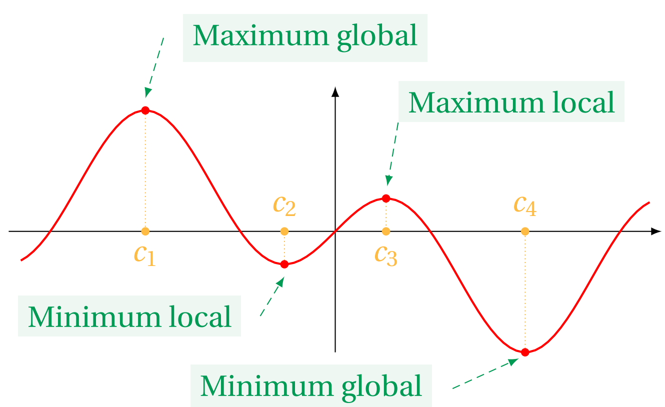
Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont les principaux outils pour relier les propriétés d'une fonction dérivable à celles de sa dérivée.

2.1. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis

Le lecteur est renvoyé au chapitre AN 3, où les notions d'extremum local et global ont été définies.

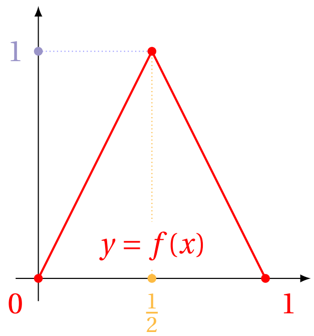
Il est géométriquement clair qu'une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ dérivable est de dérivée nulle en tout point où elle admet un extremum local.

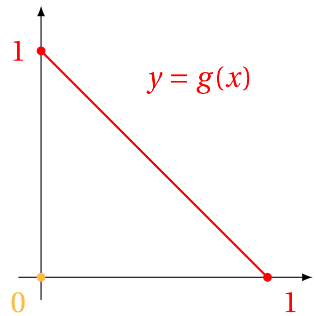
Ce résultat se généralise à des fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable où I est un intervalle et des points intérieurs à I.



Proposition 6.8. Condition nécésssaire d'extremum en un point intérieur

Soit c un point intérieur d'un vrai intervalle I et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable en c. Si f admet en c un extremum local, alors $f'(c) = 0$.





Les hypothèses de ce théorème sont minimales.

La fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ci-contre vérifie toutes les hypothèses sauf la dérivabilité en $\frac{1}{2}$.

De même, la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ vérifie toutes les hypothèses sauf qu'elle atteint un maximum et un minimum locaux en 1 et 0, qui ne sont pas intérieurs à $[0,1]$.

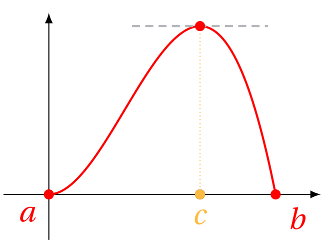
Dans les deux cas, les dérivées f' et g' ne s'annule pas là où elles sont définies.

Le théorème suivant date de la fin du XVII-ème siècle. Il a été énoncé par **Michel Rolle** en 1690 sous la forme suivante : *entre deux racines d'une équation est comprise une racine de l'équation dérivée*[4].

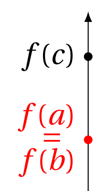
Théorème 6.9. Théorème de Rolle

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(a) = f(b)$.
Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f'(c) = 0$.

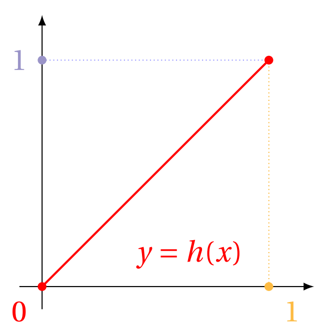
On peut donner deux interprétations du théorème de Rolle :

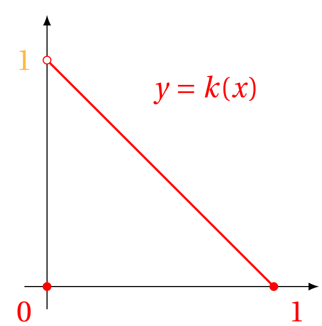


- *Géométrique* : f admet un extremum local en un point intérieur à $[a,b]$.
- *Cinématique* : $f(t)$ représente l'altitude à l'instant t d'un mobile se déplaçant verticalement sur un axe ; $f(a) = f(b)$ signifie que le mobile revient à la même altitude en $t = b$ qu'en $t = a$, cela impose que sa vitesse s'annule entre a et b.



Les fonctions f (cf. les figures illustrant le théorème de Rolle ci-dessus), h et k (cf. ci-contre) illustrent la minimalité des hypothèses du théorème des accroissements finis : f vérifie tout sauf la dérivabilité en $\frac{1}{2}$, idem pour h sauf $h(0) = h(1)$ et idem pour k sauf la continuité en 0.

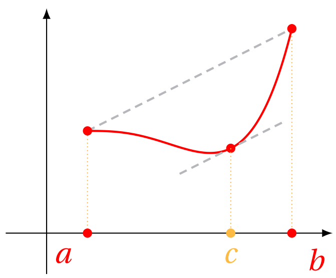




Théorème 6.10. Théorème des accroissements finis

Soit $a < b$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Il existe $c \in]a,b[$ tel que $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

4. En langage moderne : entre deux solutions de $f(x) = 0$, on trouve une solution de $f'(x) = 0$.



On peut reconduire les deux interprétations précédentes :

⇛ *Géométrique* : il existe une tangente au graphe de f parallèle à la corde joignant les extrémités du graphe de f.

⇛ *Cinématique* : il existe un instant c où la vitesse instantanée est égale à la vitesse moyenne entre les instants a et b.

De f' en f et inversement

⇛ On peut transformer des hypothèses sur f' en conclusion sur f de deux manières :

- si f' est continue, on peut utiliser l'intégrale et $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t$.
- sinon, seul le théorème des accroissements finis est applicable.

⇛ Pour transformer des hypothèses sur f en conclusion sur f', on revient au taux d'accroissement.

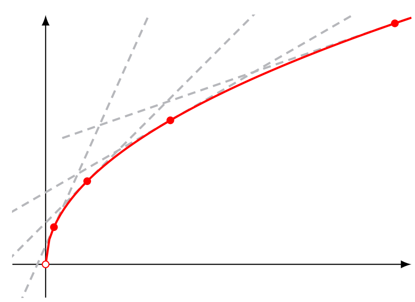
Théorème 6.11. Théorème de la limite de la dérivée

Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$. Pour $a \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue sur I, dérivable sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$ telle que $f'(t) \xrightarrow[t\to a]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$, on a

$$\frac{f(t) - f(a)}{t - a} \xrightarrow[t\to a]{} \ell$$

En particulier, si $\ell \in \mathbb{R}$, alors f dérivable en a et $f'(a) = \ell$.

Ce résultat est géométriquement très intuitif : le graphe de f « *tombe* » sur le point $(a, f(a))$ avec une pente égale à ℓ (cf. l'exemple ci-contre).



On peut même l'affiner en ne supposant la continuité de f que sur $\mathrm{I} \setminus \{a\}$: on prouve[5] alors que f est prolongeable par continuité en a puis dérivable en a avec $f'(a) = \ell$.

Considérons la fonction $\phi : x \mapsto \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right)$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Elle est continue sur $\mathbb{R}^*$ et prolongeable par continuité en 0 par 0 puisque $\phi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. La fonction ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et

$$\phi'(x) = \frac{2}{x^3}\exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$$

Cette limite est justifiée par la croissance comparée suivante $\mathrm{X}^3 \underset{+\infty}{\ll} e^{\mathrm{X}^2}$ et une composition à droite par $x \mapsto \frac{1}{|x|}$. On déduit du théorème de la limite de la dérivée que ϕ est dérivable en 0 avec $\phi'(0) = 0$.

On pourra aborder le test (⚡ **6.2**).

4. Le programme se limite à l'intégrale des fonctions continues par morceaux.
5. Par des outils qui ne sont pas au programme.

2.2. L'inégalité des accroissements finis

Le théorème des accroissements finis a pour corollaire immédiat qu'une fonction dérivable à dérivée bornée sur un intervalle est lipschitzienne[6].

Proposition 6.12. Inégalité des accroissements finis (6.3)

Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, $k \in \mathbb{R}_+$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

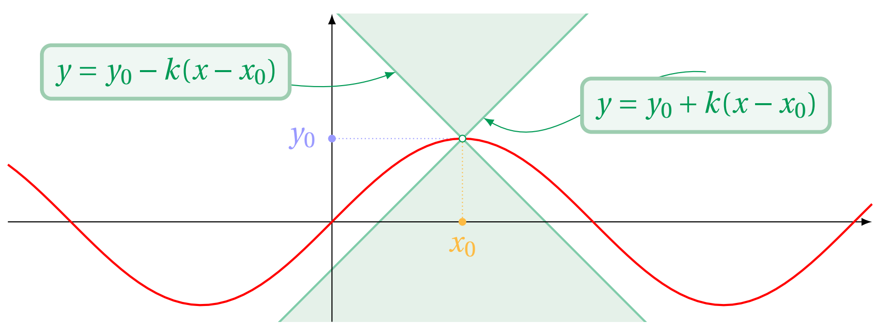
a. S'il existe $(m, \mathrm{M}) \in \mathbb{R}^2$ tels que $m \leqslant f' \leqslant \mathrm{M}$ alors

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2 \text{ tel que } a \leqslant b, \text{ on a } m(b-a) \leqslant f(b) - f(a) \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

b. En particulier, s'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|f'| \leqslant k$, alors f est k-lipschitzienne sur I, i.e.

$$\forall (a,b) \in \mathrm{I}^2, \ \big| f(a) - f(b) \big| \leqslant k\,|a-b|$$

Comme $|\sin'| \leqslant 1$, la fonction sinus est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Nous l'avons déjà vu dans AN 3, l'interprétation géométrique est claire : pour tout $x_0 \in \mathrm{I}$, le graphe de f est contenu dans le secteur angulaire d'inéquation $\big| y - f(x_0) \big| \leqslant k|x - x_0|$.

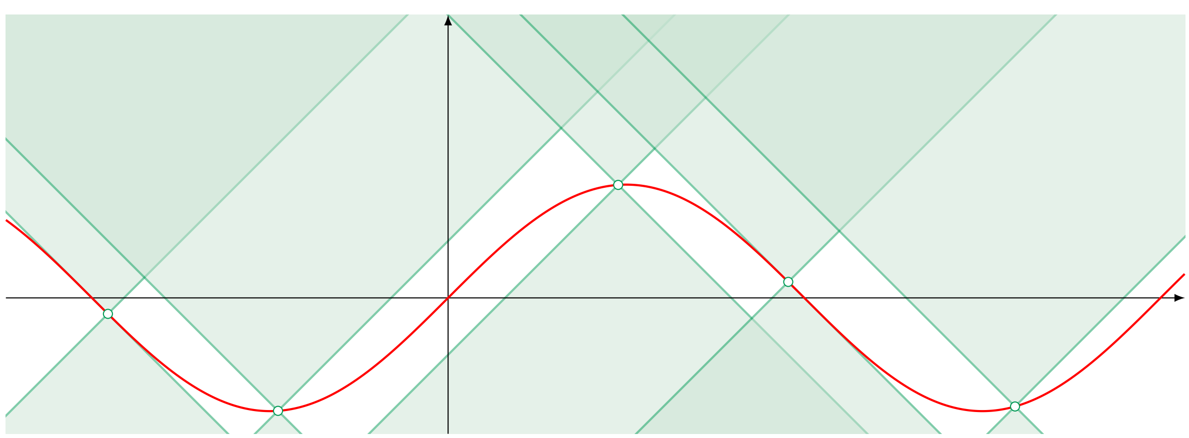


La condition

$$\big| y - y_0 \big| \leqslant k\,|x - x_0|$$

où $y_0 := f(x_0)$, équivaut à

$$\begin{cases} y_0 - k(x - x_0) \leqslant y \quad \text{et} \\ y \leqslant y_0 + k(x - x_0) \quad \text{si } x \geqslant x_0 \\ y_0 + k(x - x_0) \leqslant y \quad \text{et} \\ y \leqslant y_0 - k(x - x_0) \quad \text{si } x \leqslant x_0 \end{cases}$$



6. En supposant f' continue, on peut déduire de $m \leqslant f'(t) \leqslant \mathrm{M}$ pour tout t dans $[a,b]$ et $a < b$ que $\underbrace{\int_a^b m\,\mathrm{d}t}_{m(b-a)} \leqslant \underbrace{\int_a^b f'(t)\,\mathrm{d}t}_{f(b)-f(a)} \leqslant \underbrace{\int_a^b \mathrm{M}\,\mathrm{d}t}_{\mathrm{M}(b-a)}$

Fonctions contractantes et suites récurrentes

L'inégalité des accroissements finis est un outil très efficace pour étudier la convergence de suites récurrentes

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$$

lorsque u_0 appartient à un intervalle $[a, b]$ stable par f sur lequel f est dérivable et vérifie $|f'| \leqslant \lambda$ où $\lambda \in [0, 1[$. Une telle fonction est dite contractante.

Sous ces hypothèses, il est classique que f admet un point fixe sur $[a, b]$ (cf. le chapitre AN 3). Par l'inégalité des accroissements finis, puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[a, b]$, on a pour $n \in \mathbb{N}$

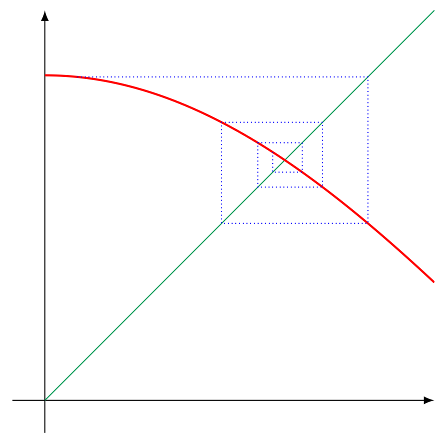
$$\left| f(u_n) - f(\ell) \right| \leqslant \lambda |u_n - \ell| \ \text{ d'où } \ \left| u_{n+1} - \ell \right| \leqslant \lambda |u_n - \ell|$$

Puis, par une récurrence facile, $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ |u_n - \ell| \leqslant \lambda^n |u_0 - \ell|$. Comme $\lambda \in [0, 1[$, on a $\lambda^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et donc $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par le théorème d'encadrement.

Ce résultat est particulièrement intéressant dans le cas où f est décroissante, pour lequel l'étude de la suite peut être délicate. Par exemple, considérons $u_0 \in \mathbb{R}$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \cos u_n$$

On a $u_1 \in [-1, 1]$ puis $u_2 \in [0, 1]$ car $[-1, 1] \subset \left[\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $[0, 1]$ est stable par cos, on a $\forall n \geqslant 2,\ u_n \in [0, 1]$. Puisque $\cos' = -\sin$, $\left|\cos'\right|$ est majorée par $\lambda := \sin 1$ sur $[0, 1]$. Le réel λ appartenant à $[0, 1[$, le cosinus est contractant sur $[0, 1]$ et $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$, où ℓ est l'unique point fixe de cos.



2.3. Sens de variation et dérivée

Nous cloturons ce paragraphe par l'application la plus commune de la dérivation : l'étude des variations.

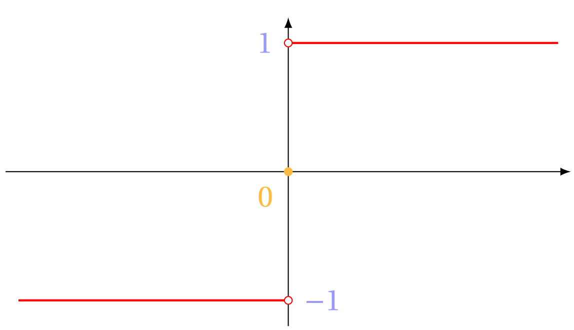
Proposition 6.13. Dérivée et sens de variation (↯ 6.4)

Soit I un vrai intervalle et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ dérivable.

a. La fonction f est croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f' \geqslant 0$ (resp. $\leqslant$) ;

b. La fonction f est strictement croissante (resp. décroissante) si et seulement si $f' \geqslant 0$ (resp. $\leqslant$) et f' ne s'annule sur aucun intervalle ouvert non vide contenu dans I.

c. La fonction f est constante si et seulement si $f' = 0$.



L'ensemble de départ doit être un intervalle :

$$f' = 0 \not\Rightarrow f \text{ est constante}$$

Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$x \longmapsto \frac{x}{|x|}$$

est de dérivée nulle sur $\mathbb{R}^*$, mais non constante.

Pour justifier la stricte monotonie sur un intervalle d'une fonction f dérivable, on étudie son signe et on vérifie que l'ensemble des points où sa dérivée s'annule ne contient aucun vrai intervalle.

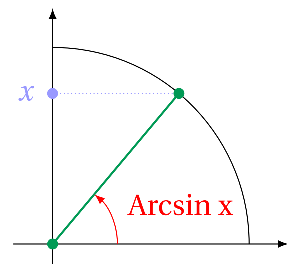
3. Fonctions circulaires réciproques

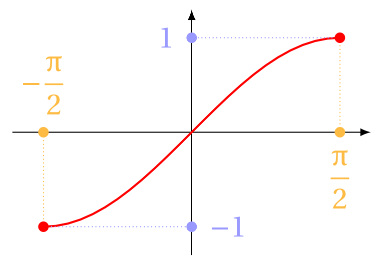
Dans ce paragraphe, nous allons définir trois nouvelles fonctions trigonométriques, bijections réciproques de cos, sin et tan sur des intervalles bien choisis. Ce sera l'occasion de mettre en applications de nombreux théorèmes établis dans les chapitres AN 3, AN 4 et AN 5.

Définition 6.14. Arcsinus (↯ 6.5)

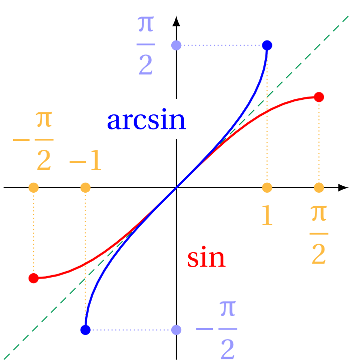
L'arcsinus est la bijection réciproque de

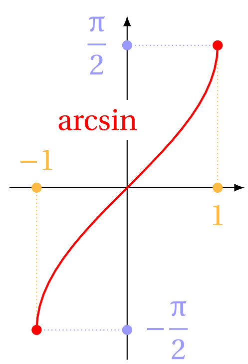
$$\begin{array}{ccc} \left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \sin x \end{array}$$





On a $\arcsin(0)=0$, $\arcsin(\pm 1)=\pm\frac{\pi}{2}$, $\arcsin(\pm 1/\sqrt{2})=\pm\frac{\pi}{4}$, $\arcsin(\pm\sqrt{3}/2)=\pm\frac{\pi}{3}$ et $\arcsin(\pm 1/2)=\pm\frac{\pi}{6}$. Ces résultats se retrouvent sur cercle trigonométrique. L'arcsinus du réel $x\in[-1,1]$ est l'unique élément de $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ dont le sinus vaut x.





On déduit du tableau de variation et du graphe du sinus ceux de l'arcsinus :

x	-1	1
$\arcsin x$	$-\frac{\pi}{2}$ ↗	$\frac{\pi}{2}$

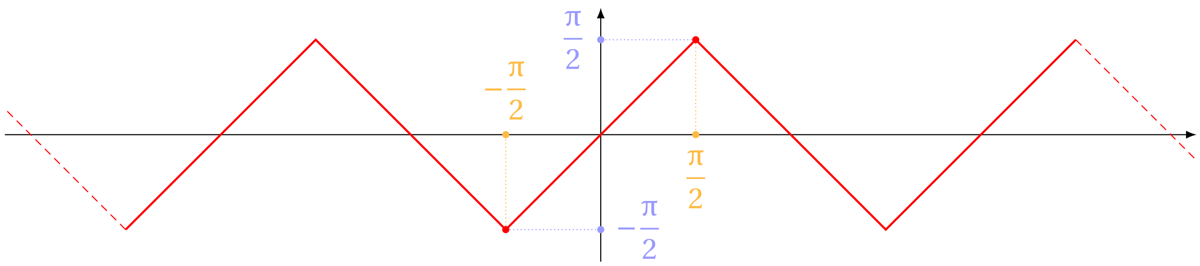
Proposition 6.15. Propriétés de l'arcsinus (↯ 6.6)

a. La fonction arcsin est impaire et continue sur $[-1,1]$ et $\forall x\in[-1,1],\ \cos(\arcsin x)=\sqrt{1-x^2}$.

b. L'arcsinus est dérivable sur $]-1,1[$ avec, $\forall x\in]-1,1[,\ \arcsin' x=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot$

c. L'arcsinus n'est pas dérivable en ± 1, sa courbe graphe admet en ± 1 une tangente verticale.

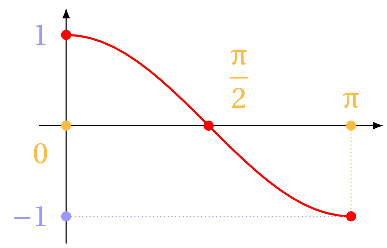
Afin d'illustrer ces différentes propriétés, étudions la fonction $f : x\longmapsto \arcsin(\sin x)$. Comme sin est à valeurs dans l'ensemble de définition $[-1,1]$ de l'arcsinus, f est définie sur $\mathbb{R}$. Comme sin et arcsin sont impaire, leur composée f l'est également. Comme sin est 2π-périodique, f l'est également. Ainsi, nous allons limiter l'étude de f à $[0,\pi]$. Pour $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$, $f(x)=x$ par définition de l'arcsinus. Pour $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$, on a $\pi-x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ et $\sin x=\sin(\pi-x)$ d'où $f(x)=f(\pi-x)=\pi-x$. On en déduit le tracé de f sur $[0,\pi]$, que l'on complète par une symétrie par rapport à l'origine pour obtenir le tracé sur $[-\pi,\pi]$, on translate alors une infinité de fois ce motif pour construire toute la courbe :

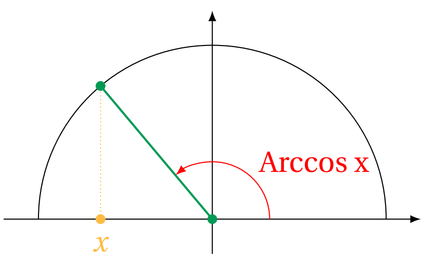


Définition 6.16. Fonction arccosinus (⚡6.7)

L'arccosinus est la bijection réciproque de la fonction définie par

$$\begin{array}{ccc} [0,\pi] & \longrightarrow & [-1,1] \\ x & \longmapsto & \cos x \end{array}$$





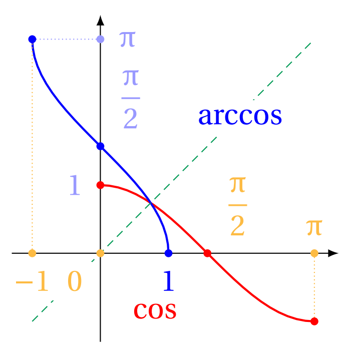
On a $\arccos(1)=0$ et

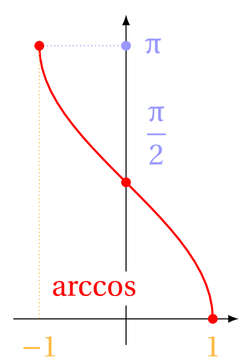
$$\begin{cases} \arccos(-1)=\pi,\ \arccos\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3},\ \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4} \\ \arccos(0)=\frac{\pi}{2},\ \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{\pi}{6}, \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3} \\ \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}, \arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{5\pi}{6} \end{cases}$$

On retrouve les valeurs particulières de l'arccosinus sur le cercle trigonométrique. L'arccosinus de $x\in[-1,1]$ est l'unique réel appartenant à l'intervalle $[0,\pi]$ dont le cosinus vaut x.

Les graphes de l'arccosinus sur $[-1,1]$ et du cosinus sur $[0,\pi]$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice. On déduit des variations du cosinus celles de l'arccosinus.

x	-1	1
$\arccos x$	π ↘	0





Proposition 6.17. Propriétés de l'arccosinus (⚡6.8)

a. La fonction arccos est continue sur $[-1,1]$ et $\forall x\in[-1,1],\ \sin(\arccos x)=\sqrt{1-x^2}$.

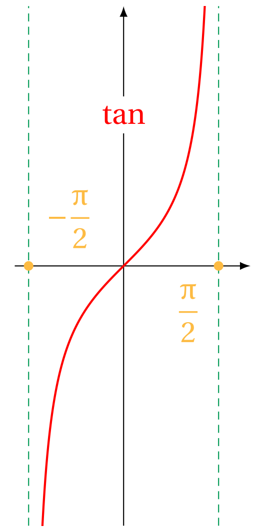
b. L'arccosinus est dérivable sur $]-1,1[$ avec $\forall x\in]-1,1[,\ \arccos' x=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

c. L'arccosinus n'est pas dérivable en ±1, son graphe admet en ces points une tangente verticale.

d. Pour tout réel $x\in[-1,1],\ \arccos x+\arcsin x=\dfrac{\pi}{2}$.

Définition 6.18. Fonction arctangente (⚡ 6.9)

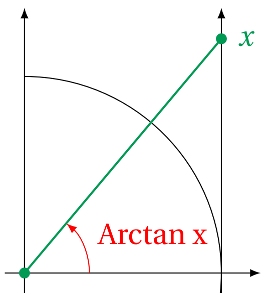
L'Arctangente, notée arctan, est la bijection réciproque de la fonction
$$\begin{array}{ccc} \left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \tan x \end{array}$$



x	$-\frac{\pi}{2}$		0		$\frac{\pi}{2}$
$\tan' x$	‖		$+$		‖
$\tan x$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

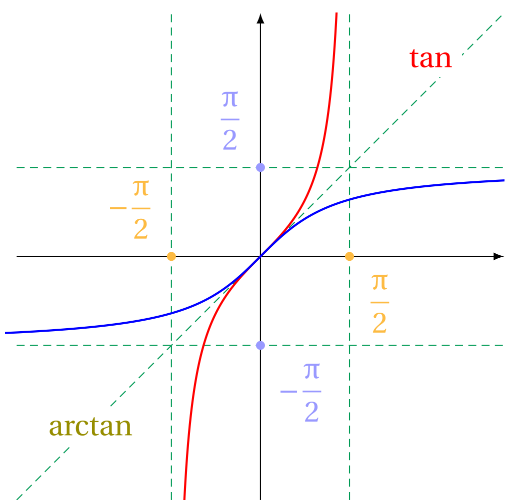
La fonction tangente a déjà été étudiée en détail dans le chapitre AN 4.

Elle réalise une bijection de l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.



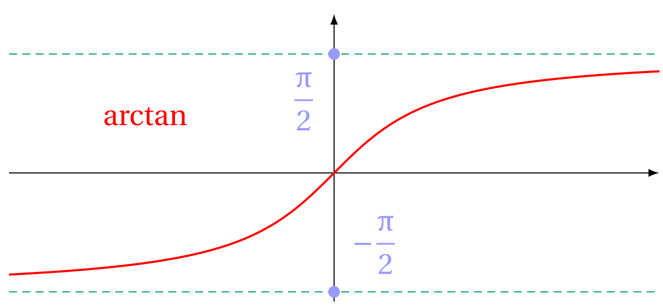
Les valeurs remarquables de l'arctangente se lisent sur le cercle trigonométrique : l'arctangente d'un réel x est l'unique réel appartenant à $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ dont la tangente vaut x. On a

$$\arctan(\pm 1) = \pm\frac{\pi}{4},\ \arctan(0) = 0,\ \arctan\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \pm\frac{\pi}{6}\ ,\ \arctan\left(\pm\sqrt{3}\right) = \pm\frac{\pi}{3}$$



x	$-\frac{\pi}{2}$		$\frac{\pi}{2}$
$\arctan x$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

En particulier, $\arctan x \xrightarrow[x\to\pm\infty]{} \pm\dfrac{\pi}{2}$.



Les formules de trigonométrie directe (addition, duplication, etc.) admettent des analogues en trigonométrie réciproque. Considérons par exemple, deux réels positifs a et b. Puisque $\arctan a$ et $\arctan b$ appartiennent à $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$, on a
$$-\frac{\pi}{2} < \arctan a - \arctan b < \frac{\pi}{2}$$
Par bijectivité de $\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, il existe un unique réel c tel que $\arctan a - \arctan b = \arctan c$. On peut expliciter c au moyen de la formule d'addition de la tangente :

$$c = \tan(\arctan a - \arctan b) = \frac{\tan\arctan a - \tan\arctan b}{1+(\tan\arctan a)(\tan\arctan b)} = \frac{a-b}{1+ab}$$

Ainsi, nous venons d'établir la formule suivante :

$$\forall (a,b)\in\mathbb{R}_+^2\,,\ \arctan a - \arctan b = \arctan\frac{a-b}{1+ab}$$

On pourra traiter le test (⚡**6.10**).

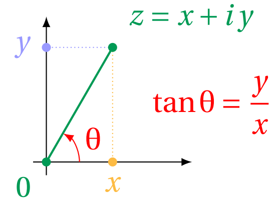
La fonction arctangente permet d'expliciter un argument d'un nombre complexe qui n'est pas imaginaire pur.

Proposition 6.19. Argument

our $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\ \arg(x+iy) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)\ [2\pi]$.

Lorsque $x<0$, on pose $-z = -x-iy = \sqrt{x^2+y^2}e^{i\theta}$. Comme $-x>0$, on peut choisir $\theta = \arctan\frac{-y}{-x} = \arctan\frac{y}{x}$, d'où

$$z = -\sqrt{x^2+y^2}e^{i\theta} = \sqrt{x^2+y^2}e^{i(\theta+\pi)} \quad \text{et donc} \quad \arg(x+iy) = \pi+\arctan\left(\frac{y}{x}\right)\ [2\pi]$$



Cherchons à simplifier $\alpha := \arctan 2 + \arctan 3$. Par la proposition précédente et les propriétés des arguments, on a

$$\begin{aligned}\alpha &= \arg(1+2i)+\arg(1+3i)\ [2\pi] = \arg\big((1+2i)(1+3i)\big)\ [2\pi] = \arg(-5+5i)\ [2\pi] = \arg(-1+i)\ [2\pi]\\ &= \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]\end{aligned}$$

Comme $0<\arctan 2<\frac{\pi}{2}$ et $0<\arctan 3<\frac{\pi}{2}$, on a $0<\alpha<\pi$. On en déduit que $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

On peut aussi appliquer la formule d'addition de la tangente. Comme $\arctan 1 < \arctan 2 < \frac{\pi}{2}$ et $\arctan 1 < \arctan 3 < \frac{\pi}{2}$, on a $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, ainsi

$$\tan\alpha = \frac{\tan\arctan 2+\tan\arctan 3}{1-(\tan\arctan 2)(\tan\arctan 3)} = \frac{5}{-5} = -1 = \tan\frac{3\pi}{4}$$

On en déduit que $\alpha = \frac{3\pi}{4}\ [2\pi]$. Comme $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$, on en déduit que $\alpha = \frac{3\pi}{4}$.

Proposition 6.20. Propriétés de l'arctangente (⚡**6.10**)

a. La fonction arctan est impaire et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec, $\forall x\in\mathbb{R},\ \arctan' x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

b. Pour tout réel x non nul, $\arctan x + \arctan\dfrac{1}{x} = \operatorname{signe}(x)\cdot\dfrac{\pi}{2}$ où $\operatorname{signe}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x>0\\ -1 & \text{si } x<0\end{cases}$

Revenons au calcul de α, entrepris de deux façons ci-dessus. Cette proposition nous ouvre une troisième voie :

$$\alpha = \arctan 3 - \arctan\frac{1}{2} + \frac{\pi}{2} = \arctan\frac{3-\frac{1}{2}}{1+\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{2} = \arctan 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{4}$$

par la formule « d'addition » démontrée ci-dessus.

4. Dérivées successives

Sous réserve d'existence, on peut itérer la dérivation pour définir la dérivée de la dérivée, etc.

Définition 6.21. Dérivées successives

Soit I un vrai intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$.

- On définit par récurrence les dérivées successives de f (sous réserve d'existence) :
  - On note $f^{(0)} := f$.
  - On note, pour $n \in \mathbb{N}^*$ et sous réserve d'existence, $f^{(n)} := \left(f^{(n-1)}\right)'$ (dérivée n-ième de f).
- Classe d'une fonction.
  - La fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^0$ si elle est continue sur I.
  - Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^n$ si elle est dérivable n fois et si $f^{(n)}$ est continue.
  - La fonction f est dite de classe $\mathscr{C}^\infty$ si elle est indéfiniment dérivable sur I.

Pour $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, on note $\begin{cases} \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \text{ l'ensemble des fonctions de classe } \mathscr{C}^n \text{ sur I à valeurs dans } \mathbb{R} \\ \mathscr{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \text{ l'ensemble des fonctions } n \text{ fois dérivables sur I à valeurs dans } \mathbb{R} \end{cases}$

On emploie parfois l'expression *régularité d'une fonction* pour désigner sa classe. On a bien sûr :

$$\mathscr{C}^\infty(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^{n+1}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{D}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^{n-1}(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^1(\mathrm{I}, \mathbb{R}) \subset \mathscr{C}^0(\mathrm{I}, \mathbb{R})$$

On démontre facilement par récurrence les résultats suivants :

Formulaire

- Pour tout entier naturel n et tout réel x, $\cos^{(n)}(x) = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$, $\sin^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et $f : x \mapsto \dfrac{1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$.
- Pour tout $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, et $f : x \mapsto x^m$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \begin{cases} \dfrac{m!}{(m-n)!} x^{m-n} & \text{si } m \geqslant n \\ 0 & \text{si } m < n \end{cases}$.

Proposition 6.22. Opérations (6.11)

Soit $n \in \mathbb{N}$, I et J deux vrais intervalles de $\mathbb{R}$, $u : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^n$.

a. Les fonctions $u + v$ et uv sont de classe $\mathscr{C}^n$ et vérifient

$$(u+v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)} \quad \text{et} \quad (uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$$

b. Si $w : \mathrm{J} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^n$ telle que $u\langle \mathrm{I} \rangle \subset \mathrm{J}$, alors $w \circ u$ est de classe $\mathscr{C}^n$.

c. Si $n \geqslant 1$ et $u' > 0$, u réalise une bijection de I sur $u\langle \mathrm{I} \rangle$ et u^{-1} est de classe $\mathscr{C}^n$.

On adapte bien-sûr le c) de cette proposition au cas où $u' < 0$.

L'expression sommatoire de $(uv)^{(n)}$ est connue sous le nom de « *formule de Leibniz* ». Considérons par exemple la fonction $f : x \mapsto x^2 e^{\alpha x}$ définie sur $\mathbb{R}$, où α est fixé dans $\mathbb{R}^*$. Elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tant que produit des deux fonctions indéfiniment dérivables $u : x \mapsto x^2$ et $v : x \mapsto e^{\alpha x}$. On déduit de la formule de Leibniz que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ f^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)}(x) v^{(n-k)}(x) = \left(\alpha^n x^2 + n\alpha^{n-1} x + n(n-1)\alpha^{n-2}\right) e^{\alpha x}$$

On pourra conclure cette section par le test (↯ **6.12**).

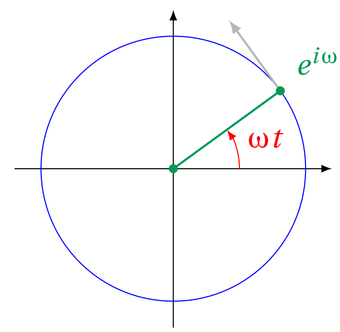
5. Extension aux fonctions à valeurs complexes

On étend la notion de dérivabilité aux fonctions de la variable réelle à valeurs complexes en reprenant mot pour mot la définition.

Comme nous l'avons remarqué dans le cahpitre AN 3, une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ (où I est un intervalle de $\mathbb{R}$) s'interprète comme une courbe du plan (un point du plan mobile d'affixe $f(t)$ à l'instant t).

En cas de dérivabilité, $f'(t)$ est l'affixe du vecteur vitesse à l'instant t.

Par exemple, $f : \mathbb{R} \to e^{i\omega t}$ (pour ω réel) correspond à un mouvement circulaire à vitesse angulaire constante ω dans le sens trigonométrique.



Comme pour la continuité, la dérivabilité se caractérise simplement au moyen des parties réelles et imaginaires.

Proposition 6.23. Dérivabilité ponctuelle

Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, $t_0 \in \mathrm{I}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$. La fonction f est dérivable en t_0 si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ sont dérivables en t_0 et, dans ce cas, $f'(t_0) = \mathrm{Re}(f)'(t_0) + i\,\mathrm{Im}(f)'(t_0)$.

Les résultats sur les opérations s'étendent sans peine à ce cadre. Pour rester dans le cadre de ce chapitre d'une variable réelle, nous limiterons le théorème de composition au cas suivant.

Proposition 6.24. Une composée

Pour $\phi : \mathrm{I} \to \mathbb{C}$ dérivable, $\exp \circ \phi$ est dérivable et $(\exp \circ \phi)' = \phi'(\exp \circ \phi)$.

En particulier, pour tout $\nu \in \mathbb{C}$ et $f : t \mapsto e^{\nu t}$, f est dérivable et $f'(t) = \nu e^{\nu t}$.

Le théorème de Rolle n'est plus valable sur $\mathbb{C}$: contrairement à la dimension un, il est possible en dimension deux de partir d'un point et d'y revenir sans que la vitesse ne s'annule. Par exemple, pour le mouvement circulaire $f : t \mapsto e^{it}$, on a $f(0) = f(2\pi)$ mais $f'(t) = ie^{it} \neq 0$ pour tout réel t. En revanche, l'inégalité des accroissements reste valable dans ce cadre.

On généralise les dérivées successives et les classes de fonctions à ce cadre. Par exemple, pour f fonction n fois dérivable sur I, on a

$$\mathrm{Re}\left(f^{(n)}\right) = \mathrm{Re}(f)^{(n)} \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}\left(f^{(n)}\right) = \mathrm{Im}(f)^{(n)}$$

On peut en déduire les dérivées successives de la fonction $g : x \mapsto \cos(x)e^x$ définie sur $\mathbb{R}$ en remarquant que $g := \mathrm{Re}\, f$ où $f : t \mapsto e^{ix}e^x$. Comme $f(t) = e^{(1+i)t}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\ f^{(n)}(t) = (1+i)^n e^{(1+i)t} = \sqrt{2}^n e^t e^{i\left(t+\frac{n\pi}{4}\right)} \quad \text{et} \quad g^{(n)}(t) = \mathrm{Re}\left(f^{(n)}(t)\right) = \sqrt{2}^n e^t \cos\left(t + \frac{n\pi}{4}\right)$$

6. Tests

6.1.

Étudier la dérivabilité de $f : x \mapsto x|x-1|$.

6.2.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $h > 0$ et $f : [a, a+h] \to \mathbb{R}$ dérivable sur $]a, a+h[$, continue sur $[a, a+h]$. Montrer que $\exists \theta \in]0,1[$, $f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h)$. Calculer θ dans le cas d'un trinôme du second degré.

6.3.

Montrer que $\sin(\ln(n+1)) - \sin(\ln(n)) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

6.4.

Soit $f : x \mapsto \dfrac{x+1}{2} - \sqrt{|x^2-1|}$. Domaine de définition, variations puis graphe de f.

6.5.

Calculer $\arcsin \sin \alpha$ pour $\alpha = \frac{3\pi}{7}, -\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{19\pi}{7}$.

6.6.

Soit $x \in [-1,1]$. Résoudre l'équation $\sin \theta = x$ d'inconnue réelle θ.

6.7.

Calculer $\arcsin(\cos \alpha)$ lorsque $\alpha = \frac{3\pi}{7}, -\frac{2\pi}{3}$ puis $\frac{19\pi}{7}$.

6.8.

Simplifier, pour tout $x \in [-1,1]$, $\sin(2 \arccos x)$ et $\sin(4 \arccos x)$.

6.9.

Calculer $\arctan(\tan \alpha)$ lorsque $\alpha = \frac{33\pi}{7}, -\frac{8\pi}{3}$ puis $\frac{19\pi}{7}$.

6.10.

Prouver la formule $\arctan \dfrac{1}{2} + \arctan \dfrac{1}{5} = \arctan \dfrac{7}{9}$.

6.11.

a. Déterminer deux réels a et b tels que $\forall x \neq \pm 1$, $\dfrac{1}{1-x^2} = \dfrac{a}{1+x} - \dfrac{b}{1-x}$.

b. Calculer la dérivée n-ième sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ de la fonction $x \mapsto f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$.

6.12.

En dérivant de deux façons différentes $x \mapsto x(1+x)^n$, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)\binom{n}{k} = 2^{n-1}(n+2)$.

7. Solutions des tests

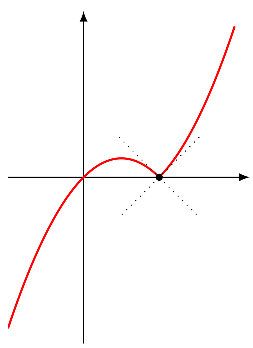
6.1.

⇛ La fonction f est dérivable en tout point $x_0 \in \mathbb{R}\setminus\{1\}$ en tant que produit de fonctions dérivables en x_0.

⇛ Posons $x = 1+u$. Pour tout $u \neq 0$, on a

$$\begin{aligned}\tau_0(f)(u) &= \frac{f(1+u)-f(1)}{u} = \frac{(1+u)|u|}{u}\\ &= |u| + \operatorname{signe}(u)\end{aligned}$$

Ainsi $\tau_0(f)(u) \xrightarrow[u\to 0+]{} 1$ et $\tau_0(f)(u) \xrightarrow[u\to 0-]{} -1$. La fonction f admet des dérivées à droite et à gauche en 0 qui sont distinctes : elle n'est pas dérivable en 0.



6.2.

⇛ Les hypothèses sont réunies pour appliquer le théorème des accroissements finis à f sur $[a, a+h]$: il existe $c \in]a, a+h[$ tel que $f(a+h)-f(a) = hf'(c)$. En posant $\theta := (c-a)/h$, on a bien $f(a+h) = f(a)+hf'(a+\theta h)$ et $\theta \in]0,1[$.

⇛ Après tout calcul, on trouve $\theta = 1/2$.

6.3.

Notons $f = \sin\circ\ln$. Comme $\sin' = \cos$ est bornée par 1, sin est 1-lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\left|f(n+1)-f(n)\right| \leqslant \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

et, d'après le théorème d'encadrement,

$$f(n+1)-f(n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

6.4.

a. La fonction f est clairement définie sur $\mathbb{R}$. On a

$$f(x) = \begin{cases}\frac{x+1}{2} - \sqrt{1-x^2} & \text{si } -1<x<1\\ \frac{x+1}{2} - \sqrt{x^2-1} & \text{sinon.}\end{cases}$$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{\pm1\}$ et

$$f'(x) = \begin{cases}\frac{1}{2} + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} & \text{si } -1<x<1\\ \frac{1}{2} - \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} & \text{si } x<-1 \text{ ou } x>1.\end{cases}$$

Puisque la dérivée tend vers l'infini aux points ±1 la courbe $\mathscr{C}_f$ possède des tangentes verticales en ces deux points. Étudions le signe de f'.

Soit $x < -1$. Alors $f'(x)$ est positive comme somme de deux termes positifs.

Soit $-1 < x < 0$; $(*)$ est justifiée par le fait que deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

$$\begin{aligned}f'(x) \geqslant 0 &\iff \frac{1}{2} \geqslant -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\\ &\iff \sqrt{1-x^2} \geqslant -2x\\ &\overset{(*)}{\iff} \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \geqslant (-2x)^2\\ &\iff 1-x^2 \geqslant 4x^2\\ &\iff x^2 \leqslant \frac{1}{5}\\ &\iff |x| \leqslant \sqrt{0.2} \approx 0.45\end{aligned}$$

Soit $0 \leqslant x < 1$. Alors $f'(x)$ est positive comme somme de deux termes positifs.

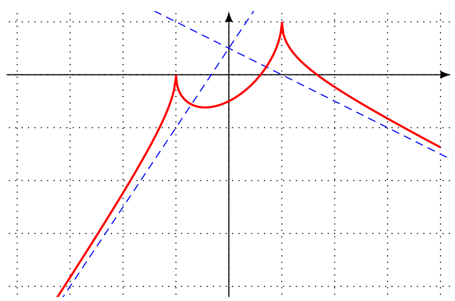
Soit $x > 1$; $(*)$ est justifiée par le fait que deux réels positifs sont rangés dans le même ordre que leurs carrés.

$$\begin{aligned} f'(x) \geqslant 0 &\iff \frac{1}{2} \geqslant \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} \\ &\iff \sqrt{x^2-1} \geqslant 2x \\ &\overset{(*)}{\iff} \left(\sqrt{x^2-1}\right)^2 \geqslant (2x)^2 \\ &\iff x^2-1 \geqslant 4x^2 \\ &\iff -1 \geqslant 3x^2 \end{aligned}$$

Cette dernière inégalité n'est jamais vraie.

Conclusion : la fonction f est croissante sur chacun des intervalles $]-\infty,-1]$ et $[-\sqrt{0.2},1]$. Elle est décroissante sur chacun des intervalles $[-1,-\sqrt{0.2}]$ et $[1,\infty[$.

b. Voici le graphe de f :



6.5.

⇛ Puisque $3\pi/7 \in [-\pi/2,\pi/2]$, on a

$$\arcsin(\sin(3\pi/7)) = 3\pi/7$$

⇛ Puisque $\sin(-2\pi/3) = \sin(-\pi/3)$ et que $-\pi/3 \in [-\pi/2,\pi/2]$, on a aussi

$$\arcsin(\sin(-2\pi/3)) = -\pi/3$$

⇛ Puisque $\sin(19\pi/7) = \sin(5\pi/7)$ et $5\pi/7 \in [-\pi/2,\pi/2]$, on a

$$\arcsin(\sin(19\pi/7)) = 5\pi/7$$

6.6.

On a $\sin(\theta) = x$ *si et seulement si*

$$\sin(\theta) = \sin(\arcsin(x))$$

ainsi :

$$\sin(\theta) = x \iff \begin{cases} \exists\, k \in \mathbb{Z}, \\ \theta = \begin{cases} \arcsin(x) & + \ 2k\pi \\ & \text{ou} \\ -\arcsin(x) & + \ (2k+1)\pi \end{cases} \end{cases}$$

6.7.

⇛ Puisque $3\pi/7 \in [0,\pi]$, on a

$$\arccos(\cos(3\pi/7)) = 3\pi/7$$

⇛ Puisque $\cos(-2\pi/3) = \cos(2\pi/3)$ et $2\pi/3 \in [0,\pi]$, on peut en conclure que

$$\arccos(\cos(-2\pi/3)) = 2\pi/3$$

⇛ Puisque $\cos(19\pi/7) = \cos(5\pi/7)$ et $5\pi/7 \in [0,\pi]$, on a

$$\arccos(\cos(19\pi/7)) = 5\pi/7$$

6.8.

Soit $x \in [-1,1]$. Posons $\theta = \arccos(x)$. On a

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta) = 2x\sqrt{1-x^2}$$

De plus,

$$\cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta) - 1 = 2x^2 - 1$$

donc

$$\begin{aligned} \sin(4\theta) &= 2\sin(2\theta)\cos(2\theta) \\ &= 4x\sqrt{1-x^2}\left(2x^2-1\right) \end{aligned}$$

Commentaire.

Puisque $\cos(\arccos x) = x$ et $\sin(\arccos x) = \sqrt{1-x^2}$, l'idée directrice de ce genre d'exemple est de tout exprimer en fonction de cos et sin.

6.9.

⇛ Puisque $33\pi/7 = 5\pi - 2\pi/7$ et $-2\pi/7 \in]-\pi/2,\pi/2[$, on a

$$\arctan(\tan(33\pi/7)) = -2\pi/7$$

⇛ Puisque $-8\pi/3 = -3\pi + \pi/3$ et $\pi/3 \in]-\pi/2,\pi/2[$, on a

$$\arctan(\tan(-8\pi/3)) = \pi/3$$

⇛ Puisque $19\pi/7 = 3\pi - 2\pi/7$ et $-2\pi/7 \in]-\pi/2, \pi/2[$, on a

$$\arctan(\tan(19\pi/7)) = -2\pi/7$$

6.10.

Posons $\alpha = \arctan(1/2) + \arctan(1/5)$. La fonction arctangente est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Comme $1/2 < 1, 1/5 < 1$ et $0 = \arctan(0), \pi/4 = \arctan(1)$ on en déduit que $0 < \alpha < 2\pi/4 = \pi/2$. D'après la formule d'addition de la tangente,

$$\tan(\alpha) = \frac{1/2 + 1/5}{1 - 1/10} = \frac{7}{9}$$

ainsi $\alpha = \arctan(7/9)$.

6.11.

a. On prouve après mise au même dénominateur et identification des coefficients que

$$a = \frac{1}{2},\ b = -\frac{1}{2}$$

b. On prouve par une récurrence sans difficulté que

$$g : x \mapsto \frac{1}{1+x}$$

est de classe $\mathscr{C}^n$ sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et que sur cet ensemble,

$$g^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$$

On en déduit que la fonction

$$h : x \mapsto \frac{1}{1-x}$$

est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, et que sur cet ensemble,

$$h^{(n)}(x) = \frac{n!}{(1-x)^{n+1}}$$

La fonction f est donc de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$, et sur cet ensemble,

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2(1-x)^{n+1}} + \frac{(-1)^n n!}{2(1+x)^{n+1}}$$

6.12.

D'après la formule du binôme,

$$x(1+x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{k+1}$$

donc

$$\frac{x(1+x)^n}{x} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (k+1) x^k$$

D'après la formule de dérivation d'un produit,

$$\begin{aligned}\frac{x(1+x)^n}{x} &= (1+x)^n + nx(1+x)^{n-1} \\ &= (1+x+nx)(1+x)^{n-1}\end{aligned}$$

On évalue alors l'égalité en $x = 1$ pour conclure.