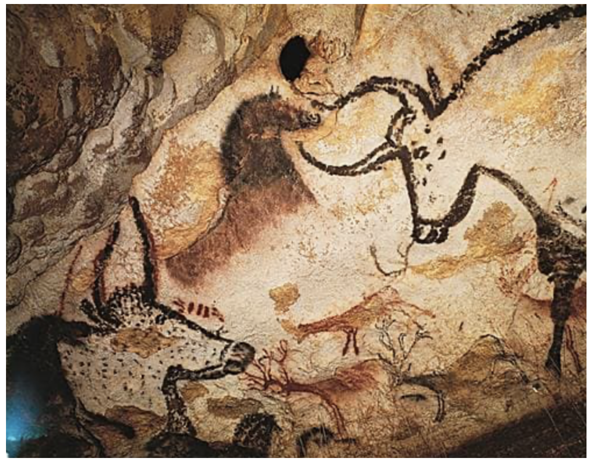
AN 9 | Intégration des fonctions continues par morceaux

L'objectif de ce chapitre est de construire l'intégrale des continues par morceaux et d'exposer les techniques usuelles de calcul intégral (intégration par parties, changement de variable).



Frise des aurochs, Lascaux

Les origines du calcul intégral remontent à l'antiquité, où de nombreux savants ont recherché à calculer des aires et des volumes (cf. Archimède et les valeurs approchées de π). *Newton*, *Leibniz* et *Johann Bernoulli* découvrirent simultanément le lien entre le calcul intégral et le calcul différentiel (c'est l'objet de l'important *théorème fondamental du calcul intégral*) : les primitives d'une fonction f continue permettent de calculer les intégrales de f. Tout se résume donc à *inverser* les tables usuelles de dérivation. Le *signe somme* $\int$ est une invention de Leibniz (1686) et le terme *intégrale* est dû à Johann Bernoulli (1690).

Les techniques usuelles de calcul intégral (intégration par parties, changement de variable) furent rapidement forgées et largement exploitées par les successeurs de Leibniz comme *Euler* ou *Lagrange*. Cependant, de nombreuses intégrales résistèrent à l'ingéniosité des mathématiciens, parmi lesqelles

$$\int e^{-x^2}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{e^x}{x}\mathrm{d}x, \qquad \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

Liouville prouva en 1835 que ces intégrales ne peuvent être calculées à l'aide des fonctions usuelles, plus précisément, elle ne peuvent être exprimées par *la composition d'un nombre fini de fonctions usuelles*[1]. De nouvelles méthodes sont alors apparues telles que l'utilisation des développements en série, les méthodes d'intégration approchée ou encore l'utilisation des développements asymptotiques. *Cauchy* publie une construction de l'intégrale en 1823 dans son Résumé des leçons données à l'Ecole Polytechnique sur le calcul infinitésimal. Il s'agit là de la première définition rigoureuse de l'intégrale. Toutefois, Cauchy utilise implicitement qu'une fonction continue sur un segment $[a,b]$ y est *uniformément continue*.

Riemann

Il faudra attendre *Heine* pour expliciter la notion d'uniforme continuité et apporter une preuve du résultat précédent, vers 1870.

Bernhard Riemann, dans un mémoire sur les séries trigonométriques, définit en 1854 l'intégrale pour des fonctions plus générales que celles alors étudiées. Cette nouvelle notion d'intégrale fut améliorée par *Darboux* et *Du Bois-Reymond*.

On doit à *Henri Lebesgue* en 1902 et à *Kurzweil* en 1957 des théories de l'intégration plus générales et plus performantes : un défaut majeur de l'intégrale de Riemann est sa pénible généralisation à des fonctions de plusieurs variables. L'intégrale de Lebesgue allège considérablement la tâche et, de plus, simplifie grandement les théorèmes d'intervertion des symboles Σ et $\int$.

D'une manière générale, une théorie de l'intégration est construite sur le principe suivant :

Un ensemble E de fonctions élémentaires que l'on sait intéger *algébriquement*

$\Downarrow$

Un procédé d'approximation des fonctions de $\widehat{\mathrm{E}}$ par celles de E

$\Downarrow$

Définition de l'intégrale sur $\widehat{\mathrm{E}}$ par un passage à la limite

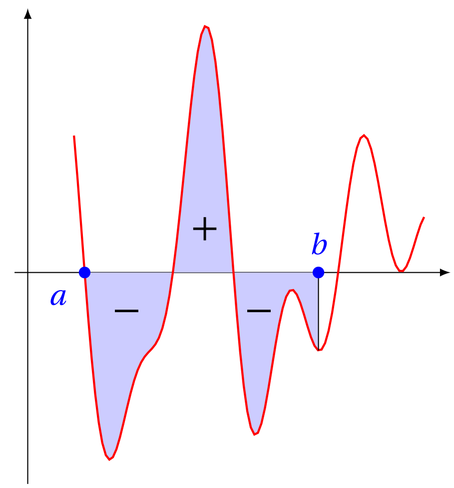
1. ie les fonctions polynomiales, les exponentielles, les logarithmes, les fonctions trigonométriques directes et réciproques.

Soit $a \leqslant b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. D'un point de vue heuristique, l'intégrale

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

est *l'aire algébrique de la surface délimité par le graphe de f et l'axe des abscisses sur le segment* $[a, b]$.

La construction choisie dans ce cours est celle de Cauchy, elle repose sur l'approximation uniforme sur un segment d'une fonction continue par morceaux par des fonctions en escalier.

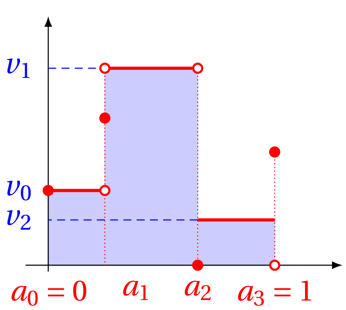


1. Intégrale des fonctions continues sur un segment

L'idée est de construire *algébriquement* l'intégrale de $\mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ puis la prolonger à $\mathscr{C}^0\big([a,b),\mathbb{R}\big)$ en exploitant l'approximation uniforme des fonctions continues par des éléments de $\mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ pour la norme infinie.

1.1. Construction de l'intégrale sur $\mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$

L'intérêt de ce type de fonctions est d'avoir une intégrale facile à définir sans recourir au moindre passage à la limite.



Considérons la fonction f en escalier sur $[0,1]$ de la figure ci-contre. Pour la subdivision (a_0, a_1, a_2, a_3) indiquée, on va poser

$$\int_0^1 f := \underbrace{(a_1 - a_0)v_0}_{\text{Aire du premier rectangle, etc.}} + (a_2 - a_1)v_1 + (a_3 - a_2)v_2$$

L'intégrale est une somme *finie* et ses propiétés relèvent de l'algèbre.

Définition 9.0. Intégrale d'une fonction en escalier

Soit a et b deux réels tels que $a < b$, $f \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ et $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ une subdivision adaptée à f.

$$\text{On pose } \int_a^b f = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) v_k \quad \text{où } v_k \text{ est la valeur de } f \text{ sur }]a_k, a_{k-1}[$$

En particulier, pour toute fonction constante égale à C sur $[a,b]$, on a $\int_a^b f = \mathrm{C}(b-a)$.

Proposition 9.1. Propriétés algébriques

Soit $(f, g) \in \mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{K}\big)^2$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

$\Rrightarrow$ Linéarité de l'intégrale : $\int_a^b \big(f + \lambda g\big) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.

⇛ Relation de Chasles : pour tout $c \in [a,b]$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Dans le cadre des fonctions en escalier, la positivité de l'intégrale est immédiate (cf. la définition 1.1 à la page 3).

Proposition 9.2. Intégrale et relation d'ordre

Soit $(f,g) \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})^2$.

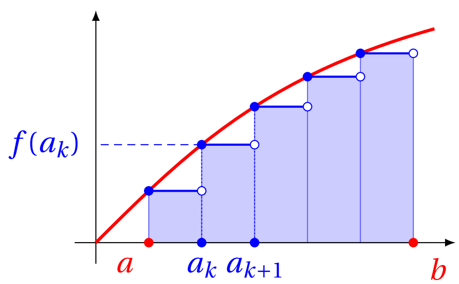
a) Si $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f \geqslant 0$;

b) Si $f \leqslant g$, alors $\int_a^b f \leqslant \int_a^b g$;

c) On a $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$;

d) On a $\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.

1.2. Prolongement à $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$



L'existence d'une suite $(f_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ convergeant vers une fonction continue initialement donnée $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ va nous permettre de définir l'intégrale de celle-ci comme limite de la suite des intégrales suivantes :

$$\int_a^b f_n$$

Définition 9.3. Définition de l'intégrale

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue et $(f_n)_{n\geqslant 0} \in \mathscr{E}([a,b],\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ telle que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{cvu}} f$.

⇛ La suite $\left(\int_a^b f_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge et sa limite est indépendante de $(f_n)_{n\geqslant 0}$.

⇛ On pose $\int_a^b f = \lim \int_a^b f_n$.

⇛ Pour $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue et tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$, on pose $\int_a^b f := \begin{cases} \int_a^b f & \text{si } a < b \\ 0 & \text{si } a = b \\ -\int_b^a f & \text{si } b < a \end{cases}$

Notation 9.4. (les différentes notations de l'intégrale)

On peut noter

$$\int_a^b f\ ,\quad \int_a^b f(t)\mathrm{d}t\ ,\quad \text{ou encore} \quad \int_{[a,b]} f$$

La troisième notation est réservée au cas où $a \leqslant b$. Dans la deuxième notation, t est la variable d'intégration (c'est une variable muette, utilisée nulle part ailleurs) : cette notation est indispensable dans le cas où des paramètres apparaissent dans l'expression f afin de les distinguer de la variable d'intégration. La fonction intégrée f est appelée l'intégrande. Cette deuxième notation fait apparaître une forme différentielle ($\omega := f(t)\mathrm{d}t$) : c'est une notation qui vient d'une théorie plus générale de l'intégration (l'intégration des formes différentielles).

Les propriétés algébriques de l'intégrale sur $\mathscr{E}\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ s'étendent à $\mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ par passage à la limite via la définition ci-dessus.

Proposition 9.5. Propriétés algébriques

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$, f, g continues sur I et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Pour tout $(a,b) \in \mathrm{I}^2$:

⇛ Linéarité de l'intégrale : $\int_a^b \big(f + \lambda g\big) = \int_a^b f + \lambda \int_a^b g$.

⇛ Relation de Chasles : pour tout $c \in \mathrm{I}$, $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Les propriétés liés à la relation d'ordre se transmettent également aux fonctions continues avec quelques précisions utiles.

Proposition 9.6. Positivité de l'intégrale et conséquences

Soit $a < b$, f et g continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a. Positivité de l'intégrale : si $f \geqslant 0$, alors $\int_a^b f \geqslant 0$.

b. Croissance : si $f \geqslant g$, alors $\int_a^b f \geqslant \int_a^b g$.

c. Précision du a) : si $f \geqslant 0$ et $\exists t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) > 0$, alors $\int_a^b f > 0$.

d. Précision du b) : si $f \geqslant g$ et s'il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que $f(t_0) > g(t_0)$, $\int_a^b f > \int_a^b g$.

e. Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est positive, alors $\int_a^b f = 0 \iff f = 0$.

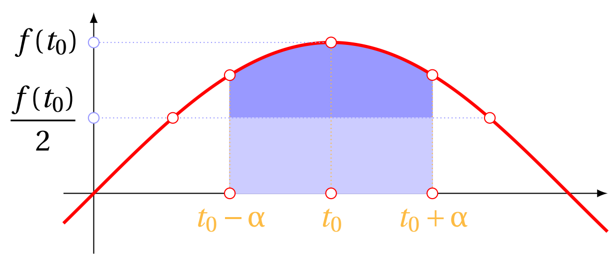
f. Inégalité triangulaire : $\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f|$.

Supposons $f \geqslant 0$ et $f(t_0) > 0$. Par continuité de f en t_0, il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,,\ f(t) \geqslant \frac{f(t_0)}{2}$$

Ainsi

$$\int_a^b f \geqslant \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} f \geqslant \int_{t_0-\alpha}^{t_0+\alpha} \frac{f(t_0)}{2} = \alpha f(t_0)$$

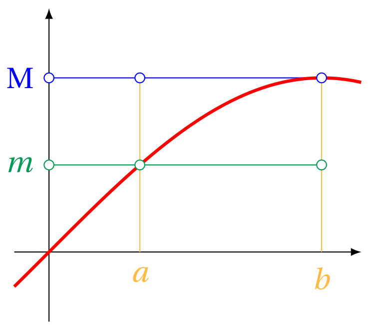


Proposition 9.7. Inégalité de la moyenne

Soit a, b, m, M des nombres réels tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^0\big([a,b],\mathbb{R}\big)$.

a) Si $m \leqslant f \leqslant \mathrm{M}$, alors $(b-a)m \leqslant \int_a^b f \leqslant (b-a)\mathrm{M}$;   b) $\left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$.

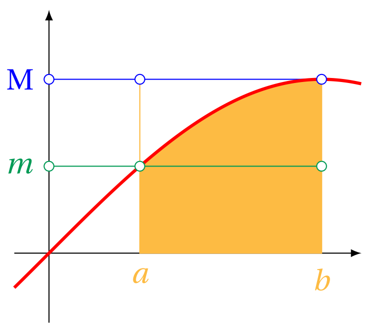
Ces résultats sont des versions intégrales de l'inégalité des accroissements finis. Leur interprétation géométrique est connue sous le nom de méthode des rectangles :

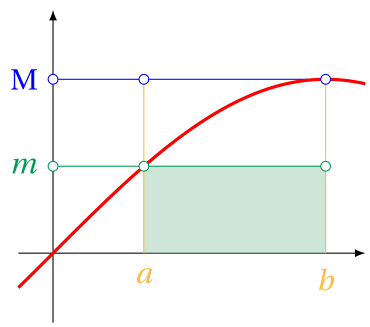


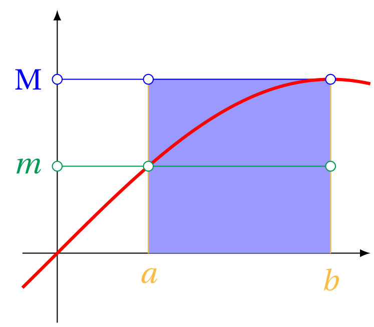
Comme $m \leqslant f(t) \leqslant \mathrm{M}$ pour $t \in [a,b]$, on a

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant \mathrm{M}(b-a)$$

L'aire sous la courbe sur $[a,b]$ est encadré par les aires des grand et petit rectangles.







Proposition 9.8. Inégalité de Cauchy-Schwarz (⚡ **9.1**)

Soit $a < b$, f et g continues sur $[a,b]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$.

a. Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\left|\int_{a^b} fg\right| \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2}\sqrt{\int_a^b g^2}$.

b. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité si et seulement si (f,g) est liée.

Cette démonstration sera généralisée au cadre des produits scalaires dans le cours ALG 14.

✘ Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 1^2\right)\left(\int_0^1 f^2\right) = \int_0^1 f^2$.

✘ Le lecteur abordera avec profit le test (⚡ **9.2**).

2. Extension aux fonctions continues par morceaux et à valeurs complexes

Il est possible d'étendre la définition de l'intégrale à une classe de fonction plus large que $\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$: l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

Définition 9.9. Fonctions continues par morceaux sur un segment

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

⇛ Une fonction $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est dite continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall i \in [\![0, n-1]\!],\ f|_{]a_i, a_{i+1}[} \text{ est continue et admet des limites réelles à droite en } a_i \text{ et à gauche en } a_{i+1}$$

⇛ Une telle subdivision est dite adaptée à la fonction continue par morceaux f.

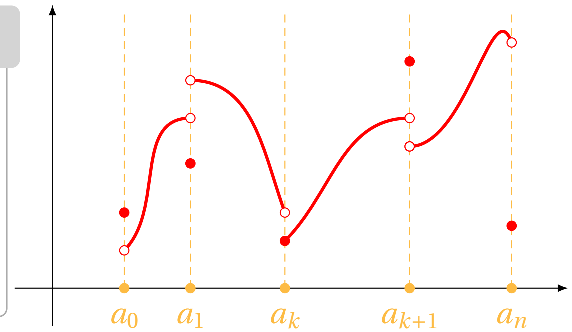
⇛ On note $\mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux.

On adapte les démonstrations précédentes pour établir que toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a,b]$ est limite uniforme d'une suite de fonctions en escalier puis définir l'intégrale comme dans le cas des fonctions continues. On peut cependant procéder de façon plus élémentaire.

Définition 9.10. Intégrale de $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$

On reprend les notations de la proposition précédente. En notant f_i le prolongement par continuité de f sur $]a_i, a_{i+1}[$ pour $i \in [\![0, n-1]\!]$, on pose

$$\int_a^b f := \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f_i$$



En particulier, si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ est continue est modifiée en un nombre fini de points de $[a,b]$, la nouvelle fonction $\widetilde{f}$ est continue par morceau et a la même intégrale que f :

$$\int_a^b f = \int_a^b \widetilde{f}$$

Les propriétés algébriques de l'intégrale restent valables sur $\mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ ainsi que les propriétés liées à la relation d'ordre à une exception près. On remarquera que pour une fonction continue par morceaux f :

$$f \geqslant 0 \text{ et } \int_a^b f = 0 \quad \not\Longrightarrow \quad f = 0$$

Mais on peut démontrer que si f est positive et d'intégrale nulle, alors l'ensemble des points où elle s'annule est fini.

Propriétés de l'intégrale des fonctions continues par morceaux

Les propositions 1.2, 1.2 (sauf c, d et e; c et d sont vrai si on ajoute l'hypothèse f et g sont continues en t_0), 1.2, 1.2 (sauf b) et 4 restent valables.

Voici une propriété qui étend la définition de l'intégrale.

Proposition 9.11. Intégrale et cvu sur un segment

Soit $(f_n)_{n\geqslant 0} \in \mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$ et $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{R})$. Si $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} f$, alors $\int_a^b f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$.

- Posons $f_n : t \longmapsto \frac{u(t)}{t+n}$ sur $[0,1]$ et $\mathrm{I}_n := \int_0^1 f_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0,1],\ \left|f_n(t)\right| = \frac{|u(t)|}{t+n} \leqslant \frac{\|u\|_\infty}{n} \quad \text{d'où} \quad \|f_n\|_\infty \leqslant \frac{\|u\|_\infty}{n}$$

  Ainsi $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVU}} \int_0^1 0 = 0$ et donc $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

- Démontrons que $\mathrm{I}_n := \int_0^1 t^n \cos(\pi t)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

  L'argument de convergence uniforme ne s'applique pas ici car la suite de fonctions définie par $f_n : t \longmapsto t^n \cos(\pi t)$ ne converge pas uniformément sur $[0,1]$ (sa limite simple n'est pas continue sur $[0,1]$). On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et t dans $[0,1]$,

$$\left|t^n\cos(\pi t)\right| \leqslant t^n \quad \text{d'où} \quad |\mathrm{I}_n| \leqslant \int_0^1 \left|t^n\cos(\pi t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_0^1 t^n\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}$$

par inégalité triangulaire et croissance de l'intégrale. Ainsi $\mathrm{I}_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par encadrement.

Il est possible d'étendre la définition de l'intégrale à des fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{C}$. La construction donnée précédemment est en fait valable pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$ (définition pour des fonctions en escalier, extension par convergence uniforme à des fonctions continues). On peut cependant définir plus simplement l'intégrale de $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ continue par morceaux.

Définition 9.12. Extension aux fonctions continues par morceaux à valeurs complexes

Pour $f \in \mathscr{C}^0_{pm}([a,b],\mathbb{C})$, on pose

$$\int_a^b f := \int_a^b \operatorname{Re} f + i\int_a^b \operatorname{Im} f$$

Autrement dit $\operatorname{Re}\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im}\int_a^b f = \int_a^b \operatorname{Im} f$.

Cette définition est fondée car f est continue par morceaux *si et seulement si* $\operatorname{Re} f$ et $\operatorname{Im} f$ le sont. Les propriétés algébriques (linéarité, Chasles) restent vraies et se démontrent sans peine à partir de la définition ci-dessus. Des propriétés liées à la relation d'ordre, il ne reste dans ce cadre que l'inégalité triangulaire :

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \int_a^b |f| \quad \text{et son corollaire} \quad \left|\int_a^b f\right| \leqslant (b-a)\|f\|_\infty$$

Avec les notations précédentes, écrivons $\int_a^b f = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Posons $g := fe^{-i\theta}$. On a alors $\int_a^b g = \rho$ donc

$$\left|\int_a^b f\right| = \rho = \int_a^b \operatorname{Re} g \underbrace{\leqslant}_{(\star)} \int_a^b |g| = \int_a^b |f|$$

où $(\star)$ découle de la croissance de l'intégrale des fonctions continues par morceaux à valeurs réelles (on a $\operatorname{Re} g \leqslant |g|$).

3. Techniques de calcul intégral

Après les aspects théoriques liés à la définition de l'intégrale, nous allons aborder la question plus pratique du calcul effectif. Le résultat clé de cette section est connu sous le nom de *théorème fondamental du calcul intégral*, dont la première démonstration remonte à Newton, et qui met en évidence un lien entre l'intégration et la dérivation via la notion de primitive.

3.1. Primitives d'une fonction sur un intervalle

Dans toute cette section, $\mathbb{K}$ désignera l'un des corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 9.13. Primitives d'une fonction

Soit I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$.

⇛ On appelle primitive de f sur I toute fonction $\mathrm{F} : \mathrm{I} \mapsto \mathbb{K}$ dérivable telle que $\mathrm{F}' = f$.

⇛ On écrira $\int f(x)\mathrm{d}x = \mathrm{F}(x)$ pour signifier que F est une primitive de f.

Proposition 9.14. Primitives

Soit un vrai intervalle I de $\mathbb{R}$ et F une primitive de $f : \mathrm{I} \to \mathbb{K}$.

a. Les primitives de f sur I sont exactement les fonctions $\mathrm{F} + k$, où k est une constante réelle.

b. Pour tout $(y_0, t_0) \in \mathbb{K} \times \mathrm{I}$, il existe une unique primitive F de f vérifiant $\mathrm{F}(t_0) = y_0$.

Sur un intervalle où les expressions sont définies :

Deux primitives utiles

a. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a}$ pour $a \neq 0$; **b.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x - a}{x + a} \right|$ pour $a \neq 0$;

Formules générales (⚡ 9.3)

a. $\displaystyle\int u'(x) u^\alpha = \frac{u^{\alpha+1}}{\alpha + 1}$ $(\alpha \neq -1)$; **b.** $\displaystyle\int \frac{u'}{u} = \ln|u|$; **c.** $\displaystyle\int u'(f' \circ u) = f \circ u$.

Fonctions circulaires (⚡ 9.4)

a. $\displaystyle\int \cos = \sin$; **b.** $\displaystyle\int \sin = -\cos$; **c.** $\displaystyle\int \tan = -\ln|\cos|$; **d.** $\displaystyle\int \mathrm{cotan} = \ln|\sin|$;

e. $\displaystyle\int \frac{1}{\cos^2} = \tan$; **f.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sin^2} = -\mathrm{cotan}$.

Logarithmes & exponentielles

a. $\displaystyle\int x^\alpha \mathrm{d}x = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; **b.** $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|$; **c.** $\displaystyle\int e^{\alpha x} \mathrm{d}x = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha}, \alpha \in \mathbb{C}^*$;

d. $\displaystyle\int \ln(x) \mathrm{d}x = x \ln x - x$; **e.** $\displaystyle\int \cosh = \sinh x$; **e.** $\displaystyle\int \sinh = \cosh$; **f.** $\displaystyle\int \tanh = \ln \cosh$;

g. $\displaystyle\int \coth = \ln|\sinh|$; **h.** $\displaystyle\int \frac{1}{\cosh^2} = \tanh$; **i.** $\displaystyle\int \frac{1}{\sinh^2} = -\coth$.

- Il faut savoir calculer des primitives des fractions du type

$$\mathrm{F}(x) :=, \frac{ux+v}{ax^2+bx+c} \quad \text{où } a \neq 0 \text{ et } (a,b,c,u,v) \in \mathbb{R}^5$$

Notons $\mathrm{P} := u\mathrm{X}+v$, $\mathrm{Q} := a\mathrm{X}^2+b\mathrm{X}+c$ et Δ le discriminant de P.

  - Cas où $\Delta > 0$. On décompose la fraction en éléments simples. Il existe $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que, sur son ensemble de définition :

$$\frac{ux+v}{ax^2+bx+c} = \frac{\lambda}{x-\alpha} + \frac{\mu}{x-\beta} \quad \text{où } \alpha \text{ et } \beta \text{ sont les racines (réelles) de P}$$

d'où $\displaystyle\int \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x = \lambda \ln|x-\alpha| + \mu \ln|x-\beta|$.

  - Cas où $\Delta = 0$. Il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que, sur son ensemble de définition :

$$\frac{ux+v}{ax^2+bx+c} = \frac{ux+v}{a(x-r)^2} = \frac{u(x-r)+v+ru}{a(x-r)^2} = \frac{u}{a(x-r)} + \frac{v+ru}{a(x-r)^2}$$

d'où $\displaystyle\int \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x = \frac{u}{a}\ln|x-r| - \frac{v+ru}{a(x-r)}\cdot$

  - Cas où $\Delta < 0$. On met le trinôme sous forme canonique. Sur son ensemble de définition :

$$\frac{ux+v}{ax^2+bx+c} = \frac{ux+v}{a\left((x-\theta)^2+\eta^2\right)} = \frac{\frac{u}{2}2(x-\theta)}{a\left((x-\theta)^2+\eta^2\right)} + \frac{u\theta+v}{a\left((x-\theta)^2+\eta^2\right)}$$

d'où $\displaystyle\int \mathrm{F}(x)\mathrm{d}x = \frac{u}{2a}\ln\left((x-\theta)^2+\eta^2\right) + \frac{u\theta+v}{a\eta}\arctan\frac{x-\theta}{\eta}\cdot$

Ces transformations permettent de se ramener à des primitives usuelles.

- Dans le cas plus général de $f := \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}$, on commence par effectuer la division euclidienne de Q par P : $\mathrm{Q} = \mathrm{P}\mathrm{Q}_1 + u\mathrm{X}+v$ on a alors $f = \mathrm{Q}_1 + \frac{ux+v}{\mathrm{P}}$ (on est ramené au point précédent).

Fractions rationnelles à pôles simples (⚡ **9.5**)

Dans le cas d'une fraction rationnelle $\frac{\mathrm{P}}{\mathrm{Q}}$ avec Q à racines simples, on effectue la division euclidienne de P par Q ($\mathrm{P} = \mathrm{Q}\mathrm{Q}_1 + \mathrm{R}_1$) puis on décompose en éléments simples $\frac{\mathrm{R}_1}{\mathrm{Q}}\cdot$

3.2. Théorème fondamental du calcul intégral

Soit une fonction continue $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ et $a \in \mathrm{I}$. On définit $\mathrm{F} : x \mapsto \int_a^x f$.

On a l'intuition que F est une primitive de f sur I. L'expression

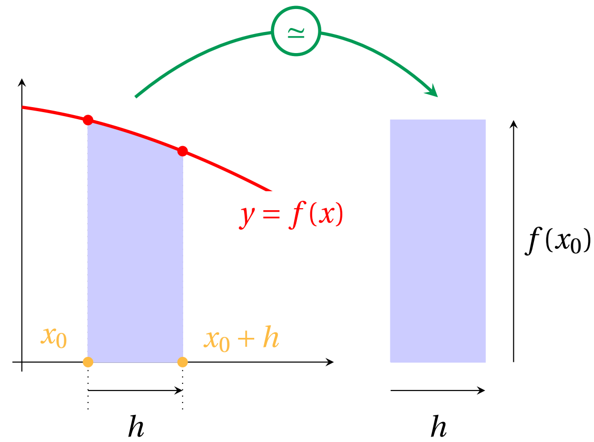
$$\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)=\int_{x_0}^{x_0+h} f(t)\,\mathrm{d}t$$

vaut approximativement l'aire d'un rectangle :

$$\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)\simeq h f(x_0)$$

On conjecture que

$$\frac{\mathrm{F}(x_0+h)-\mathrm{F}(x_0)}{h}\xrightarrow[h\to 0]{} f(x_0)$$



La première formule de la moyenne va nous permettre de formaliser cette intuition.

Lemme 9.15. Première formule de la moyenne

Soit $a<b$ et $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ une continue. Il existe $c\in[a,b]$ tel que $\int_a^b f=(b-a)f(c)$.

Ce résultat est une « *version intégrale* » du théorème des accroissements finis. Il reste valable si $a\geqslant b$ par la définition de l'intégrale selon des bornes décroissantes.

Théorème 9.16. fondamental du calcul intégral

Soit I un intervalle d'intérieur non vide, $a\in\mathrm{I}$ et $f:\mathrm{I}\to\mathbb{R}$ continue. L'application

$$\mathrm{F}:\ \begin{array}{rcl}\mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$$

est l'unique primitive de f s'annulant en a.

⇛ Autrement dit, $\mathrm{F}(a)=0$, F est dérivable sur I et, pout tout x dans I, $\mathrm{F}'(x)=f(x)$.

⇛ En particulier, toute fonction continue sur un intervalle y admet des primitives.

En travaillant avec les parties réelle et imaginaire, on prouve facilement que le 3.2 reste vrai pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Une condition suffisante mais nullement nécessaire d'existence d'une primitive

La continuité n'est pas une condition nécessaire d'existence d'une primitive. En effet, nous savons qu'il existe des fonctions F dérivables telles que F′ ne soit pas continue (cf. le chapitre AN 5).

On déduit du théorème fondamental le lien entre intégrales et primitives.

Proposition 9.17. Primitives et calcul intégral (⚡ 9.6)

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{K}$ continue et F une primitive. On a alors

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \big[\mathrm{F}(t)\big]_a^b \quad \text{où l'on a noté classiquement} \quad \big[\mathrm{F}(t)\big]_a^b := \mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)$$

En particulier, pour toute fonction $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on a $\displaystyle\int_a^b f'(t)\mathrm{d}t = f(b)-f(a)$.

- Calculons par exemple $\mathrm{J}_1 := \displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x^2-x+1}\mathrm{d}x$.

  On applique la méthode de primitivation vue précédemment d'une fraction rationnelle :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \frac{x}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2-x+1} = \frac{1}{2}\,\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{1}{2}\,\frac{1}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

  d'où, par imparité de l'arctangente :

$$\mathrm{J}_1 = \left[\frac{1}{2}\ln\left(x^2-x+1\right)+\frac{1}{2}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right)\right]_0^1 = \frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

- Le passage sur $\mathbb{C}$ peut rendre les mêmes services que dans le cas des sommes lorsque f est plus simple à primitiver que $\mathrm{Re}\, f$ ou $\mathrm{Im}\, f$.

  Considérons par exemple $\mathrm{J}_2 := \int_0^\pi e^x\cos(x)\mathrm{d}x$. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{J} &= \int_0^\pi \mathrm{Re}\left(e^x e^{ix}\right)\mathrm{d}x = \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi e^x e^{ix}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left(\int_0^\pi e^{(1+i)x}\mathrm{d}x\right) = \mathrm{Re}\left[\frac{e^{(1+i)x}}{1+i}\right]_0^\pi \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{e^{(1+i)\pi}-1}{1+i}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{-e^\pi-1}{1+i}\right) = -(e^\pi+1)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+i}\right) = -(e^\pi+1)\,\mathrm{Re}\left(\frac{1-i}{2}\right) = -\frac{e^\pi+1}{2}\end{aligned}$$

Intégrales fonctions de leurs bornes (⚡ **9.7**)

Soit I et J deux vrais intervalles de $\mathbb{R}$, $f : \mathrm{I}\to\mathbb{C}$ continue, $u : \mathrm{J}\to\mathrm{I}$ et $v : \mathrm{J}\to\mathrm{I}$ deux fonctions dérivable. Alors la fonction définie sur J par

$$g : x\mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\mathrm{d}t \ \text{ est dérivable sur J et, } \ \forall x\in\mathrm{J},\ g'(x) = v'(x)f\big(v(x)\big) - u'(x)f\big(u(x)\big)$$

- Considérons la fonction ϕ définie par $\phi(x) := \displaystyle\int_x^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$ sur $]1,+\infty[$.

  - Comme $f : t\mapsto (\ln t)^{-1}$ définie sur $]1,+\infty[$ est continue et les fonctions $x\mapsto x$ et $x\mapsto x^2$ sont dérivables sur $]1,+\infty[$ et à valeurs dans $]1,+\infty[$. En notant F une primitive de f sur $]1,+\infty[$, on a donc $\forall x>1,\ \phi(x) = \mathrm{F}\left(x^2\right)-\mathrm{F}(x)$.
  - La fonction ϕ est donc dérivable en tant que combinaison linéaire de fonctions dérivables ($x\mapsto \mathrm{F}\left(x^2\right)$ étant dérivable en tant que composée de fonctions dérivables) et

$$\forall x>1,\ \phi'(x) = 2x\mathrm{F}'\left(x^2\right)-\mathrm{F}'(x) = 2xf\left(x^2\right)-f(x) = \frac{x-1}{\ln x}$$

- Le lecteur poursuivra par le test (⚡ **9.8**).

3.3. La formule d'intégration par parties

La formule suivante est la *version intégrale* de la formule de dérivation d'un produit de fonctions.

Proposition 9.18. Intégration par parties (⚡ **9.9**)

Soit u et v deux fonctions définies sur un segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On a alors

$$\int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = \left[u(t)v(t)\right]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t$$

- Une intégration par parties permet de calculer une intégrale dans le cas où aucune primitive simple ne saute aux yeux. Le principe est de *se débarrasser* d'une fonction en la dérivant. C'est très utile dans le cas de l'arctangente et du logarithme dont les dérivées sont des fractions rationnelles simples. Par exemple, pour $x>0$,

$$\int_1^x (\ln t)\mathrm{d}t = \left[t\ln t\right]_1^x - \int_1^x \mathrm{d}t = x\ln x - x + 1$$

  en appliquant la formule aux fonctions $t \mapsto t$ et $t \mapsto \ln t$ de classe $\mathscr{C}^1$. On déduit du théorème fondamental que $x \mapsto x\ln x - x$ est une primitive de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.

- Cette formule admet une version itérée pour des fonctions de classe supérieure à un. Par exemple, pour u et v de classe $\mathscr{C}^2$:

$$\int_a^b u''v = \left[u'v\right]_a^b - \int_a^b u'v' = \left[u'v - uv'\right]_a^b + \int_a^b uv''$$

  Par exemple, on obtient

$$\mathrm{I} = \int_1^e x^2\ln(x)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^4}{12x}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x^4}{12x^2}\mathrm{d}x = \frac{2e^3}{9} + \frac{1}{9}$$

  On peut aussi en déduire ce calcul « magique » de $\mathrm{J} := \displaystyle\int_0^\pi e^x\cos(x)\mathrm{d}x$:

$$\mathrm{J} = \int_0^\pi e^x\cos(x)\mathrm{d}x = \left[e^x\cos x + e^x\sin x\right]_0^\pi - \int_0^\pi e^x\cos(x)\mathrm{d}x \ \text{ d'où } \mathrm{J} = -\frac{1+e^\pi}{2}$$

- L'intégration par parties permet d'obtenir des relations de récurrence de certaines suites d'intégrales, par exemple celles de Wallis, $\mathrm{W}_n := \int_0^{\pi/2}\sin^n(t)dt$ pour $n \in \mathbb{N}$. Fixons $n \geqslant 2$. On déduit de la formule d'intégration par parties pour les fonctions $t \mapsto \sin t$ et $t \mapsto (\sin t)^{n-1}$ de classe $\mathscr{C}^1$:

$$\begin{aligned}\mathrm{W}_n &= \left[-(\cos t)(\sin t)^{n-1}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos t)^2(\sin t)^{n-2}\mathrm{d}t = (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1-\sin^2 t\right)(\sin t)^{n-2}\mathrm{d}t \\ &= (n-1)(\mathrm{W}_{n-2} - \mathrm{W}_n)\end{aligned}$$

  On en déduit que $n\mathrm{W}_n = (n-1)\mathrm{W}_{n-2}$. Ainsi

$$\mathrm{W}_{2n} = \frac{2n-1}{2n}\mathrm{W}_{2n-2} = \frac{2n-1}{2n}\,\frac{2n-3}{2n-2}\mathrm{W}_{2n-4} = \cdots = \frac{(2n-1)(2n-3)\times\cdots\times 1}{(2n)(2n-2)\times\cdots\times 2}\mathrm{W}_0 = \frac{(2n)!}{\left(2^n n!\right)^2}\,\frac{\pi}{2}$$

$$\mathrm{W}_{2n+1} = \frac{2n}{2n+1}\mathrm{W}_{2n-1} = \frac{2n}{2n+1}\,\frac{2n-2}{2n-1}\mathrm{W}_{2n-3} = \cdots = \frac{(2n)(2n-2)\times\cdots\times 2}{(2n+1)(2n-1)\times\cdots\times 3}\mathrm{W}_1 = \frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n+1)!}$$

- Le lecteur pourra continuer avec le test (⚡ **9.10**).

3.4. La formule du changement de variable

La formule suivante est la *version intégrale* de la formule de dérivation d'une composée de fonctions.

Proposition 9.19. Formule du changement de variable (⚡ **9.11**)

Pour ϕ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I (vrai intervalle de $\mathbb{R}$), f continue sur $\phi(\mathrm{I})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, et $(a,b) \in \mathrm{I}^2$,

$$\int_{\phi(a)}^{\phi(b)} f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\mathrm{d}t$$

✘ L'idée est donc d'écrire la variable x sous la forme $x = \phi(t)$ avec ϕ de classe $\mathscr{C}^1$, c'est pour cette raison que l'on dit effectuer le changement de variable $x = \phi(t)$ avec $t \in \mathrm{I}$. Par le théorème précédent, on obtient une nouvelle intégrale, dont les bornes ont en général changé, et où l'on a remplacé $f(x)\mathrm{d}x$ par $f\big(\phi(t)\big)\phi'(t)\mathrm{d}t$, soit $f(x)$ par $f\big(\phi(t)\big)$ et $\mathrm{d}x$ par $\phi'(t)\mathrm{d}t$. En pratique, on rédige de la façon suivante :

- ✔ Calculons $\mathrm{J}_1 := \displaystyle\int_0^4 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1}$ par le changement de variable $x = t^2$ pour $t \in [0,2]$.

  L'application $t \mapsto t^2$ est bien de classe $\mathscr{C}^1$ et $\dfrac{1}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{1}{t+1}$ et $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$ d'où

  $$\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1} = \frac{2t}{t+1}\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \mathrm{J}_1 = \int_0^2 \frac{2t}{t+1}\mathrm{d}t = 2\int_0^2 \frac{t+1-1}{t+1}\mathrm{d}t = 2\big[t - \ln(t+1)\big]_0^2 = 4 - 2\ln 3$$

  On peut donner un sens à $\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1} = \dfrac{2t}{t+1}\mathrm{d}t$ au sein de la théorie des formes différentielles.

  Bien qu'elle ne soit pas au programme des classes préparatoires, nous prendrons l'habitude de rédiger ainsi les changements de variables.

- ✔ Calculons $\mathrm{J}_2 := \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^2 \frac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t$ en posant $t = \dfrac{1}{u}$ (changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$).

  Comme $\mathrm{d}t = -\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2}$, on a $\dfrac{\ln t}{t^2+1}\mathrm{d}t = -\dfrac{\ln\frac{1}{u}}{1+\frac{1}{u^2}}\dfrac{\mathrm{d}u}{u^2} = \dfrac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u$ d'où

  $$\mathrm{J}_2 = \int_2^{\frac{1}{2}} \frac{\ln u}{u^2+1}\mathrm{d}u = -\mathrm{J}_2 \ \text{ par la formule du changement de variable, d'où } \ \mathrm{J}_2 = 0$$

- ✔ Un changement de variable a pour objectif de faire « apparaître » des primitives usuelles.

  Considérons par exemple $\mathrm{J}_3 := \int_0^2 \sqrt{4-t^2}\mathrm{d}t$.

  Afin de *simplifier* la racine qui « gêne » le calcul de primitive, on pose $t = 2\sin\theta$ pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, expression de classe $\mathscr{C}^1$. La nouvelle différentielle vaut $\mathrm{d}t = 2\cos\theta\mathrm{d}\theta$ d'où

  $$\mathrm{J}_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\cos^2\theta\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2\theta)\mathrm{d}\theta = \pi$$

✔ On peut également appliquer la formule du changement de variable « en sens inverse » : on n'écrit pas x comme fonction de t mais on pose t comme fonction de x.

- Calculons $\mathrm{J}_4 := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$ en posant $u = \sin x$ pour $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ (de classe $\mathscr{C}^1$).

  Il faut ici retrouver la fonction f à laquelle on va appliquer le théorème du changement de variable. Pour cela, on calcule la forme différentielle

$$\frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \frac{(\cos x)\mathrm{d}x}{(\cos x)^2} = \frac{(\cos x)\mathrm{d}x}{1-(\sin x)^2} = \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$$

  Ainsi $\mathrm{J}_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \left[-\frac{1}{2}\ln\frac{1-u}{1+u}\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2}\ln\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$.

  On applique en fait le changement de variable à l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2}$.

- Calculons $\mathrm{J}_5 := \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t$ par $u = t - \dfrac{1}{t}$ (de classe $\mathscr{C}^1$). On a $\mathrm{d}u = \frac{1+t^2}{t^2}\,\mathrm{d}t$, $u^2 = \frac{t^4+1}{t^2} - 2$ et

$$\frac{1+t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \frac{t^2}{t^4+1}\,\frac{1+t^2}{t^2}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}$$

  Ainsi $\mathrm{J}_4 = \displaystyle\int_{-\frac{3}{2}}^{0} \frac{\mathrm{d}u}{u^2+2} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\right]_{-\frac{3}{2}}^{0} = \arctan\frac{3}{2\sqrt{2}}$.

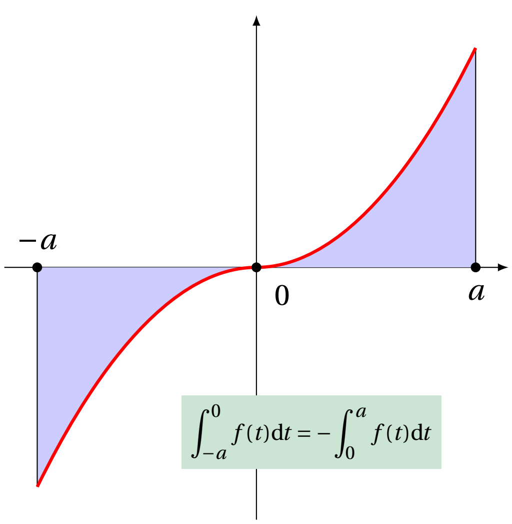
✔ Le lecteur s'entraînera en résolvant le test (⚡ **9.12**).

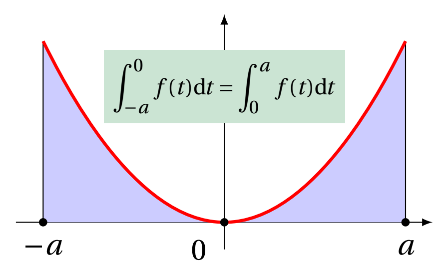
Les symétries de parité, imparité et T-périodicité peuvent se démontrer au moyen des changements de variable naturels dans ce contexte : $u = -x$ et $u = x + \mathrm{T}$.

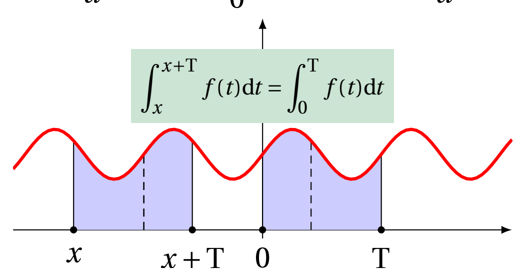
Proposition 9.20. Symétries et intégrales

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}$ continue. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a $\displaystyle\int_{-a}^{a} f = 2\int_0^a f$, si f est paire,

$$\int_{-a}^{a} f = 0 \text{ si } f \text{ est impaire et } \int_0^{\mathrm{T}} f = \int_a^{a+\mathrm{T}} f \text{ si } f \text{ est T-périodique}$$







Il ne faut pas perdre du temps en effectuant des calculs complexes là où les symétries permettent de conclure. Par exemple,

$$\int_{-1}^{1} \frac{u}{u^4+1}\mathrm{d}u = 0$$

car la fonction intégrée est impaire et l'intervalle d'intégration symétrique par rapport à 0.

4. Sommes de Riemann

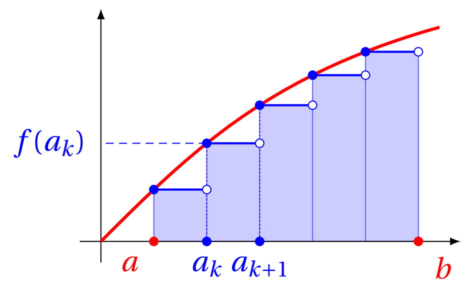
Les sommes de Riemann sont les sommes d'aires de rectangles que nous avons utilisées pour définir l'intégrale d'une fonction continue sur un segment :

$$\mathrm{S}_n(f) := \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=a_{k+1}-a_k} \underbrace{f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)}_{=f(a_k)} = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)$$

Par la construction de l'intégrale que nous avons choisie, la justification de la propriété

$$\mathrm{S}_n(f) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f$$

découle *directement* de la définition.



Proposition 9.21. Convergence des sommes de Riemann (9.13)

Pour tout $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continue, on a

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Cette proposition connaît de nombreuses variantes, comme par exemple :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f(t)\mathrm{d}t$$

Ceci découle de 4 en remarquant que $\dfrac{f\left(a+n\frac{b-a}{n}\right)}{n} = \dfrac{f(b)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\dfrac{f(a)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Plus généralement, si on supprime k rectangles, où k est indépendant de n, la somme converge encore vers l'intégrale de f sur $[a,b]$ car les aires supprimées tendent vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

✘ Démontrons que $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ln 2$. On remarque pour cela que

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{1+\frac{k}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+1} = \ln 2$$

✘ On peut aussi obtenir des équivalents. Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$, posons $u_n := \sum_{k=0}^{n} k^\alpha$. On a

$$\frac{u_n}{n^{\alpha+1}} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^\alpha \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 t^\alpha \mathrm{d}t = \frac{1}{1+\alpha}$$

Comme cette limite est non nulle, on en déduit l'équivalent $u_n \sim \dfrac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}\cdot$

5. Formule de Taylor avec reste intégral

Proposition 9.22. Formule de Taylor avec reste intégral

Soit I vrai intervalle, $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur I et $x_0 \in \mathrm{I}$. Pour tout x dans I

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

Cette formule est la première d'une série de trois que nous établirons dans le chapitre dédié aux développements limités. L'expression intégrale est appelée reste intégral de f d'ordre n en x_0 :

$$\mathrm{R}_n(f, x_0, x) = \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

En cas d'oubli de cette formule et hésitation entre les expressions $(x-t)^n f^{(n)}(t)$, $(x-t)^{n+1} f^{(n)}(t)$, on se souviendra que la formule s'écrit $f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^{x} f'$ au rang $n = 0$.

✘ Pour tout réel x et n dans $\mathbb{N}$, on déduit de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à l'exponentielle en 0 à l'ordre n que

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t \mathrm{d}t$$

On en déduira prochainement que $\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^x$.

✘ Pour f de classe $\mathscr{C}^\infty$, on pose

$$\mathrm{L}(f) : x \mapsto \int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

On déduit du théorème fondamental que $\mathrm{L}(f)$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ en tant que primitive de f sur $\mathbb{R}$. De plus, par linéarité de l'intégrale, L est un endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et f de classe $\mathscr{C}^\infty$, $\mathrm{L}^n(f)$ est une primitive n-ème de f. On déduit de la formule de Taylor avec reste intégral appliquée à $\mathrm{L}^n(f)$ en 0 à l'ordre $n-1$ que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,,\ \forall x \in \mathbb{R}\,,\ \mathrm{L}^n(f)(x) = \int_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} f(t)\mathrm{d}t$$

car toutes les dérivées d'ordre inférieur à $n-1$ de $\mathrm{L}^n(f)$ sont nulles en 0.

6. Tests

9.1.

Soit $f,g:[0,1]\to\mathbb{R}_+$ continues telles que $fg\geqslant 1$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t\int_0^1 g(t)\mathrm{d}t\geqslant 1$.

9.2.

Soit $f\in\mathscr{C}^1\big([0,1],\mathbb{R}\big)$ telle que $f(0)=0$. Montrer que $\forall x\in[0,1],\ \left|f(x)\right|\leqslant\sqrt{\displaystyle\int_0^1\big(f'(t)\big)^2\mathrm{d}t}$.

9.3.

Déterminer l'unique primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 1 de $x\mapsto\dfrac{2x}{(1+x^2)^2}$.

9.4.

Déterminer l'unique primitive sur $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ qui s'annule en $\frac{\pi}{3}$ de la tangente.

9.5.

Calculer une primitive sur $]1,+\infty[$ puis la centième dérivée de $f:x\mapsto\dfrac{x^2+1}{x^3-x}$ (trivium d'Arnold).

9.6.

Déterminer un équivalent de $u_n=\displaystyle\int_{n^2}^{n^3}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}$.

9.7.

Établir la dérivabilité puis calculer la dérivée de $\psi:x\mapsto\int_{e^{-x}}^{e^x}\sqrt{1+\ln^2 t}\,\mathrm{d}t$.

9.8.

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. Établir la dérivabilité puis calculer la dérivée de $\psi:x\mapsto\int_0^1 f(t+x)\mathrm{d}t$.

9.9.

Calculer $\mathrm{I}:=\int_0^1 x\arctan(x)\mathrm{d}x$.

9.10.

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose $\mathrm{I}_n:=\int_0^1 t^n\sqrt{1-t}\,\mathrm{d}t$.

a. Trouver une relation de récurrence entre I_{n-1} et I_n.

b. Calculer I_0 puis I_n pour tout $n\in\mathbb{N}$.

9.11.

Calculer $\mathrm{I}:=\int_{-1}^1\arcsin^2(x)\mathrm{d}x$.

9.12.

Calculer $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\tan^2 x}}$ en posant $u=\sin x$.

9.13.

Étudier le comportement asymptotique de $u_n:=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{n}{k^2+n^2}$.

7. Solutions

9.1.

Il suffit d'appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz à $\sqrt{f}$ et $\sqrt{g}$.

9.2.

Soit $x \in [0,1]$. On commence par remarquer que

$$f(x) = f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\mathrm{d}t$$

puis on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$|f(x)| \leqslant \underbrace{\sqrt{\int_0^x \mathrm{d}t}}_{\leqslant 1}\ \underbrace{\sqrt{\int_0^x \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t}}_{\leqslant \sqrt{\int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 \mathrm{d}t}}$$

9.3.

La fonction de la forme u'/u^2 avec $u : x \mapsto 1+x^2$. Ainsi,

$$\int \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}\mathrm{d}x = -\frac{1}{1+x^2}$$

On fixe la constante en imposant à la primitive de s'annuler en 1 :

$$x \mapsto \frac{1}{2} - \frac{1}{1+x^2}$$

9.4.

Comme $\tan = -\cos'/\cos$,

$$\int \tan(x)\mathrm{d}x = -\ln|\cos(x)|$$

On fixe la constante en imposant à la primitive de s'annuler en $\pi/3$:

$$x \mapsto -\ln|\cos(x)| - \ln(2)$$

9.5.

On décompose en éléments simples :

$$f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)(x+1)x} = (x-1)^{-1} + (x+1)^{-1} - x^{-1}$$

puis on dérive,

$$f^{(100)}(x) = 100!\left((x-1)^{-101} + (x+1)^{-101} - x^{-101}\right)$$

9.6.

On a $u_n = \arctan n^3 - \arctan n^2$. Or si $n > 0$, n^2 et n^3 son strictement positifs d'où

$$\begin{cases} \arctan n^2 = \dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{1}{n^2} \\[2ex] \arctan n^3 = \dfrac{\pi}{2} - \arctan \dfrac{1}{n^3} \end{cases}$$

Ainsi

$$u_n = \arctan \frac{1}{n^2} - \arctan \frac{1}{n^3}$$

pour $n \geqslant 1$. Comme $\arctan u \sim u$, $\arctan \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}$ et $\arctan \frac{1}{n^3} \sim \frac{1}{n^3}$. De plus, $\frac{1}{n^3} = \mathrm{o}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ donc

$$u_n \sim \frac{1}{n^2}$$

9.7.

La fonction $t \mapsto \sqrt{1+\ln^2 t}$ étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto e^{-x}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, sur cet intervalle,

$$\begin{aligned} \psi'(x) &= e^x\sqrt{1+x^2} + e^{-x}\sqrt{1+x^2} \\ &= 2\cosh(x)\sqrt{1+x^2} \end{aligned}$$

9.8.

Effectuons le changement de variable de classe $\mathscr{C}^1$ $t = u - x$. On obtient

$$\psi(x) = \int_x^{x+1} f(t)\mathrm{d}t$$

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$, ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle,

$$\psi'(x) = f(x+1) - f(x)$$

9.9.

Par une IPP immédiate :

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \left[\frac{x^2\arctan(x)}{2}\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2\mathrm{d}x}{x^2+1}\\ &= \frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

9.10.

a. Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Intégrons par parties...

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,t^n\right]_0^1\\ &\quad+\frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{2n}{3}\int_0^1 t^{n-1}(1-t)\sqrt{1-t}\mathrm{d}t\\ &= \frac{2n}{3}(\mathrm{I}_{n-1}-\mathrm{I}_n)\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{I}_n = \dfrac{2n}{2n+3}\mathrm{I}_{n-1}$.

Commentaire

Les intégrations par parties sont légitimes car les fonctions en jeu sont toutes de classe $\mathscr{C}^1$.

b. On a

$$\mathrm{I}_0 = \left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

Par une récurrence immédiate , on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_n &= \frac{(2n)\cdots(2)}{(2n+3)\cdots(5)}\mathrm{I}_0 = \frac{(2n)\cdots(2)}{(2n+3)\cdots(5)}\,\frac{2}{3}\\ &= \frac{2^{n+1}n!}{\frac{(2n+4)!}{2^{n+2}(n+2)!}} = 2^{2n+3}\frac{n!(n+2)!}{(2n+4)!}\end{aligned}$$

9.11.

Posons $x=\sin(\theta)$ pour $u\in[-\pi/2,\pi/2]$, on a alors $\mathrm{d}x=\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$ et

$$\begin{aligned}\int_{-1}^1 \arcsin^2(x)\mathrm{d}x &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2}\theta^2\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= 2\int_0^{\pi/2}\theta^2\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

Notons I l'intégrale à calculer. Effectuons des intégrations parties :

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= 2[\theta^2\sin(\theta)]_0^{\pi/2}\\ &\quad -2\int_0^{\pi/2} 2\theta\sin(\theta)\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi/2} 2\theta\sin(\theta)\mathrm{d}\theta &= [-2\theta\cos(\theta)]_0^{\pi/2}\\ &\quad+\int_0^{\pi/2}2\cos(\theta)\mathrm{d}\theta\\ &= 2\end{aligned}$$

D'où $\mathrm{I}=\dfrac{\pi^2}{2}-4$.

9.12.

On remarque que

$$\mathrm{I} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{2+\tan^2(x)}} = \int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos(x)\mathrm{d}x}{\sqrt{2-\sin^2(x)}}$$

Effectuons le changement de variable bijectif de $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ sur $\left[0,1/\sqrt{2}\right]$ et de classe $\mathscr{C}^1$ $u=\sin(x)$. On obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{I} &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{2-u^2}} = \left[\arcsin\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\ &= \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

9.13.

On reconnaît une somme de Riemann (un peu déguisée) pour la fonction continue sur $[0,1]$ définie par $t\longmapsto(1+t^2)^{-1}$:

$$u_n = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\frac{1}{1+(k/n)^2}}\xrightarrow[n\to+\infty]{}\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}$$

et donc $u_n\xrightarrow[n\to+\infty]{}\dfrac{\pi}{4}$.