MATHÉMATIQUES, TRAVAUX DIRIGÉS

Jeudi 12 septembre 2024

- *L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.*
- *Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.*
- *Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.*
- *Le candidat laissera libre la première page de sa copie.*
- *Je m'autorise à enlever des points à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :*

souligner les justifications essentielles et *encadrer les résultats importants*

A. UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big(f(x)f(y)\big) + f(x+y) = f(xy) \quad \textbf{(E)}$$

Une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite injective si elle vérifie $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ h(\alpha) = h(\beta) \implies \alpha = \beta$.

Partie I – Propriétés générales des solutions de (E)

1. Déterminer les solutions affines de (**E**).

Dans toute la suite de cette partie, on considère une fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle (**E**).

2. On pose $z := f(0)^2$. Démontrer que $f(z) = 0$.

3. Montrer que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$.

4. Montrer que la fonction $-f$ vérifie également (**E**).

5. Dans cette question, on suppose de plus que $f(0) > 0$.

a. Montrer $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) \neq 0$. INDICATION : S'aider d'un réel y tel que $x + y = xy$.

b. En déduire $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$.

c. Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) - 1$ puis en déduire la valeur de $f(x+n)$ pour tout (x,n) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$.

d. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$. Démontrer que $a = 0$.

e. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\big(f(x)\big) = 1 - f(x)$. En déduire $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie II – L'injectivité qui règle tout

1. Dans cette question, on suppose que f est une solution injective de (**E**) vérifiant $f(0) > 0$.

Déduire de la question I.5.e. l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

2. On pose $\mathscr{C} := \left\{ (x + y, xy)\,;\, (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Soit $(s, p) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(s, p) \in \mathscr{C}$.

b. Démontrer que $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \ , \ \ \exists n \in \mathbb{N} \ \ , \ \ (\alpha + n + 1, \beta + n) \in \mathscr{C}$.

c. En déduire que toute fonction f vérifiant (**E**) et $f(0) > 0$ est injective.

d. En utilisant ce qui précède, déterminer complètement les fonctions f vérifiant (**E**).

CORRIGÉ

1. UNE ÉQUATION FONCTIONNELLE

Partie I – Propriétés générales des solutions de (E)

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\quad f(x) := ax+b$. Soit $(x,y)\in\mathbb{R}^2$. On a

$$\begin{aligned} f\big(f(x)f(y)\big)+f(x+y)-f(xy) &= af(x)f(y)+b+a(x+y)+b-axy-b \\ &= a(ax+b)(ay+b)+a(x+y)-axy+b \\ &= \big(a^3-a\big)xy+\big(a^2b+a\big)(x+y)+ab^2+b \end{aligned}$$

▷ Supposons f solution de (**E**).

† En choisissant $x=y=0$, on aboutit à $ab^2+b=0$.

† Puis, en considérant $(x,y)=(1,-1)$, on obtient $a^3-a=0$.

† Finalement, par le choix $(x,y)=(1,0)$, on arrive à $a^2b+a=0$.

Réciproquement, si $ab^2+b=a^3-a=a^2b+a=0$, alors f est clairement solution de (**E**).

▷ Comme $a^3-a=0$ équivaut à $a\in\{-1,0,1\}$, on en déduit que :

$$\begin{aligned} \begin{cases} ab^2+b &= 0 \\ a^3-a &= 0 \\ a^2b+a &= 0 \end{cases} &\iff \begin{cases} a &= 0 \\ b &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= 1 \\ b^2+b &= 0 \\ b+1 &= 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} a &= -1 \\ -b^2+b &= 0 \\ b-1 &= 0 \end{cases} \\ &\iff (a,b)=(0,0) \text{ ou } (a,b)=(1,-1) \text{ ou } (a,b)=(-1,1) \end{aligned}$$

Ainsi, les seules solutions affines de (**E**) sont les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$x\mapsto 0,\ x\mapsto 1-x \ \text{ et } \ x\mapsto x-1$$

2. Par (**E**), on a $f\big(f(0)f(0)\big)+f(0) = f(0)$ d'où $f(z)=0$.

3. Supposons que $f(0)=0$. Soit $t\in\mathbb{R}$. On a $f\big(f(t)f(0)\big)+f(t) = f(0)$ d'où $f(t)=0$. Ainsi f est la fonction nulle.

4. Soit x et y dans $\mathbb{R}^2$. On a

$$-f\big(f(x)f(y)\big)-f(x+y) = -f(xy)$$

Comme $-f(x)\times -f(y)=f(x)f(y)$, on en déduit que la fonction $-f$ vérifie également (**E**).

5. a. Soit $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$. Posons $y:=\frac{x}{x-1}$, de sorte que $x+y=xy$. Par l'équation (**E**), on a

$$f\big(f(x)f(y)\big)+f(x+y) = f(xy)$$

d'où $f\big(f(x)f(y)\big)=0$. Comme $f(0)\neq 0$ par hypothèse, on en déduit que $f(x)f(y)\neq 0$ puis $f(x)\neq 0$.

b. On a démontré au I.2. que $f(z)=0$. On déduit donc de la question précédente que $z=1$, i.e. $f(0)^2=1$. Comme $f(0)>0$ par hypothèse, on a $f(0)=1$. Comme

$$f\big(f(0)f(0)\big)+f(0) = f(0)$$

on a de plus $f(1)=0$.

c. Soit x dans $\mathbb{R}$. Par l'équation (**E**), on a

$$f\left(f(x)f(1)\right) + f(x+1) = f(x)$$

Comme $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$, on en déduit que $f(x+1) = f(x)-1$. Démontrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $f(x+n) = f(x) - n$.

- ▷ La relation est clairement vraie au rang 0.
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $f(x+n) = f(x) - n$. On a $f(x+n+1) = f(x+n) - 1 = x - (n+1)$, d'où la relation au rang n.

d. Par la question précédente, on a $f(a+1) = f(a) - 1 = 0$. On déduit de la question I.5.a. que $a+1 = 1$, i.e. $a = 0$.

e. Soit x un réel. Par l'équation (**E**) :

$$f\left(f(x)f(0)\right) + f(x+0) = f(x \times 0) = f(0)$$

Comme $f(0) = 1$, on en déduit que $f\big(f(x)\big) + f(x) = 1$. Ainsi $\forall u \in \mathbb{R}\ ,\quad f\big(f(u)\big) = 1 - f(u)$. En appliquant cette propriété à $f(x)$, on obtient :

$$f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = 1 - f\big(f(x)\big) = f(x)$$

Partie II – L'injectivité qui règle tout

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Par le I.4.e., on a $f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f(x)$. Par injectivité de f, on obtient $f\big(f(x)\big) = x$. Ainsi, d'après la même question :

$$f(x) = 1 - f\big(f(x)\big) = 1 - x$$

2. a. Démontrons que $\left(\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 + x_2 = s \ \text{ et } \ x_1 x_2 = p\right) \iff s^2 \geqslant 4p$.

- ▷ Soit x_1 et x_2 des réels tels que $x_1 + x_2 = s$ et $x_1 x_2 = p$. On a alors $x_1(s - x_1) = p$ donc $x_1^2 - s x_1 + p = 0$. Le trinôme $x^2 - sx + p$ admettant une racine réelle, son discriminant est nécessairement positif, i.e. $s^2 \geqslant 4p$.
- ▷ Supposons $s^2 \geqslant 4p$. Le trinôme $x^2 - sx + p$ ayant un discriminant Δ positif, il admet deux racines $x_1 = \frac{s+\sqrt{\Delta}}{2}$ et $x_1 = \frac{s-\sqrt{\Delta}}{2}$ d'où

$$x_1 + x_2 = p \ \text{ et } \ x_1 x_2 = \frac{s^2 - \Delta}{4} = p$$

b. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. On a

$$(\alpha + n + 1)^2 - 4(\beta + n) = n^2 \left(\left(1 + \frac{\alpha+1}{n}\right)^2 - \frac{4\beta}{n^2} - \frac{4}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$$

car $n^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$ et $\left(1 + \frac{\alpha+1}{n}\right)^2 - \frac{4\beta}{n^2} - \frac{4}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(\alpha + n + 1)^2 - 4(\beta + n) \geqslant 0$, i.e. $(\alpha + n + 1, \beta + n) \in \mathscr{C}$.

c. Soit f une solution de (**E**) tel que $f(0) > 0$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tels que $f(\alpha) = f(\beta)$. Par la question précédente, il existe n dans $\mathbb{N}$ tel que $(\alpha + n + 1, \beta + n)$ appartienne à $\mathscr{C}$. Comme

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) - 1$$

on déduit de l'égalité $f(u) = f(v)$ par une récurrence facile que $\forall k \in \mathbb{N},\ f(u+k) = f(v+k)$. On note (x, y) un couple de réels tel que $(\alpha+n+1, \beta+n) = (x+y, xy)$.

Comme $f(\alpha+n+1) = f(\beta+n) - 1 = f(\beta+n) - 1$, on a

$$f\big(f(x)f(y)\big) + f(\alpha+n+1) = f(\beta+n)$$

d'où $f\big(f(x)f(y)\big) = 1$. On déduit de la question I.5.d. que $f(x)f(y) = 0$. Si $f(x) = 0$, alors $x = 1$ d'où $(\alpha+n+1, \beta+n) = (y+1, y)$ et finalement $y = \beta+n = \alpha+n$ d'où $\alpha = \beta$. On aboutit à la même conclusion dans le cas où $f(y) = 0$.

d. Il s'agit de terminer l'analyse entreprise dans plusieurs des questions précédentes puis de faire la synthèse.

- ▷ Analyse. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (**E**).
  - † Cas 1 : $f(0) = 0$. On déduit de la question I.3. que f est la fonction nulle.
  - † Cas 2 : $f(0) > 0$. On déduit des questions II.1. et II.2.c. que $f : x \mapsto 1 - x$.
  - † Cas 3 : $f(0) < 0$. On déduit de la question I.4. que $-f$ est solution de (**E**). Comme $-f(0) > 0$, on est ramené au cas précédent et donc $f : x \mapsto x - 1$.
- ▷ Synthèse. Les trois fonctions $x \mapsto 0$, $x \mapsto 1 - x$ et $x \mapsto x - 1$ sont des solutions comme nous l'avons démontré au I.1.

En conclusion, l'équation (**E**) n'admet que trois solutions, les fonctions définies de $\mathbb{R}$ dans lui-même par :

$$x \mapsto 0\,,\ x \mapsto 1-x \ \text{ et } \ x \mapsto x-1$$