Mathématiques, Travaux dirigés

Jeudi 10 octobre 2024

1. On pose $U_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}(-1)^k$ et $V_n = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k+1}(-1)^k$. Simplifier $U_n + iV_n$ puis U_n et V_n.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{C}^n$. On note $V := \sum_{k=1}^{n-1} |a_{k+1} - a_k|$.

a. Établir que $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \ , \quad |a_i - a_j| \leqslant V$.

b. En déduire que $\forall k \in [\![1,n]\!] \ , \quad \left| a_k - \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} a_\ell \right| \leqslant V$.

c. Démontrer que $\forall k \in [\![1,n]\!] \ , \quad |a_k| \leqslant V + \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{n} |a_\ell|$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que $\left| \prod_{k=1}^{n} (1 + z_k) - 1 \right| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \big(1 + |z_k|\big) - 1$.

4. On considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de réels sous-additive, c'est-à-dire telle que

$$\forall (i,j) \in (\mathbb{N}^*)^2, \ u_{i+j} \leqslant u_i + u_j \quad (\star)$$

a. Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{u_\ell}{\ell} = (n+1) \sum_{\ell=1}^{n} \frac{u_\ell}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell$$

b. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \quad n u_{n+1} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} u_k$. Indication : Appliquer judicieusement $(\star)$.

c. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ u_n \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$. Indication : Raisonner par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

d. Trouver une suite sous-additive telle que $\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{k}$.

e. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \sqrt{n} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$.

CORRIGÉ

1. On a

$$\begin{aligned}\mathrm{U}_n + i\mathrm{V}_n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(-1)^k + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}(-1)^k i = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}i^{2k} + \sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k+1}i^{2k+1} = \sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}i^k \\ &= (1+i)^{2n} = \left(\sqrt{2}\right)^n e^{\frac{in\pi}{4}}\end{aligned}$$

d'où $\mathrm{U}_n = \mathrm{Re}(\mathrm{U}_n + i\mathrm{V}_n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\frac{n\pi}{4}$ et $\mathrm{V}_n = \mathrm{Im}(\mathrm{U}_n + i\mathrm{V}_n) = \left(\sqrt{2}\right)^n \sin\frac{n\pi}{4}\cdot$

2. a. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. L'inégalité est évidente si $i = j$, on peut supposer que $i \neq j$. Quitte à permuter i et j ce qui ne change pas la valeur de $|a_i - a_j|$), on peut supposer que $i \leqslant j$. Comme

$$a_j - a_i = \sum_{k=i}^{j-1}(a_{k+1} - a_k)$$

Ainsi, par l'inégalité triangulaire : $|a_i - a_j| \leqslant \sum_{k=i}^{j-1}|a_{k+1} - a_k| \leqslant \mathrm{V}$.

b. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $|a_k - a_i| \leqslant \mathrm{V}$. En sommant pour i variant de 1 à n et par l'inégalité triangulaire, on obtient :

$$\left|na_k - \sum_{i=1}^{n} a_i\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}(a_k - a_i)\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n}|a_k - a_i| \leqslant n\mathrm{V}$$

d'où $\left|a_k - \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\right| \leqslant \mathrm{V}$ en divisant par n.

c. Soit $k \in [\![1,n]\!]$. On a, par l'inégalité triangulaire :

$$|a_k| = \left|a_k - \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\right| \leqslant \left|a_k - \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\right| + \left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n} a_\ell\right| \leqslant \mathrm{V} + \frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}|a_\ell|$$

3. La propriété est vraie au rang 1 car pour $z \in \mathbb{C}$, on a $|1+z-1|+1 = 1+|z|$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie au rang n. Soit $z_1, \ldots, z_{n+1}$ dans $\mathbb{C}$. On a

$$\left|p_n - 1\right| + 1 \leqslant q_n \quad \text{où} \quad p_n := \prod_{k=1}^{n}(1+z_k) \quad \text{et} \quad q_n := \prod_{k=1}^{n}\left(1+|z_k|\right)$$

En multipliant cette inégalité par le réel positif $|1+z_{n+1}|$ puis en appliquant l'inégalité triangulaire (q_n étant positif), on obtient :

$$\left|p_n - 1\right| \times |1+z_{n+1}| + |1+z_{n+1}| \leqslant q_n \times |1+z_{n+1}| \leqslant q_n \times \left(1+|z_{n+1}|\right)$$

Par l'inégalité triangulaire, on a également :

$$\left|(p_n-1)(1+z_{n+1}) + 1 + z_{n+1}\right| \leqslant \left|p_n - 1\right| \times |1+z_{n+1}| + |1+z_{n+1}|$$

Ainsi $\left|p_n(1+z_{n+1})\right| \leqslant q_n \times \left(1+|z_{n+1}|\right)$, d'où l'inégalité au rang $n+1$.

COMMENTAIRE *On peut aussi appliquer la formule de développement par distributivité et l'inégalité triangulaire :*

$$\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k) - 1\right| = \left|\sum_{\substack{\mathrm{I}\subset[\![1,n]\!] \\ card\,\mathrm{I}\neq 0}}\prod_{k\in\mathrm{I}} z_k\right| \leqslant \sum_{\substack{\mathrm{I}\subset[\![1,n]\!] \\ card\,\mathrm{I}\neq 0}}\prod_{k\in\mathrm{I}}|z_k| = \prod_{k=1}^{n}\left(1+|z_k|\right) - 1$$

4. a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a, après interversion des sommes :

$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{u_\ell}{\ell} = \sum_{1 \leqslant \ell \leqslant k \leqslant n} \frac{u_\ell}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} \sum_{k=\ell}^{n} \frac{u_\ell}{\ell} = \sum_{\ell=1}^{n} (n+1-\ell) \frac{u_\ell}{\ell} = (n+1) \sum_{\ell=1}^{n} \frac{u_\ell}{\ell} - \sum_{\ell=1}^{n} u_\ell$$

b. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remarque que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $u_{n+1} \leqslant u_k + u_{n+1-k}$ d'où en sommant cs inégalités pour k variant de 1 à n :

$$n u_{n+1} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} u_k$$

c. Démontrons l'inégalité par récurrence forte sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- ▷ L'inégalité est vraie au rang un (c'est en fait une égalité).
- ▷ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons la propriété vraie jusqu'au rang n. On en déduit en sommant les inégalités de k variant de 1 à n que

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{k=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{k} \frac{u_\ell}{\ell}$$

Ainsi, par les question 1. et 2. :

$$n u_{n+1} \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} u_k \leqslant \sum_{\ell=1}^{n} \frac{u_\ell}{\ell}$$

d'où $(n+1) u_{n+1}$
$, \leqslant u_{n+1} + \sum_{\ell=1}^{n} \frac{u_\ell}{\ell}$ puis $u_{n+1} \leqslant \sum_{\ell=1}^{n+1} \frac{u_\ell}{\ell} \cdot$ Ainis l'inégalité est vraie au rang $n+1$.

d. La suite des entiers naturels convient manifestement.

e. Il suffit d'établir que la suite $\left(\sqrt{n}\right)_{n \geqslant 1}$ est sous-additive. Ceci est immédiat car, pour i et j dans $\mathbb{N}^*$, on a

$$\left(\sqrt{i} + \sqrt{j}\right)^2 - \sqrt{i+j}^2 = 2\sqrt{ij} \geqslant 0$$