AN 13 | Fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

L'objectif premier de ce TD est d'arriver à manipuler avec aisance les fonctions de deux variables réelles à valeurs réelles.

Etude de la mer et du ciel, Constable

I. Questions de régularité

1 — *Deux exemples édifiants* f

On considère les fonctions f et g définies par

$$f:(x,y)\neq 0\mapsto \frac{2x^3y}{x^4+y^2}\quad,\quad f:(0,0)\mapsto 0\quad \text{et}\quad g:(x,y)\neq 0\mapsto \frac{xy^3}{x^4+y^2}\quad,\quad g:(0,0)\mapsto 0$$

1. Établir que sur $\mathbb{R}^2$, $\left|f(x,y)\right|\leqslant |x|$ et $\left|g(x,y)\right|\leqslant |xy|$. En déduire la continuité de f et g sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les dérivées partielles de f et g en $(0,0)$ puis en $(x,y)\neq(0,0)$.
3. Ces fonctions sont-elles de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

2 — *Mines-Ponts* f

Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par $f(0,0)=0$ et $(x,y)\neq(0,0)\mapsto f(x,y)=(x^2-y^2)\ln\left(x^2+y^2\right)$.

1. La fonction f est-elle continue ?
2. Montrer que, pour tout $(x,y)\neq(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.
3. Pour tout $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$.
4. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

3 — *Théorème fondamental* f

Soit $\phi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continue. On pose $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2,\ f(x,y):=\displaystyle\int_{x^2}^{xy}\phi(t)\,\mathrm{d}t$.

Établir que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$ que l'on calculera.

4 — *Taux d'accroissements* ff

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. On note $\Delta:=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,;\,y=x\right\}$ et on note $\phi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par :

$$\phi(x,y):=\begin{cases} f'(x) & \text{si } y=x\\[2ex] \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } y\neq x\end{cases}$$

1. Établir que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$.
2. Vérifier que $\forall(x,y)\,,\ \phi(x,y)=\displaystyle\int_0^1 f'\big((1-t)x+ty\big)\,\mathrm{d}t$.

3. En déduire que ϕ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

5 — *L'œil géomètre* *ff*

Soit $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ telle que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall t > 0$, $f(tx, ty) = t f(x, y)$. Montrer que f est linéaire.

II. Points critiques et extrema

6 — *Points critiques* *f*

Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \to \sin x + \sin y + \sin(x + y)$ sur $]0, \pi[^2$.

7 — *Centrale-PSI* *f*

Déterminer les points critiques de $f : (x, y) \to \sin(x)\sin(y)\sin(x + y)$ sur $\mathrm{T} := \left\{(x, y) \in]0, \pi[^2 ; x + y < \pi\right\}$.

8 — *Centrale-PC* *f*

Soit $a \in]0, 1[$ et f définie par $f(x, y) := \left(x^2 + 2axy + y^2\right)e^{-\frac{x^2+y^2}{2}}$.
Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$. Quels sont les points critiques de f ?

9 — *Centrale PC-2016* *ff*

Soit $\mathrm{D} := \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; -1 < x < y < 1\right\}$ et $f : (x, y) \mapsto (y - x)^3 + 6xy$. Étudier les extrema de f sur D.

III. Équations aux dérivées partielles

10 — *EDP linéaires d'ordre un* *f*

1. Déterminer les fonctions de classe $\mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$.

2. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$.

a. Déterminer $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \phi(x)$.

b. Déterminer $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \phi(y)$.

3. Déterminer les fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant :

1. $3\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$; **2.** $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

11 — *Une équation fonctionnelle f*

Déterminer les fonctions $f \in \mathscr{C}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}\right)$ vérifiant $\forall t \in \mathbb{R},\ f(x+t, y+t) = f(x,y)$.

IV. Indications

1

Utiliser l'inégalité AG au 1.

2

Aucune difficulté particulière, revenir aux définitions.

3

Il faut se souvenir du théorème fondamental du calcul différentiel ou utiliser une primitive de ϕ sur $\mathbb{R}$.

4

Remarquer que $\phi(x,y)-\phi(a,a)=\int_0^1 \left(f\left((1-t)x+ty\right)-f'(a)\right)\mathrm{d}t$ et revenir à une approche « epsilonesque ».

5

Utiliser le DL à l'ordre un de f en 0.

6

On trouve un unique point critique $\left(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}\right)$.

7

On trouve un seul point critique $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3}\right)$.

8

Les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$, $(-1,1)$ et $(1,-1)$.

9

Le seul point critique est $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$.

10

Effectuer un changement de variable linéaire aux a. et b. Le c. est une invitation aux coordonnées polaires.

11

Toute solution f vérifie une EDP linéaire.