ALG 5 | Calcul matriciel

Les mathématiques ne révèlent leurs secrets qu'à ceux qui les abordent avec pur amour, pour leur propre beauté.

Archimède

Painting (Silver over Black, White, Yellow and Red) – Jackson Pollock

I. Systèmes linéaires

1 — *Un système*

Discuter et résoudre le système suivant en fonction du paramètre $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ x + 2y + az = 2 \\ 2x + ay + 2z = 3. \end{cases}$$

2 — *La foire aux systèmes*

Résoudre en fonction du réel m les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m^2 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x - my + m^2 z = m \\ mx - m^2 y + mz = 1 \\ mx + y - m^3 z = 1 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x + y + z = m+1 \\ mx + y + (m-1)z = m \\ x + my + z = 1 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x + y + mz = m \\ x + my - z = 1 \\ x + y - z = 1 \end{cases}$.

3 — *Systèmes d'ordre n* f

Soit $n \geqslant 2$ un entier, $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels. Discuter et résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x_1 - x_2 = a_1 \\ x_2 - x_3 = a_2 \\ \qquad \vdots \\ x_{n-1} - x_n = a_{n-1} \\ x_n - x_1 = a_n \end{cases}$;

2. $\begin{cases} x_1 + x_2 = a_1 \\ x_2 + x_3 = a_2 \\ \qquad \vdots \\ x_{n-1} + x_n = a_{n-1} \\ x_n + x_1 = a_n \end{cases}$.

II. Calculs divers

4 — *Un petit calcul*

Soit $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathrm{K})$ et $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1. Calculer JMJ.

5 — *Produit d'une matrice et de sa transposée*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $AA^T = 0$. Montrer que $A = 0$.
2. A-t-on la même conclusion si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$?

6 — *Une équation du second degré ƒ*

On note E l'équation $X^2 + X = A$ d'inconnue X dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec A.
2. En déduire les solutions de E.

7 — *Un inusable sur la trace ƒ*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A et B deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Résoudre $X + (\operatorname{tr} X)A = B$ dans $X \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

8 — *Un calcul de puissances ƒ*

Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Calculer les puissances des matrices suivantes : $A = \begin{pmatrix} a+b & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & a+b \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}$.

9 — *Matrice constante + matrice diagonale ƒ*

Pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, on considère la matrice $M_{a,b} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ suivante :

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & & b \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$$

On pose aussi $U = M_{1,1}$.

1. Calculer U^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$. La formule est-elle encore valable pour $k = 0$?
2. En écrivant $M_{a,b}$ à l'aide de U et I_n, en déduire $M_{a,b}^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

10 — *Calcul d'un commutant ƒƒ*

On pose $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Pour tout $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$, on note $\mathscr{C}(M) := \left\{ X \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})\,;\, XM = MX \right\}$.

1. Exprimer A en fonction des puissances de N et en déduire que $\mathscr{C}(N) \subset \mathscr{C}(A)$.

2. Exprimer N en fonction des puissances de A et en déduire que $\mathscr{C}(\mathrm{A}) \subset \mathscr{C}(\mathrm{N})$.

3. Établir que $\mathscr{C}(\mathrm{N}) = \left\{ a\mathrm{I}_3 + b\mathrm{N} + c\mathrm{N}^2\,;\, (a,b,c) \in \mathbb{R}^3 \right\}$

4. Soit $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\mathrm{X}^2 = \mathrm{A}$. Justifier que $\mathrm{X} \in \mathscr{C}(\mathrm{N})$.

5. En déduire les solutions de l'équation $\mathrm{X}^2 = \mathrm{A}$, d'inconnue $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

III. Matrices inversibles

11 — *Utilisation d'identités remarquables*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Prouver l'inversibilité et inverser M par la méthode du pivot de Gauss.

2. Calcul des puissances de M.

- **a.** Calculer les puissances de J.
- **b.** Exprimer M en fonction de J.
- **c.** En déduire que M est inversible et retrouver l'expression de son inverse.

12 — *Calcul d'un inverse*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a \in \mathbb{C}$ et

$$\mathrm{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad \mathrm{M}_a = \begin{pmatrix} 1 & a & \dots & a \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

1. Donner sans démonstration l'expression de J^k pour $k \in [\![0, n]\!]$ puis exprimer M_a en fonction des puissances de J.

2. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Justifier que $\mathrm{I}_n - \lambda\mathrm{J}$ est inversible. Simplifier $(\mathrm{I}_n - \lambda\mathrm{J}) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k \mathrm{J}^k$ et en déduire $(\mathrm{I}_n - \lambda\mathrm{J})^{-1}$.

3. Justifier l'inversibilité de M_a et calculer son inverse.

13 — *Inversibilité d'une matrice* f

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $I_n + A$ soit inversible. On pose $B = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$. Prouver que $I_n + B$ est inversible.

14 — *Centrale PC-2013* f

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$.

1. Soit B la matrice obtenue en échangeant les colonnes i et j de A. Justifier que la matrice B est inversible. Comment calculer B^{-1} à partir de A^{-1} ?
2. Soit C la matrice obtenue en ajoutant deux fois la i-ième colonne à la j-ième colonne de A. Justifier que la matrice C est inversible. Comment calculer C^{-1} à partir de A^{-1} ?

15 — *Avec racines n-ièmes de l'unité* ff

Soit n un entier naturel non nul et $\omega = e^{2i\pi/n}$. On pose $\Omega = \left(\omega^{(k-1)(\ell-1)}\right)_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
Calculer $\Omega\overline{\Omega}$. En déduire que Ω est inversible et calculer son inverse.

16 — *Matrice des min* ff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A_n = \left(\min(i,j)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n}$. Montrer que A_n est inversible et calculer son inverse.

IV. Matrices remarquabes

17 — *Matrices stochastiques en ligne*

On dit qu'une matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ est *stochastique* si elle est à coefficients positifs et si la somme des éléments de chaque ligne vaut 1. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ deux matrices stochastiques. Montrer que AB est stochastique.

18 — *Matrices triangulaires strictes* f

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\mathscr{T}_p$ l'ensemble des matrices carrées $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ pour lesquelles :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ j < i + p \implies M_{i,j} = 0$$

Pour traiter correctement cet exercice, il sera profitable de se demander à quoi « ressemble » un élément de l'ensemble $\mathscr{T}_p$.

1. Déterminer $\mathscr{T}_n$.

2. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant q$. Comparer $\mathscr{T}_p$ et $\mathscr{T}_q$ pour l'inclusion.
3. Montrer que $AB \in \mathscr{T}_{p+q}$ pour tous p et q dans $\mathbb{N}$, $A \in \mathscr{T}_p$ et $B \in \mathscr{T}_q$.
4. En déduire que toute matrice X de $\mathscr{T}_1$ est nilpotente, i.e. vérifie $X^n = 0$.

19 — *Matrices qui commutent avec les matrices diagonales* ff

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que A commute avec toute matrice diagonale de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *si et seulement si* elle est elle-même diagonale.

20 — *Le centre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$* ff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $E_{i,j}$ la matrice dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i,j) qui vaut 1.

1. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ et $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $ME_{i,j} = E_{i,j}M$. Que dire des coefficients de M ?
2. Déterminer les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ qui commutent avec toutes les matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

V. Problèmes

21 — *Exemples de sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$*

Dans tout le sujet, on fixe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$. Un sous-ensemble $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est appelé *sous-algèbre* de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ s'il vérifie les propriétés suivantes :

a. $\forall(\lambda, \mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathbb{K} \times \mathscr{A}^2,\ \mathrm{X} + \lambda\mathrm{Y} \in \mathscr{A}$; **b.** $\mathscr{A}$ est stable par le produit matriciel ; **c.** $\mathrm{I}_n \in \mathscr{A}$.

Une sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite *commutative* si $\forall(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \in \mathscr{A}^2,\ \mathrm{XY} = \mathrm{YX}$.

On dit qu'une sous-algèbre $\mathscr{A}$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est *un corps* si $\forall \mathrm{X} \in \mathscr{A} \setminus \{0\},\ \mathrm{X}$ est inversible et $\mathrm{X}^{-1} \in \mathscr{A}$.

Enfin, on note classiquement $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X}_{i,j}$ les coefficients d'une matrice X.

Partie I – Quelques exemples élémentaires

On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ (resp. $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$, $\mathscr{H}_n(\mathbb{R})$) l'ensemble des matrices symétriques (resp. triangulaires supérieures, de trace nulle) de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Les ensembles suivants sont-ils des sous-algèbres de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\mathscr{H}_n(\mathbb{R}),\ \mathscr{T}_n^+(\mathbb{R}),\ \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$? On justifiera avec soin par une démonstration ou un contre-exemple.

2. Soit $\mathrm{U} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ \mathrm{U}_{i,j} = 1$. On s'intéresse à $\mathscr{A} = \left\{a\mathrm{I}_n + b\mathrm{U}\,;\,(a,b) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

- **a.** Montrer que $\mathscr{A}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Est-elle commutative ?
- **b.** Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $\mathrm{M} = a\mathrm{I}_n + b\mathrm{U}$. Donner *une condition nécessaire et suffisante* sur a et b pour que M soit inversible. Calculer l'inverse M le cas échéant et vérifier qu'elle appartient à $\mathscr{A}$.
- **c.** Résoudre dans $\mathscr{A}$ l'équation $\mathrm{X}^n = \mathrm{I}_n$ d'inconnue X.

Partie II – Sous-algèbre des matrices centro-symétriques

On dit qu'une matrice $\mathrm{A} = (\mathrm{A}_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est centro-symétrique si

$$\forall(i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ a_{n+1-i,n+1-j} = a_{i,j}$$

On note $\mathscr{C}_\mathrm{S}$ l'ensemble des matrices centro-symétriques de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les matrices centro-symétriques de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ puis de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

2. Établir que $\mathscr{C}_\mathrm{S}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ en revenant aux définitions des opérations matricielles.

3. Déterminer une matrice P inversible telle que $\mathscr{C}_\mathrm{S} = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})\,;\,\mathrm{PXP} = \mathrm{X}\right\}$.

4. Reprendre la question II.2. en utilisant la question précédente.

5. Démontrer que, pour tout $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cap \mathscr{C}_\mathrm{S}$, on a $\mathrm{A}^{-1} \in \mathscr{C}_\mathrm{S}$.

Partie III – Quelques résultats sur les sous-algèbres de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$

1. Existe-t-il des sous-algèbres de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ qui ne sont pas des corps ?

2. Démontrer que $\forall A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}),\ A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0$.

3. Soit $\mathscr{A}$ une sous-algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Démontrer que $\forall A \in \mathscr{A} \cap GL_2(\mathbb{R}),\ A^{-1} \in \mathscr{A}$.

4. On note $\mathscr{C} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} ; (a,b) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. Montrer que $\mathscr{C}$ est une sous-algèbre de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Est-elle commutative ?

b. Établir que $\mathscr{C}$ est isomorphe à $\mathbb{C}$, c'est-à-dire qu'il existe une bijection $\phi : \mathbb{C} \to \mathscr{C}$ telle que

$$\forall (\lambda, z, z') \in \mathbb{R} \times \mathbb{C}^2,\quad \phi(zz') = \phi(z)\phi(z') \quad \text{et} \quad \phi(z + \lambda z') = \phi(z) + \lambda\phi(z')$$

c. La sous-algèbre $\mathscr{C}$ est-elle un corps ?

VI. Indications

1

Appliquer l'algorithme du pivot en repoussant au plus tard possible la disjonction de cas.

2

Échelonnez les systèmes. Essayez de commencer à discuter sur m le plus tard possible.

3

La résolution du second système passe par une discussion sur la parité de n.

4

On trouve une matrice colinéaire à J.

5

Calculer les coefficients diagonaux de la matrice AA^T en fonction de ceux de A.

6

Remarquer qu'une solution X commute avec A.

7

Penser à prendre la trace. Il faut discuter selon les valeurs de $\operatorname{tr} A$ et $\operatorname{tr} B$.

8

Appliquer la formule du binôme.

9

Au a), on pourra deviner la formule et la montrer par récurrence. Au b), on a $M_{a,b} = (a-b)I_n + bU$; appliquer ensuite la formule du binôme, en mettant à part le terme avec U^0.

10

Au 4., on pourra remarquer que si X est solution, alors X commute avec A.

11

On trouve $M = I_n + J + \ldots + J^{n-1}$. La formule de la série géométrique sur $\mathbb{C}$ devrait alors vous inspirer sachant que $J^n = 0_n$.

12

Remarquer que $M_a = (I_n - J)^{-1}(I_n - (1-a)J)$.

13

Factoriser par $(I_n + A)^{-1}$ dans $I_n + B$.

14

Écrire $B = PA$ avec P matrice élémentaire de permutation.

15

On trouve $\Omega\overline{\Omega} = nI_n$.

16

Appliquez la méthode du pivot à $(A|I_n)$.

17

La condition sur la somme des lignes peut s'écrire $AU = U$ pour une certaine matrice-colonne U.

18

On a clairement $\mathscr{T}_q \subset \mathscr{T}_p$.

19

Multiplier à droite (resp. à gauche) par une matrice diagonale revient à dilater les lignes (resp. les colonnes).

20

On trouve les matrices d'homothéties, ie de la forme λI_n, $\lambda \in \mathbb{R}$.

21

Au I.2., on remarquera que $M^2 - (2a + bn)M = -\left(a^2 + nba\right)I_n$.