ALG 4 | Calculs algébriques

La mathématique est une science dangereuse : elle dévoile les supercheries et les erreurs de calcul.

Galilée

Fugue in rot, Paul Klee

I. Techniques de calcul

1 — *Sommes géométriques*

Calculer, pour un entier naturel n non nul, $\mathrm{A}_n := \sum_{k=n}^{2n-1} 2^k$ et $\mathrm{B}_n := \sum_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} 2^k$.

2 — *Sommes en vrac f*

Simplifier les sommes pour $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$; **2.** $\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n+1-k}\right)$; **3.** $\sum_{k=2}^{n} \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right)$; **4.** $\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$.

3 — *Sommes partielles de la série harmonique alternée ff*

Démontrer de deux manières que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k}$.

4 — *Sommes de deux en deux dans un polynôme et généralisation fff*

Pour $d \in \mathbb{N}$, $(a_0, \ldots, a_d) \in \mathbb{C}^{d+1}$ et $z \in \mathbb{C}$, on pose

$$\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \mathrm{P}(z) := \sum_{\ell=0}^{d} a_\ell z^\ell$$

1. L'objectif de cette question est de calculer $a_0 + a_2 z^2 + a_4 z^4 + \cdots$ et $a_1 z + a_3 z^3 + \cdots$ au moyen de P.

a. Pour z dans $\mathbb{C}$, donner l'expression de $\sum_{0 \leqslant 2k \leqslant d} a_{2k} z^{2k}$ au moyen de $\mathrm{P}(z)$ et $\mathrm{P}(-z)$.

b. Donner sans justification une expression analogue de $\sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant d} a_{2k+1} z^{2k+1}$.

c. Pour $n \in \mathbb{N}$, en déduire des expressions simplifiées des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n}{2k} \quad , \quad \sum_{k=0}^{n} k \binom{2n}{2k} \quad \text{et} \quad \sum_{0 \leqslant 2k+1 \leqslant n} (-3)^k \binom{n}{2k+1}$$

2. On pose $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$

a. Justifier que $1 + j + j^2 = 0$ puis simplifier $1 + j^\ell + j^{2\ell}$ pour $\ell \in \mathbb{N}$.

b. En déduire que $\mathrm{P}(1) + \mathrm{P}(j) + \mathrm{P}\left(j^2\right) = 3 \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} a_{3k}$.

3. Dans cette question, on fixe $m \in \mathbb{N}^*$ et on pose $\omega := e^{\frac{2i\pi}{m}}$.

a. Pour $\ell \in \mathbb{N}$, justifier avec soin que $\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} \omega^{k\ell} = \begin{cases} m & \text{si } \ell \text{ est un multiple de } m \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

b. En déduire que $\forall z \in \mathbb{C} \quad , \displaystyle\sum_{0 \leqslant mk \leqslant d} a_{mk} z^{mk} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} \mathrm{P}\left(\omega^k z\right)$.

4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en déduire des expressions simplifiées des sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{3n}{3k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{4n}{4k}$$

II. Inégalités

5 — Majoration d'une somme double

1. Démontrer que $\forall x \in]1, +\infty[, \forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{x^k} \leqslant \frac{x}{x-1}$.

2. En déduire un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\sum_{0 \leqslant i,j \leqslant n} 2^{-i} 3^{-j} \leqslant \mathrm{M}$.

6 — Minoration d'une somme double *f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$. On pose $\mathrm{S}_n := \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \left(\cos(t_i + t_j) + \cos(t_i - t_j)\right)$.

1. Exprimer S_n en fonction de $\displaystyle\left(\sum_{i=1}^{n} \cos t_i\right)^2$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \cos^2 t_i$.

2. En déduire que $\mathrm{S}_n \geqslant -n$.

7 — Variations géométriques *ff*

Soit $q \in [0, 1[$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} q^{ij} \leqslant \frac{q}{(1-q)^2}$.

8 — Formule d'Abel et deux applications *fff*

Soient $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(b_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites de réels. Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathrm{S}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k$, $\mathrm{A}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k$ et $\mathrm{B}_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{S}_n = a_n \mathrm{B}_n + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) \mathrm{B}_k$.

2. On suppose dans cette question que la suite $(a_k)_{k\geqslant 0}$ est décroissante, à termes positifs et qu'il existe $\mathrm{M}\in\mathbb{R}$ tel que $\forall n\in\mathbb{N}$, $|\mathrm{B}_n|\leqslant \mathrm{M}$. Établir que $\forall n\in\mathbb{N},\ |\mathrm{S}_n|\leqslant \mathrm{M}a_0$.
3. Soit $x\in\mathbb{R}$ tel que $x\neq 0\,[2\pi]$. Montrer que $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|\leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$ puis $\left|\sum_{k=1}^{n}\dfrac{\sin kx}{k}\right|\leqslant \dfrac{1}{\left|\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|}$.
4. Une autre application de la première question : simplifier de $\sum_{k=0}^{n} k2^k$.

9 — *Une belle inégalité ff*

Soient $z\in\mathbb{C}$, $n\in\mathbb{N}^*$ et $z_1,\dots,z_n$ des nombres complexes non nuls d'arguments respectifs $\theta_1,\dots,\theta_n$.
On suppose que $e^{i\theta_1}+\cdots+e^{i\theta_n}=0$.

1. Démontrer que $\sum_{k=1}^{n}|z_k|\leqslant\sum_{k=1}^{n}|z_k-z|$. On pourra simplifier la somme $\sum_{k=1}^{n}e^{-i\theta_k}(z_k-z)$.
2. Montrer qu'il existe $m\in[\![1,n]\!]$ tel que $|z_m-z|\geqslant\dfrac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}|z_k|$.

10 — *Extrait des écrits de Centrale PC 2024 ff*

Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $z_1,\dots,z_n$ dans $\mathbb{C}$. Démontrer que $\left|\prod_{k=1}^{n}(1+z_k)-1\right|\leqslant\prod_{k=1}^{n}\big(1+|z_k|\big)-1$.

III. Sommes trigonométriques

11 — *Sommes binomiales*

Calculer les sommes suivantes pour $n\in\mathbb{N}$ et $(\theta,x)\in\mathbb{R}\times\mathbb{C}$:

1. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{kx}$;
2. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(k\theta)$;
3. $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\sin(k\theta)$.

12 — *Sommes trigonométriques f*

Pour $n\in\mathbb{N}^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$, simplifier les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\cos\left(\dfrac{k\pi}{3}\right)$;
2. $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{2^k}\cos^k\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$;
3. $\sum_{k=1}^{n}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^k}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2^k}\right)$;
4. $\sum_{k=-n}^{n}e^{ik\theta}$.

13 — *Une généralisation ff*

Soit $n \geqslant 1$. Simplifier la somme $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)$.

14 — *Posé à Centrale ff*

On pose pour $x \neq \pi/2\,[\pi]$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) := \sum_{k=0}^{n} \frac{\cos(kx)}{\cos^k(x)}$. Simplifier $S_n(x)$ puis résoudre $S_n(x) = 0$.

IV. Sommes doubles

15 — *Une intervertion*

Démontrer l'égalité $\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=n+1}^{N} \frac{(-1)^k}{k^2} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{k}$.

16 — *B.A.BA f*

Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$; **2.** $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$; **3.** $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} |i-j|$; **4.** $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} i$;

17 — *Pascal f*

Pour un entier naturel n non nul, simplifier la somme $\sum_{0\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \binom{j}{i}$.

18 — *Cas d'égalité dans l'inégalité triangulaire ff*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \ldots, z_n$ dans $\mathbb{C}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ avec $(\rho_k, \theta_k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

1. Établir que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \rho_k\rho_\ell \cos(\theta_k - \theta_\ell)$.

2. En déduire une CNS pour que $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$. On donnera une interprétation géométrique.

19 — *Autour des sommes harmoniques ff*

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathrm{H}_k := \sum_{\ell=1}^{k} \frac{1}{\ell}$.

1. Démontrer que $\sigma_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{H}_k = n\mathrm{H}_n - n$ *sans raisonner par récurrence.*

2. Calculer $\nu_n := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \frac{1}{j-i}$ en fonction de n et H_n.

3. Calculer $\mu_n := \sum_{k=1}^{n} k\mathrm{H}_k$ en fonction de n et H_n.

20 — *Une somme multiple fff*

Soit $(x_n)_{n \geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$\mathrm{S}_n = \sum_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n) \in \{-1,1\}^n} \cos\left(x_0 + \varepsilon_1 x_1 + \varepsilon_2 x_2 + \cdots + \varepsilon_n x_n\right)$$

1. Donner une forme factorisée simple de $\mathrm{S}_1 = \cos(x_0 + x_1) + \cos(x_0 - x_1)$ et

$$\mathrm{S}_2 = \cos(x_0 + x_1 + x_2) + \cos(x_0 - x_1 - x_2) + \cos(x_0 + x_1 - x_2) + \cos(x_0 - x_1 + x_2)$$

2. Conjecturer puis démontrer par récurrence une formule de factorisation de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

V. Produits

21 — *Un produit de sommes*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Simplifier $\prod_{p=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{p} 2^{kp!}$.

22 — *Produits en cascade f*

Calculer les produits suivants :

1. $\prod_{1 \leqslant i,j \leqslant n} ij$; **2.** $\prod_{1 \leqslant i \neq j \leqslant n} ij$; **3.** $\prod_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} ij$; **4.** $\prod_{1 \leqslant j \leqslant i \leqslant n} ij$; **5.** $\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} ij$.

23 — *Calcul d'un produit trigonométrique* f

Soit $a \in]0,\pi[$. Simplifier $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{a}{2^k}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pourra, pour $x \neq 0\,[\pi]$, considérer $\dfrac{\sin(2x)}{\sin(x)}$.

24 — *Produit des coefficients binomiaux* ff

On définit la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ par $u_n = \left(\binom{n}{0}\binom{n}{1}\cdots\binom{n}{n}\right)^{\frac{1}{n(n+1)}}$.

1. Montrer que $\displaystyle\prod_{p=0}^{n} p! = \prod_{p=1}^{n} p^{n-p+1}$ et en déduire que $\displaystyle\prod_{p=0}^{n}\binom{n}{p} = \prod_{k=1}^{n} k^{2k-n-1}$.

2. Montrer que $\displaystyle\ln(u_n) = \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^{n}(2k-n-1)\left(\ln\left(\frac{k}{n+1}\right)-1\right)$.

VI. Coefficients binomiaux

25 — *Des entiers cachés*

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{\left(1+\sqrt{5}\right)^n+\left(1-\sqrt{5}\right)^n}{2} \in \mathbb{N}$.

26 — *Les fondamentaux* f

Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p \leqslant n$.

1. En utilisant le polynôme $\mathrm{P}(\mathrm{X}) = (1+\mathrm{X})^n$, calculer les sommes suivantes :

a. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k\binom{n}{k}$; **b.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$; **c.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}$; **d.** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

2. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=0}^{p}\binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$;

3. Simplifier $\displaystyle\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}$ au moyen du triangle de Pascal.

27 — *Une relation de récurrence sur les sommes de Newton* f

Pour tous p et n dans $\mathbb{N}$, on pose $\displaystyle\mathrm{S}_p(n) := \sum_{k=0}^{n} k^p$. Démontrer que

$$\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \sum_{i=0}^{p}\binom{p+1}{i}\mathrm{S}_i(n) = (n+1)^{p+1}$$

28 — *Itération dans la suite de Fibonacci ff*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que $u_0=0$, $u_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$.

Montrer que $\forall (n,p)\in\mathbb{N}^2,\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u_{p+k}=u_{p+2n}$.

29 — *Une curiosité ff*

Démontrer que, pour $(p,q)\in(\mathbb{N}^*)^2,\ \sum_{k=0}^{q-1}(p-2k)\binom{p}{k}=q\binom{p}{q}$.

30 — *Une formule méconnue fff*

Simplifier $\sum_{k=0}^{p}(-1)^k\binom{n}{k}$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}$.

VII. Problèmes

31 — *Inégalité isopérimétrique pour les polygones*

Ce problème porte sur l'inégalité isopérimétrique reliant l'aire et le périmètre de certaines figures géométriques.

- Dans tout le problème, n désigne un entier supérieur ou égal à 3 et $\omega := e^{\frac{2i\pi}{n}}$.
- Un polygone (à n côtés) est un élément de $\mathbb{C}^n$. Par exemple $Z=(z_0,z_1,\cdots,z_{n-1})$ est un polygone. On convient alors que $z_n=z_0$.
- Un polygone Z est dit :
  - équilatéral lorsque $\left|z_{j+1}-z_j\right|$ est indépendant de l'indice j entre 0 et $n-1$.
  - régulier direct lorsqu'il existe $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ tels que $\forall k\in[\![0,n-1]\!]\ ,\quad z_k=a\omega^k+b$.
  - régulier indirect lorsqu'il existe $a\in\mathbb{C}^*$ et $b\in\mathbb{C}$ tels que $\forall k\in[\![0,n-1]\!]\ ,\ z_k=a\overline{\omega}^k+b$.
  - régulier lorsqu'il est régulier direct ou indirect.

⇛ Pour un polygone $Z = (z_0, z_1, \cdots, z_{n-1})$, on définit son conjugué et son translaté par c :

$$\overline{Z} = \left(\overline{z_0}, \overline{z_1}, \cdots, \overline{z_{n-1}}\right) \qquad \text{et} \qquad Z_c = (z_0 + c, z_1 + c, \cdots, z_{n-1} + c)$$

On définit aussi $\widehat{z}_0, \widehat{z}_1, \cdots, \widehat{z}_{n-1}, \widehat{z}_n$ par :

$$\forall\, j \in [\![0, n]\!]\,,\ \widehat{z}_j = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\overline{\omega}^j\right)^k z_k$$

On remarquera que $\widehat{z}_n = \widehat{z}_0$.

Partie I – L'Inégalité de Cauchy-Schwarz et son cas d'égalité

Dans cette partie, on propose une nouvelle démonstration de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Soit $m \in \mathbb{N}^*$, $(a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m$ et $(b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$. On pose

$$A_m := \sum_{i=1}^m a_i^2 \ \text{ et } \ B_m := \sum_{i=1}^m b_i^2$$

1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Justifier que $xy \leqslant \dfrac{x^2 + y^2}{2}$ et donner une condition nécessaire et suffisante pour que cette inégalité soit une égalité.

2. En déduire l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i \leqslant \sqrt{A_m B_m}$$

INDICATION : On pourra considérer $x_i := \frac{a_i}{\sqrt{A_m}}$ et $y_i := \frac{b_i}{\sqrt{B_m}}$ pour tout $i \in [\![1, m]\!]$, lorsque ces expressions sont définies.

3. On suppose que $A_n \neq 0$. Établir que

$$\sum_{i=1}^m a_i b_i = \sqrt{A_m B_m} \iff \exists \lambda \in \mathbb{R}_+\,,\ \forall i \in [\![1, m]\!]\,,\ b_i = \lambda a_i$$

INDICATION : Démontrer séparément les deux implications.

Partie II – Calculs préliminaires

1. Soit $k \in [\![1, n-1]\!]$ et $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. Montrer que

$$\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) + \varepsilon \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \geqslant 0$$

INDICATION : Mettre au même dénominateur puis utiliser les formules d'addition.

2. En utilisant le tableau de variations de $x \to \tan x - x$ sur un intervalle bien choisi, montrer que

$$n \tan\left(\frac{\pi}{n}\right) \geqslant \pi$$

3. Soit $Z = (z_0, \cdots, z_{n-1})$ un polygone régulier direct.

On considère $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$ tels que $\forall k \in [\![0, n-1]\!]\ , \quad z_k = a\omega^k + b$ où $\omega := e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

- **a.** Montrer que Z est équilatéral.
- **b.** Montrer les points d'affixes $z_0, \ldots, z_{n-1}$ appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- **c.** Vérifier que $b = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$ et $a = z_0 - \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z_k$.
- **d.** Vérifier que les conclusions des trois questions précédentes restent valables dans le cas où Z est un polygone régulier indirect.

4. Dans cette question, on suppose que $n = 4$ et $Z := (2, 1+2i, 0, 1-2i)$.

- **a.** Dessiner dans le plan complexe le polygone Z.
- **b.** Démontrer que Z est équilatéral mais pas régulier.

  INDICATION : Raisonner par l'absurde en utilisant les II.3.b. et II.3.c.

5. Soit $p \in \mathbb{Z}$. Démontrer que

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^p\right)^k = \begin{cases} 0 & \text{si } p = 0\,[n] \\ \sqrt{n} & \text{si } p \neq 0\,[n] \end{cases}$$

6. Soit $Z = (z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}) \in \mathbb{C}^n$. Vérifier que

$$\forall j \in [\![0, n-1]\!],\ z_j = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^j\right)^k \widehat{z}_k$$

INDICATION : On pourra exprimer $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\left(\omega^j\right)^k \widehat{z}_k$ comme une somme double puis appliquer le II.5.

Partie III – Un lemme d'analyse

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ et $f : t \mapsto |\alpha + t\beta|$ définie sur $\mathbb{R}$. Justifier que f est dérivable et que $f'(0) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{\overline{\alpha}\beta}{|\alpha|}\right)$.

INDICATION : On pourra exprimer $f(t)$ en fonction de t et des parties réelles et imaginaires de α, β.

2. Soit $(u, v) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}\ , \quad |u| + |v| \leqslant |u - t(u+v)| + |v + t(u+v)|$.

- **a.** Établir que $(|u| - |v|)\left(2|uv| - u\overline{v} - \overline{u}v\right) = 0$.

  INDICATION : Une fonction $\delta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et minimale en 0 vérifie $\delta'(0) = 0$.
- **b.** En déduire que $|u| = |v|$ ou il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+^*,\ v = \lambda u$.

Partie IV – Inégalité isopérimétrique pour les polygones

Pour tout polygone $Z = (z_0, \cdots, z_{n-1})$, on définit $L(Z), E(Z)$ et $A(Z)$ par :

$$L(Z) := \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|, \quad E(Z) := \sum_{k=0}^{n-1} |z_{k+1} - z_k|^2, \quad A(Z) := \frac{1}{2}\,\mathrm{Im}\left(\sum_{k=0}^{n-1} z_{k+1}\overline{z_k}\right)$$

Il est évident que $L(Z)$ est le périmètre du polygone. Le réel $A(Z)$ représente son aire algébrique mais vous ne devez ni justifier, ni utiliser cette propriété.

1. Soit $c \in \mathbb{C}$ et $Z \in \mathbb{C}^n$. Établir que $A\left(\overline{Z}\right) = -A(Z)$ et $A(Z_c) = A(Z)$.

Indication : On veillera à utiliser la définition de $\overline{Z}$ et Z_c données dans le préambule.

2. On suppose dans cette question que Z est un polygone régulier avec a et b comme dans la définition.

a. Vérifier que $|z_{k+1} - z_k| = 2|a|\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$.

b. Exprimer $L(Z), E(Z), A(Z)$ en fonction de $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ et $\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

Indication : On pourra déduire du IV.1. que le « b » disparaît du calcul de $A(Z)$.

c. En déduire les rapports suivants :

$$\frac{|A(Z)|}{L(Z)^2}, \quad \frac{|A(Z)|}{E(Z)} \quad \text{et} \quad \frac{L(Z)^2}{E(Z)}$$

3. Soit $Z \in \mathbb{C}^n$. Montrer que $L(Z)^2 \leqslant nE(Z)$. Justifier que $L(Z)^2 = nE(Z)$ *si et seulement si* Z est équilatéral.

Indication : On pourra utiliser la partie I.

4. On revient au cas général. Soit $Z \in \mathbb{C}^n$.

a. Démontrer que

$$\sum_{j=0}^{n-1} z_{j+1}\overline{z_j} = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^k |\widehat{z_k}|^2 \quad \text{et} \quad \sum_{j=0}^{n-1} \left|z_j\right|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} |\widehat{z_k}|^2$$

Indication : On pourra exprimer $z_{j+1}\overline{z_j}$ au moyen des $\widehat{z_k}$ en utilisant la formule du II.6. puis simplifier la somme double au moyen du II.5.

b. En déduire les relations

$$A(Z) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right)|\widehat{z_k}|^2 \quad \text{et} \quad E(Z) = 4\sum_{k=0}^{n-1} \sin^2\left(\frac{k\pi}{n}\right)|\widehat{z_k}|^2$$

Indication : On pourra remarquer que $|z_{j+1} - z_j|^2 = |z_{j+1}|^2 + |z_j|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(z_j\overline{z_{j+1}}\right)$.

c. Montrer que

$$E(Z) - 4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)A(Z) = 4\sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) - \tan\left(\frac{\pi}{n}\right)\cos\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)|\widehat{z_k}|^2$$

d. Montrer que, sous l'hypothèse $E(Z) \neq 0$,

$$\frac{|A(Z)|}{E(Z)} \leqslant \frac{1}{4\tan\left(\frac{\pi}{n}\right)}$$

5. On admet qu'il existe $Z_0 \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$\forall Z \in \mathbb{C}^n, \quad |A(Z)| \leqslant \frac{|A(Z_0)|}{L(Z_0)^2} L(Z)^2$$

a. Soit $Z_0 := (z_0, \cdots, z_{n-1})$ et i_0 entier entre 1 et $n-1$. On note Z_1 le polygone obtenu à partir de Z_0 en remplaçant z_{i_0} par $z_{i_0} + t\left(z_{i_0+1} - z_{i_0-1}\right)$ (avec un t réel) sans changer les autres valeurs. Montrer que $A(Z_1) = A(Z_0)$.

b. Montrer que, quitte à modifier Z_0, on peut supposer que Z_0 est équilatéral.

INDICATION : Attention, c'est une question très délicate ! Il n'est raisonnable de la traiter que si toutes les autres questions été abordées avec un succès éclatant. On remarquera que $L(Z_0) \leqslant L(Z_1)$. On justifiera ensuite que, quitte à modifier Z_0, on peut supposer $z_i \neq z_{i+1}$ pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$. On utilisera alors les résultats de la partie III.

c. Montrer l'inégalité isopérimétrique pour les polygones :

$$\forall Z \in \mathbb{C}^n, \quad 4\pi |A(Z)| \leqslant L(Z)^2$$

INDICATION : Utiliser IV.3., IV.4.d. et la partie II.

Cette inégalité se généralise à d'autres courbes.

VIII. Indications

1

Faire apparaître une somme géométrique de raison -2 dans B_n.

2

En regroupant judicieusement les termes au 1., on trouve n. On trouve 0 au 2. Télescopage au 3. (décomposer le log en factorisant l'expression). Télescopage à nouveau au 4., on trouve $1 - \dfrac{1}{(n+1)!}$.

3

On peut envisager une récurrence mais on peut également sommer séparément sur les indices pairs et impairs.

4

On trouve $\sum_{0\leqslant 2k\leqslant d} a_{2k} z^{2k} = \frac{P(z)+P(-z)}{2}$.

5

La somme double s'écrit facilement comme un produit de sommes géométriques.

6

Utiliser le développement de $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_i\right)^2$.

7

Commencer par remarquer que $S = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} (q^j)^i$.

8

On trouve $2^{n+1}(n-1)+2$ au d. Utiliser des sommes d'exponentielles au c.

9

Au 1., il faut appliquer l'inégalité triangulaire.

10

On peut donner une démonstration élémentaire par récurrence. On peut aussi utiliser une formule de développement par distributivité (mais c'est une voie plus technique).

11

Appliquer la formule du binôme.

12

Sommes géométriques aux 1., 2. et 4., télescopage au 3.

13

L'expression est la partie réelle d'une somme géométrique d'exponentielles : après utilisation du formulaire puis passage à l'angle moitié, aboutir à $S = 1/2$.

14

Reconnaître en $S_n(x)$ la partie réelle d'une somme géométrique. Il faudra discuter sur x car la raison en dépend.

15

Effectuer une interversion.

16

Formulaire au 2. On peut sommer sur les diagonales au 3.

17

Sommer dans un ordre faisant apparaître la formule du binôme.

18

En revenant à la définition du module, on obtient $\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \rho_k\rho_\ell e^{i(\theta_k-\theta_\ell)}$.

19

On écrira σ_n sous la forme d'une somme double et on s'inspirera de la méthode du 1. au 3.

20

On trouve $S_1 = 2\cos x_0 \cos x_1$ et $S_2 = 4\cos x_0 \cos x_1 \cos x_2$.

21

Il y a une somme géométrique.

22

Les deux premiers produits se calculent directement ; trouver des relations entre les différents produits afin de terminer les calculs.

23

La premère relation est une invitation au télescopage.

24

Écrire la factorielle comme un produit. On peut déduire de cet exercice que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{e}$ mais c'est une autre histoire...

25

Appliquer la formule du binôme et grouper les deux sommes.

26

Développer P au moyen de la formule du binôme et cf. le cours.

1. **a.** Dériver le polynôme. On trouve $n2^{n-1}$.

   b. On trouve $n(n-1)2^{n-2}$.

   c. Utiliser 1. et 2. On trouve $n(n+1)2^{n-2}$.

   d. On trouve $\dfrac{2^{n+1}-1}{n+1}$ en calculant une intégrale : remarquer que $\dfrac{1}{k+1}=\displaystyle\int_0^1 t^k\mathrm{d}t$.
2. Simplifier le produit des coefficient en revenant aux factorielles. On trouve $2^p\binom{n}{p}$.
3. On *voit* le résultat sur le triangle de Pascal et on peut formaliser par une récurrence sur n ou on exploite un télescopage. On trouve $\dbinom{n+1}{p+1}$.

27

Effectuer une interversion dans la somme double.

28

On pourra par exemple montrer que la propriété est vraie pour tout $p\in\mathbb{N}$, par récurrence sur $n\in\mathbb{N}$ en remarquant que $u_{p+2(n+1)}=u_{p+2+2n}$.

29

On pourra par exemple raisonner par récurrence.

30

On se « promène » sur une colonne du triangle de Pascal, il faut donc penser à la formule éponyme et faire apparaître un télescopage. On trouve $(-1)^p\binom{n-1}{p}$.

31

Au IV.2.c., on trouve

$$\frac{|\mathrm{A(Z)}|}{\mathrm{L(Z)}^2}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{8n\sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4n\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\quad\text{et}\quad\frac{|\mathrm{A(Z)}|}{\mathrm{E(Z)}}=\frac{\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)}{4\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}\quad\text{et}\quad\frac{\mathrm{L(Z)}^2}{\mathrm{E(Z)}}=n$$