

Dieu a utilisé les mathématiques pour créer le monde.

Paul Dirac



Le dieu géomètre, Codex Vindobonensis

6	Dénombrement	1
I	Parties d'un ensemble fini	2
II	Applications entre ensembles finis	3
III	Listes et combinaisons	4
IV	Relations de récurrence	7
V	Problème	8
VI	Indications	11

I. Parties d'un ensemble fini

1 Cardinalogie

Soit E un ensemble de cardinal 100, A et B des parties de E telles que $|\bar{A} \cap \bar{B}| = 60$ et $|A| = 15$.
Déterminer $|B \setminus A|$.

2 Compter des parties *f*

Soient un ensemble E à n éléments, et A une partie de E à p éléments (avec $n, p \in \mathbb{N}$ tels que $p \leq n$).

1. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent *un et un seul élément* de A ?
2. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent *au plus un élément* de A ?
3. Quel est le nombre de parties de E qui contiennent *au moins un élément* de A ?

3 *X PC-2007 et Mines-Ponts PSI-2007 ff*

Soit E un ensemble de cardinal n et $(A, B) \in \mathcal{P}(E)^2$.

1. Déterminer le nombre de $X \in \mathcal{P}(E)$ telles que $A \cap X = B$.
2. Même question avec $A \cup X = B$.

4 *Parties emboîtées ff*

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer le nombre de couples (A, B) de parties de E tels que $A \subset B$.
2. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il de familles $(A_1, \dots, A_p) \in \mathcal{P}(E)^p$ telles que $A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_p$?

5 *Paires de parties sous contrainte ff*

Soit E un ensemble à n éléments, où $n \in \mathbb{N}^*$. On va dénombrer des parties de E sur lesquelles on posera certaines contraintes.

1. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cap Y = \emptyset$.
2. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que $X \cup Y = E$.
3. Déterminer le nombre de couples (X, Y) tels que (X, Y) forment une partition de E .
4. Déterminer le nombre de triplets (X, Y, Z) tels que $X \cup Y = Z$.

6 ?*Parties s'intersectant en un seul point ff*

Soit E un ensemble de cardinal n . Dénombrer les couples $(X, Y) \in \mathcal{P}(E)^2$ tels que $X \cap Y$ soit un singleton.

7 ?*Sommes fff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $\sum_{X \subset [1, n]} \sum_{k \in X} k$.

8 ?*Le lemme de Sperner fff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle antichaîne de $[1, n]$ toute partie \mathcal{A} de $\mathcal{P}([1, n])$ telle que

$$\forall (A, B) \in \mathcal{A}^2, A \neq B \implies (A \not\subset B \text{ et } B \not\subset A)$$

1. Soit $\ell \in [0, n]$. Établir avec soin que $\binom{n}{\ell} \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.
2. Soit $k \in [0, n]$. L'ensemble \mathcal{A}_k des parties de $[1, n]$ de cardinal k est-il une antichaîne de $[1, n]$?
3. Dans cette question, on fixe une antichaîne \mathcal{A} de $[1, n]$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on note Ω_A l'ensemble des permutations σ de $[1, n]$ qui induisent une bijection de $[1, \ell]$ sur A , où $\ell := |A|$.
 - a. Soit $A \in \mathcal{A}$. Donner l'expression de $|\Omega_A|$ en fonction de n et $\ell := |A|$.
 - b. Soit $(A, B) \in \mathcal{A}^2$ tel que $A \neq B$. Établir que $\Omega_A \cap \Omega_B = \emptyset$.
 - c. Pour $\ell \in [1, n]$, on note a_ℓ le nombre d'éléments de \mathcal{A} de cardinal ℓ . Justifier que

$$\sum_{\ell=1}^n a_\ell \ell! (n-\ell)! \leq n!$$

- d. En déduire que $|\mathcal{A}| \leq \binom{n}{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}$.

II. Applications entre ensembles finis

9 ?*Apprendre à compter f*

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le nombre :

1. d'applications d'un ensemble à m éléments vers un ensemble à n éléments;
2. de bijections entre deux ensembles à n éléments;
3. d'injections d'un ensemble à $n - 1$ éléments dans un ensemble à n éléments;
4. de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à $n - 1$ éléments.

10 ? ⚡*Surjections ff*

Pour n, m dans \mathbb{N}^* , on note $S_{n,m}$ le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sur $\llbracket 1, m \rrbracket$.

1. Justifier que $S_{n,m}$ est le nombre de surjections de E dans F où E et F sont des ensembles quelconques de cardinaux respectifs n et m .
2. Que vaut $S_{n,n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$? Que vaut $S_{n,m}$ si $1 \leq n < m$?
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq 2$.
 - a. Dénombrer les surjections $f : \llbracket 1, n+1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ telles que $\exists \ell \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(n+1) = f(\ell)$.

INDICATION : On exprimera le résultat en fonctions des $S_{i,j}$.

- b. En déduire que $S_{n+1,m} = m(S_{n,m} + S_{n,m-1})$.

11 ? ⚡*Applications idempotentes d'un ensemble fini fff*

Soit E un ensemble fini non vide et $p : E \rightarrow E$ une application. On dit que p est idempotente si $p \circ p = p$.

1. a. Montrer que si p est idempotente et injective alors $p = \text{id}_E$.
- b. Montrer que si p est idempotente et surjective alors $p = \text{id}_E$.
- c. Donner un exemple d'application idempotente de $\llbracket 1, 2 \rrbracket$ distincte de l'identité.
2. Déterminer sans justification les applications idempotentes de $\llbracket 0, 2 \rrbracket$.
3. Soit $n := |E|$. Dénombrer les applications idempotentes de E.

INDICATION : Remarquer que l'idempotence de p équivaut à la propriété $\forall x \in p(E), p(x) = x$. On trouvera une somme qu'on ne cherchera pas à simplifier.

12 ? ⚡*Surjections fff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$ tels que $p \geq n$. Calculer le nombre de surjections de $\llbracket 1, n \rrbracket$ dans $\llbracket 1, p \rrbracket$ en appliquant la formule d'inclusion-exclusion.

On pourra considérer, pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, l'ensemble $S_i := \{f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, p \rrbracket ; \forall x \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(x) \neq i\}$.

III. Listes et combinaisons

13 ? ⚡*Histoires de chiffres*

Soit E l'ensemble des nombres admettant 7 chiffres en base 10 et ne comportant aucun 0 : par exemple, le plus petit et le plus grand de ces nombres sont respectivement 1111111 et 9999999.

1. Déterminer le cardinal de E.

2. Déterminer le cardinal de E_1 , la partie de E constituée des nombres ayant 7 chiffres différents.
3. Déterminer le cardinal de E_2 , la partie de E constituée des nombres pairs.
4. Déterminer le cardinal de E_3 , la partie de E constituée des nombres dont la suite des chiffres (de gauche à droite) est strictement croissante (comme par exemple 2456789 ou encore 1345689).

14  *Mains au jeu de cartes f*

Un jeu comporte 32 cartes (8 par couleurs, 4 couleurs). Une main est constituée de 8 cartes sans ordre.

1. Quel est le nombre de mains possibles ?
2. Combien de mains contiennent les 4 as ?
3. Combien de mains contiennent au moins un cœur ou une dame ?
4. Combien de mains ne contiennent pas plus de deux couleurs ?
5. Combien de mains contiennent exactement 4 trèfles dont la dame ?
6. Combien de mains ne contiennent pas de cœur ?
7. Combien de mains contiennent au plus 3 carreaux ?

15  *Parties de cardinal pair f*

Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in E$. On pose $\phi : \mathcal{P}(E) \rightarrow \mathcal{P}(E)$ définie par $\phi(X) = X \Delta \{a\}$. On note $\mathcal{P}_e(E)$ (resp. $\mathcal{P}_o(E)$) l'ensemble des parties de E de cardinal pair (resp. impair).

1. Calculer $\phi \circ \phi$ et en déduire que ϕ est une bijection.
2. Établir que $\phi(\mathcal{P}_e(E)) = \mathcal{P}_o(E)$ puis calculer $|\mathcal{P}_e(E)|$ et $|\mathcal{P}_o(E)|$.
3. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant la formule du binôme.

16  *Dénombrément de couples d'entiers f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Combien existe-t-il de couples (x, y) :

- | | |
|---|--|
| 1. de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $x + y = n$? | 3. de $\llbracket 1, n \rrbracket \times \llbracket 1, 2n \rrbracket$ tels que $x < y$? |
| 2. de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $x < y$? | 4. de $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ tels que $ x - y \leqslant 1$? |

17  *Répartitions en ligne ou en cercle f*

De combien de façons différentes peut-on disposer n hommes et n femmes :

1. Sur un banc contenant $2n$ places ?
2. Autour d'une table ronde de $2n$ places ?

3. Reprendre les questions précédentes en supposant dans les deux cas que hommes et femmes sont répartis de manière alternée.

18



Cardinal des sphères de \mathbb{Z}^n pour la norme infinie f

Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On note $E_{n,p} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n ; \max(|x_1|, \dots, |x_n|) = p\}$.

1. Déterminer $|E_{1,p}|$ pour $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer $|E_{2,2}|$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $|E_{n,1}| = 3^n - 1$.
3. Montrer que, pour $n \geq 1$ et $p \geq 2$, $E_{n,p} = [-p, p]^n \setminus [1-p, p-1]^n$ et en déduire $|E_{n,p}|$.
4. Déterminer une constante $\lambda > 0$ telle que $|E_{n,n}| \sim \lambda(2n)^n$.

19



Parties de diamètre fixé ff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A \subset [1, n]$ est une partie non vide, on définit son diamètre :

$$\text{diam } A := \max A - \min A$$

1. Quelles sont les parties de $[1, n]$ de diamètre 0 ? Même question avec 1 ?
2. Quelles sont les parties de $[1, n]$ de diamètre $n - 1$?
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de parties de $[1, n]$ de diamètre k .

20



Sommes de cardinaux ff

Soit E un ensemble de cardinal n .

1. On pose $\sigma := \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} |A|$.
 - a. Calculer σ en sommant par paquets de parties A de E de même cardinal $k \in [0, n]$.
 - b. Calculer σ en intervertissant les sommes dans la relation suivante que l'on justifiera

$$\sigma = \sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \sum_{x \in E} \mathbb{1}_A(x)$$

2. Exprimer $v := \sum_{(A,B) \in \mathcal{P}(E)^2} |A \cap B|$ en fonction de n .

21



Permutations sans points fixes (sans Pascal ni Poincaré) fff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $k \in [0, n]$, on note $p_n(k)$ le nombre d'éléments de \mathfrak{S}_n admettant exactement k points fixes.

1. Justifier que $n! = \sum_{k=0}^n p_n(k)$.

2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Établir que $p_n(k) = \binom{n}{k} p_{n-k}(0)$.

3. En déduire que $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(0)$ puis que $p_n(0) = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

IV. Relations de récurrence

22  

Mots binaires ne contenant pas le facteur 00 

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note u_n le nombre de $(x_1, \dots, x_n) \in \{0, 1\}^n$ tel que $\forall i \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, x_i et x_{i+1} ne sont jamais simultanément nuls. On conviendra que $u_1 = 2$. Montrer que $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ pour tout $n \geq 3$.

23  

Partitions en p parties 

Pour n et p dans \mathbb{N}^* , on note $\rho_{n,p}$ le nombre de partitions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ en p parties.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_{n+1,n} = \binom{n+1}{2}$.

2. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_{n,2}$.

3. Montrer que pour tout n et p dans \mathbb{N}^* , on a $\rho_{n+1,p+1} = \rho_{n,p} + (p+1)\rho_{n,p+1}$.

INDICATION : on pourra distinguer parmi les partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$ en $p+1$ parties, celles qui contiennent le singleton $\{n+1\}$ et celles qui ne le contiennent pas.

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\rho_{n+1,3} = \frac{3^n - 2^{n+1} + 1}{2}$.

24  

Involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$ 

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle *involution de $\llbracket 1, n \rrbracket$* tout élément σ de $\mathfrak{S}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ tel que $\sigma^2 = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$. On note u_n le nombre d'involutions de $\llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+2} = u_{n+1} + (n+1)u_n$.

25  

Nombre de partitions 

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note ρ_n le nombre de partitions d'un ensemble de cardinal n . Établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \rho_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \rho_k$$

V. Problème

26 ? ⓘ

Partitions d'un ensemble fini **ff-fff**

Soit E un ensemble fini non vide. Pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que $\{A_1, \dots, A_k\}$ est une partition de E en k classes si :

$$A) \bigcup_{i=1}^k A_i = E;$$

$$B) \forall i \in \llbracket 1, k \rrbracket, A_i \neq \emptyset;$$

$$C) \forall (i, j) \in \llbracket 1, k \rrbracket^2, \\ i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset.$$

Une partie \mathcal{M} de $\mathcal{P}(E)$ est appelée partition de E s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que \mathcal{M} soit une partition de E en k classes.

Par exemple, on dénombre 5 partitions de $E = \llbracket 1, 3 \rrbracket$:

$$\begin{array}{ll} \underbrace{\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}} & \underbrace{\{\{1, 2\}, \{3\}\}, \{\{1, 3\}, \{2\}\}, \{\{2, 3\}, \{1\}\}} \\ \text{une partition en 3 classes} & \text{trois partitions en 2 classes} \\ \underbrace{\{\{1, 2, 3\}\}} & \\ \text{une partition en 1 classe} & \end{array}$$

Partie I – Partitions dans le cas général – Lien avec les surjections

Dans cette partie, on suppose que $\#E = n$. On note $r(n)$ le nombre de partitions de E avec la convention $r(0) = 1$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note $r(n, k)$ le nombre de partitions de E en k classes.

1. Montrer que $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, k > n \implies r(n, k) = 0$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, r(n) = \sum_{k=1}^n r(n, k)$.

3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, r(n+1) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} r(k)$.

On pourra fixer un élément particulier a d'un ensemble E de cardinal $n+1$ et construire une partition de E en commençant par choisir la partie qui contient a .

4. Calculer $r(n)$ pour $n \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$.

5. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, r(n) \leq n^n$.

On pourra procéder par récurrence en utilisant la question 3).

6. Montrer que $\forall n \geq 5, r(n) \geq 2^n$.

7. On note $S_{n,k}$ le nombre de surjections d'un ensemble à n éléments sur un ensemble à k éléments.
Montrer que $\forall (k, n) \in (\mathbb{N}^*)^2, S_{n,k} = k! r(n, k)$.

Partie II – Partitions en paires

On suppose que $\#E = 2m$, avec $m \geq 1$. On note a_m le nombre de partitions de E en m classes qui sont des paires.

1. Déterminer a_1, a_2 et a_3 . Par convention, on pose $a_0 = 1$.

2. Montrer que $\forall m \in \mathbb{N}^*$, $a_m = (2m-1)a_{m-1}$.

Pour cela, on fixera un élément particulier a de E et on construira une partition de E en paires en choisissant d'abord la paire contenant a .

3. En déduire que $a_m = \frac{(2m)!}{2^m m!}$.

Partie III – Partitions en paires et singletons – Involutions

On suppose que $\#E = n$, avec $n \geq 1$. On note b_n le nombre de partitions de E en classes qui sont des paires ou des singletons.

1. Déterminer b_1, b_2, b_3 et b_4 .

2. On suppose que $n = 2m$ avec $m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $b_{2m} = \sum_{k=0}^m \binom{2m}{2k} a_{m-k}$.

On pourra classer les partitions suivant le nombre de singletons qu'elles contiennent.

3. Montrer que $\forall n \geq 3$, $b_n = b_{n-1} + (n-1)b_{n-2}$.

4. Calculer b_n , pour $n \in \llbracket 1, 5 \rrbracket$.

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer le nombre d'applications $f : \llbracket 1, n \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $f \circ f = \text{id}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$.

27  

Dérangements d'un ensemble de cardinal n

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note D_n le nombre de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe. On pose $D_0 = 1$.

Ce problème expose trois méthodes de calcul de D_n .

Partie I – Premier calcul : par la formule du crible

Pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note E_i l'ensemble des permutations σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telles que $\sigma(i) = i$.

1. Écrire l'ensemble E des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe au moyen des E_i .

2. Calculer D_n en utilisant la formule du crible.

Partie II – Deuxième calcul : par une série génératrice

Pour tout $x \in]-1, 1[$, on pose $f(x) := \frac{e^{-x}}{1-x}$.

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^∞ et, au moyen de la formule de Leibniz, établir que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(0) = n!$$

2. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n! = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} D_k$.

3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D_n = f^{(n)}(0)$.

4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

Partie III – Troisième méthode : par une relation de récurrence

1. Calculer D_1 , D_2 et D_3 .

2. Établir que, pour tout $n \geq 2$, $D_n = (n-1)(D_{n-1} + D_{n-2})$. Pour une permutation σ de $[1, n]$ sans point fixe, on pourra considérer $k = \sigma(n)$ et discuter suivant la valeur de $\sigma(k)$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = nD_{n-1} + (-1)^n$.

4. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $D_n = n! \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!}$.

5. Par une formule de Taylor, montrer que $\sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} e^{-1}$. En déduire un équivalent de D_n .

VI. Indications

1 ↗

Faire une figure.

2 ↗

On trouve $p2^{n-p}$, $(p+1)2^{n-p}$ et $2^n - 2^{n-p}$.

3 ↗

Commencer par esquisser des patates.

4 ↗

On trouve 3^n couples au 1. et $(p+1)^n$ au 2. On pourra par exemple utiliser les fonctions indicatrices.

5 ↗

On trouve 3^n , 3^n , $2^n - 2$ et 4^n .

6 ↗

Construire une solution (X, Y) « point par point ».

7 ↗

Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, combien dénombre-t-on de $X \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ tels que $k \in X$?

8 ↗

AU 3.b., on pourra se ramener au cas où $|A| \leq |B|$ et raisonner par l'absurde.

9 ↗

C'est du cours aux a), b) et c) : n^m , $n!$, $n!$. On trouve $n!(n-1)/2$ au c).

10 ↗

Pour la relation du 3., construire une application surjective $f : \llbracket 1, n+1 \rrbracket \rightarrow \llbracket 1, m \rrbracket$ en distinguant deux cas : $f(1)$ a pour unique antécédent 1 ou admet au moins deux antécédents.

11 ↗

Au 3., on pourra construire p en choisissant d'abord son image $p(E)$ puis en définissant $p(x)$ pour tout $x \in E$.

12 ↗

Remarquer que $\overline{\mathcal{S}} = \bigcup_{i=1}^p S_i$.

13 

Ce sont des calculs très proches du cours. Utiliser le lemme des bergers.

14 

Au 3., il est judicieux de passer au complémentaire.

15 

On a bien-sûr

$$|\mathcal{P}_e| = \sum_{0 \leq 2k \leq n} \binom{n}{2k} \text{ et } |\mathcal{P}_o| = \sum_{0 \leq 2k+1 \leq n} \binom{n}{2k+1}$$

et voir le cours pour la suite.

16 

On peut décrire géométriquement les différents ensembles afin de se forger une intuition.

17 

Dans le cas des bancs, les places sont distinguables, ce qui n'est pas le cas dans le cas de la table.

18 

On trouve $\lambda := \sqrt{e} - \frac{1}{\sqrt{e}}$ avec un peu d'asymptotique.

19 

Au 3., on pourra construire une partie de diamètre k en choisissant d'abord son maximum M (son minimum sera alors nécessairement $M - k$) puis en complétant la paire $\{M - k, M\}$.

20 

Pour x fixé dans E , $\sum_{A \in \mathcal{P}(E)} \mathbb{1}_A(x)$ est le nombre de parties de E contenant l'élément x (cf. l'exercice 2).

21 

Raisonner par récurrence à la dernière question.

22 

C'est un exemple très proche du cours : effectuer une disjonction de cas selon la valeur de x_n .

23 

On trouve $p_{n,2} = 2^{n-1} - 1$.

24 

Au 2., construire une involution σ de $\llbracket 1, n+2 \rrbracket$ en considérant deux cas : $\sigma(n+2) = n+2$ et $\sigma(n+2) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

25 

Il s'agit de compter les partitions de $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$. On pourra commencer par construire la partie A contenant 1 puis partitionner $\llbracket 1, n+1 \rrbracket \setminus A$.

26 

Au I.3., on pourra fixer a dans E puis construire une partition de E en commençant par la partie qui contient a .

27 

On a $\mathfrak{S}_n \setminus E = \bigcup_{i=1}^n E_i$.