



La rigueur n'a jamais eu pour objet que de sanctionner et légitimer les conquêtes de l'intuition.

Jacques Hadamard



September, Gerhard Richter

9	Espaces vectoriels et applications linéaires	1
I	Sous-espaces vectoriels	2
II	Calculs sur les applications linéaires	3
III	Image et noyau	3
IV	Projections et symétries	5
V	Indications	7

I. Sous-espaces vectoriels

1 ? Somme de deux plans

Soit $E = \mathbb{R}^3$, $F = \{(x, y, z); x + y - z = 0\}$ et $G = \{(a - b, a + b, a - 3b) \mid (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

1. Établir que F et G sont des sev de E .
2. Déterminer $F \cap G$. Prouver que $F + G = E$. La somme est-elle directe ?

2 ? Des sev supplémentaires

Soit $E := \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On pose

$$F := \text{Vect}(\cos, \sin) \quad \text{et} \quad G := \left\{ f \in E; f(0) = f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \right\}$$

Démontrer que F et G sont supplémentaires dans E .

3 ? Distributivité de $\cap$ sur $+$? f

Soient A, B et C des sev d'un $\mathbb{K}$ -ev E . On note $F = (A \cap B) + (A \cap C)$, $G = A \cap (B + (A \cap C))$ et $H = A \cap (B + C)$.

1. Montrer que F et G sont des sev de H .
2. Établir que $F = G$.
3. A-t-on toujours $F = G = H$?

4 ? Quizz f

Parmi les sous-ensembles suivants de l'espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ lesquels en sont des sous-espaces vectoriels ?

1. L'ensemble des fonctions dérivables en 0 ;
2. L'ensemble des fonctions monotones sur $\mathbb{R}$;
3. L'ensemble des fonctions prenant la valeur 1 en 0 ;
4. L'ensemble des fonctions prenant la valeur 0 en 1 ;
5. L'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$;
6. L'ensemble des fonctions f telles que : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$;
7. L'ensemble des fonctions nulles sur $[-1, 1]$;
8. L'ensemble des fonctions admettant une période rationnelle ;
9. L'ensemble des fonctions ayant une limite dans $\mathbb{R} \cup \pm\infty$ en $+\infty$.

II. Calculs sur les applications linéaires

5 ?

Calculs dans $\mathcal{L}(E)$

Soit E un espace vectoriel, u et v des endomorphismes de E vérifiant $u \circ v - v \circ u = u$. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u^n \circ v - v \circ u^n = nu^n$$

6 ?

Propriétés des endomorphismes nilpotents f

Soit E un $\mathbb{R}$ -ev. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on dit que u est nilpotent si et seulement si existe $q \in \mathbb{N}$ tel que $u^q = 0$. On pose $p = \min\{q \in \mathbb{N}; u^q = 0\}$; cet entier est appelé *indice de nilpotence de u* .

1. Montrer que, si u est nilpotent, alors u n'est ni injectif ni surjectif.
2. Soit u et v nilpotents tels que $u \circ v = v \circ u$. Montrer que $u + v$ et $u \circ v$ sont nilpotents.

7 ?

Endomorphismes nilpotents ff

Soit f , un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -ev E . On suppose que f est nilpotent, i.e. il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^n = 0$.

1. Soit $y \in E$. Résoudre l'équation $x - f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$.
2. En déduire que $\text{id}_E - f$ est un isomorphisme et expliciter $(\text{id}_E - f)^{-1}$.
3. Démontrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, l'endomorphisme $\text{id}_E - f^k$ est un isomorphisme. On précisera l'expression de son inverse.

III. Image et noyau

8 ?

B.A.BA

On considère l'application $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-x + z, -y + z, x - 2y + z)$.

1. Justifier que f est linéaire.
2. Déterminer le noyau de f .
3. Trouver deux vecteur u_1 et u_2 tels que $\text{Im } f = \text{Vect}(u_1, u_2)$ et en déduire que $\text{Ker } f \subset \text{Im } f$.
4. Démontrer que $f \circ f$ est un projecteur.

9 ? Quelques résultats classiques *f*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et f, g des endomorphismes de E .

1. Montrer que, si $\text{id}_E - f \circ g$ est injectif, alors $\text{id}_E - g \circ f$ est injectif. Montrer que, si $\text{id}_E - f \circ g$ est surjectif, alors $\text{id}_E - g \circ f$ est surjectif.
2. Montrer que $\text{Ker } f \circ g = \text{Ker } g$ si et seulement si $\text{Ker } f \cap \text{Im } g = \{0\}$.
3. Établir que $\text{Im } f \circ g = \text{Im } f$ si et seulement si $\text{Ker } f + \text{Im } g = E$.
4. En déduire que $f \circ g$ est bijectif si et seulement si $\text{Im } f = E$, $\text{Ker } g = \{0\}$ et $\text{Ker } f \oplus \text{Im } g = E$.

10 ? Noyaux et images itérés *ff*

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et ϕ un endomorphisme de E . Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $K_n := \text{Ker } \phi^n$.

1. Démontrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement croissante pour l'inclusion ou strictement croissante puis stationnaire.
2. Donner un exemple d'endomorphisme ϕ de E tel que $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne soit pas strictement croissante.
3. On suppose dans cette question que $E := \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Donner un exemple d'endomorphisme ϕ de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ tel que $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit strictement croissante.
4. Énoncer une propriété analogue vérifiée par la suite $(\text{Im } \phi^n)_{n \in \mathbb{N}}$ et l'illustrer au moyen d'exemples.

11 ? *X-MP 2022 ff*

Soit u et v deux endomorphismes d'un espace vectoriel E tels que $u^2 = v^2 = \text{id}_E$. Montrer que

$$\text{Ker } (u \circ v - v \circ u) = \text{Ker } (u - v) \oplus \text{Ker } (u + v)$$

12 ? Image d'une somme *ff*

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev et $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$. Montrer que si $\text{Im } (f + g) = \text{Im } f \oplus \text{Im } g$, alors $E = \text{Ker } f + \text{Ker } g$.

13 ? Image réciproque d'une image directe et inversement *ff*

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E et F un sev de E .

1. Démontrer $u^{-1}\langle u(F) \rangle = F + \text{Ker } u$.
2. Exprimer $u\langle u^{-1}\langle F \rangle \rangle$ en fonction de F et de $\text{Im } u$.
3. À quelle condition a-t-on $u^{-1}\langle u(F) \rangle = u\langle u^{-1}\langle F \rangle \rangle$?

14 ?*Valeurs et sous-espaces propres ff*

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. Pour $f \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose $E_\lambda(f) := \text{Ker}(f - \lambda \text{id}_E)$.

⇒ On dit que λ est valeur propre de f si $E_\lambda(f) \neq \{0\}$.

⇒ Dans ce cas, on dit que $E_\lambda(f)$ est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre λ .

1. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On suppose $\lambda \neq \mu$. Déterminer $E_\lambda(f) \cap E_\mu(f)$.
2. Soit $(f, g) \in \mathcal{L}(E)^2$ tel que $f \circ g = g \circ f$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrer que $E_\lambda(f)$ et $E_\lambda(g)$ sont stables par f et g .
3. On fixe $\alpha \in \mathbb{K}$. Quelles sont les valeurs propres de αid_E ? Quels sont les sous-espaces propres associés?
4. Soit p un projecteur de E non nul et distinct de id_E . Quelles sont les valeurs propres de p ?
5. Dans cette question, on pose $E = \mathbb{R}^3$ (et donc $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) et

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-y + 2z, -y, -x + y - 3z)$$

Quelles sont les valeurs propres de f ? Quels sont les sous-espaces propres associés?

15 ?*Mines fff*

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et u et v deux endomorphismes de E qui commutent. On suppose que $\text{Ker } u \cap \text{Ker } v = \{0\}$.

1. Pour $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$, montrer que $\text{Ker}(u - av) \cap \text{Ker}(u - bv) = \{0\}$.
2. Si $a_1, \dots, a_n$ sont des scalaires distincts, montrer que la somme des sous-espaces vectoriels $\text{Ker}(u - a_k v)$ pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ est directe.

IV. Projections et symétries

16 ?*Somme de deux projecteurs f*

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, p et q deux projecteurs de E .

1. Prouver que $p \circ q + q \circ p = 0 \iff p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Montrer que $p + q$ est un projecteur si et seulement si $p \circ q = q \circ p = 0$.
3. On suppose que $p + q$ est un projecteur. Montrer que $\text{Im}(p + q) = \text{Im } p \oplus \text{Im } q$ et $\text{Ker}(p + q) = \text{Ker } p \cap \text{Ker } q$.

17 ?*Sous les projecteurs f*

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev, p_1 et p_2 deux projecteurs de E tels que $p_1 \circ p_2 = 0$. On pose $q = p_1 + p_2 - p_2 \circ p_1$.

1. Montrer que q est un projecteur de E .
2. Prouver que $\text{Ker } q = \text{Ker } p_1 \cap \text{Ker } p_2$ et $\text{Im } q = \text{Im } p_1 \oplus \text{Im } p_2$.

18 ?*Projecteurs de même noyau, de même image f*

Soient E un $\mathbb{K}$ -ev, f et g deux projecteurs de E .

1. Montrer que $\text{Im } f = \text{Im } g$ si et seulement si $f \circ g = g$ et $g \circ f = f$.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\text{Ker } f = \text{Ker } g$.

19 ?*Projecteurs qui commutent ff*

Soit p et q deux projecteurs d'un $\mathbb{K}$ -ev E , tels que $p \circ q = q \circ p$.

1. Démontrer que $p \circ q$ et $p + q - p \circ q$ sont deux projecteurs de E .
2. Exprimer $\text{Im } p \circ q$ et $\text{Im}(p + q - p \circ q)$ en fonction de $\text{Im } p$ et $\text{Im } q$.

20 ?*Centrale PC-2015 ff*

Soit E un $\mathbb{K}$ -ev de dimension quelconque, V un sous-espace vectoriel de E , p un projecteur d'image V . Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et u un endomorphisme de E tel que $u^n = \text{id}_E$ et $u(V) \subset V$. On pose

$$q = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} u^k \circ p \circ u^{n-k}$$

1. Montrer que $u \circ q = q \circ u$.
2. Montrer que $q \circ p = p$.
3. Montrer que q est un projecteur.
4. Déterminer l'image de q . En déduire l'existence d'un supplémentaire de V stable par u .

V. Indications

- 1 ↪ _____
Les sev F et G sont des plans, $F \cap G$ une droite.
- 2 ↪ _____
Une Analyse-Synthèse est toujours possible.
- 3 ↪ _____
Raisonnement par double inclusion au b). La réponse est « non » au c) (chercher de contre-exemples dans $\mathbb{R}^2$).
- 4 ↪ _____
Seuls 2., 3., 6. et 9. ne sont pas des sev.
- 5 ↪ _____
Procéder par récurrence.
- 6 ↪ _____
Utiliser la formule du binôme au 2.
- 7 ↪ _____
Raisonnement par analyse-synthèse au 1. en remarquant que si $x - f(x) = y$, alors $f(x) - f^2(x) = f(y)$, etc.
- 8 ↪ _____
Reconnaître en f l'application canoniquement associée à une matrice.
- 9 ↪ _____
Au 1., remarquer que $(f \circ g)(x) = x$ implique $(g \circ f)(f(x)) = f(x)$.
- 10 ↪ _____
Considérer les décalages de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}} : (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \mapsto (0, u_0, u_1, \dots)$.
- 11 ↪ _____
Les endomorphismes u et v sont des symétries. On peut aborder cet exercice par une Analyse-Synthèse.
- 12 ↪ _____
Pour $x \in E$, on remarquera que $f(x) \in \text{Im}(f + g)$.

13

On démontre que $u\langle u^{-1}\langle F \rangle \rangle = F \cap \text{Im } u$.

14

Au 4., on trouve 0 et 1.

15

Raisonner par récurrence au 2.

16

Exploiter sans relâche la relation $p^2 = p$.

17

Exploiter sans relâche la relation $p^2 = p$ et se souvenir que, si f est un projecteur, $y \in \text{Im}(f)$ *si et seulement si* $f(y) = y$.

18

On a $\text{Ker } f = \text{Ker } g$ *si et seulement si* $f \circ g = f$ et $g \circ f = g$.

19

Vérifier que $\text{Im } p \circ q = \text{Im } p \cap \text{Im } q$.

20

On a $\text{Im}(q) = V$. Le noyau de q répond au 4.