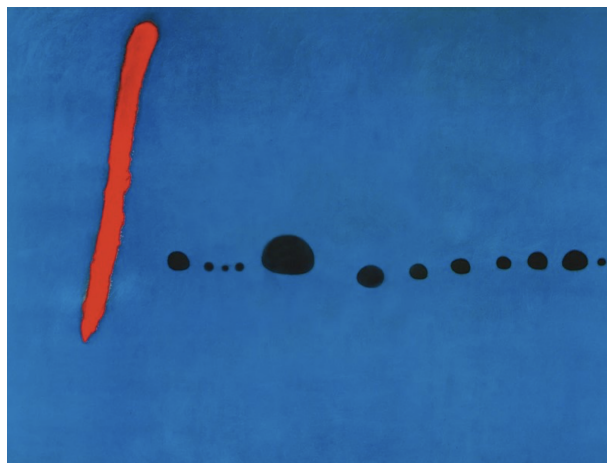


Ô mathématiques sévères, je ne vous ai pas oubliées, depuis que vos savantes leçons, plus douces que le miel, filtrèrent dans mon cœur, comme une onde rafraîchissante.

Isidore Ducasse (comte de Lautréamont)



Bleu II, Miro

10	Théorie de la dimension	1
I	Sous-espaces vectoriels	2
II	Familles de vecteurs	2
III	Image et noyau	3
IV	Théorème du rang	4
V	Endomorphismes nilpotents	6
VI	Formes linéaires	6
VII	Indications	8

28*Formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ fff*

1. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$. Montrer que $\exists ! A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \phi(M) = \text{tr } AM$.
2. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \mathbb{C})$ invariante par similitude i.e.

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), \forall P \in \text{GL}_n(\mathbb{C}), \phi(P^{-1}MP) = \phi(M)$$

Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\phi = \lambda \text{tr}$.

VII. Indications

- 1  _____
F est de dimension trois et G de dimension deux.
- 2  _____
C'est une routine dès que l'on réussit à écrire $A \cap B$ sous forme paramétrique.
- 3  _____
On peut par exemple raisonner par contraposition.
- 4  _____
Procéder par double implication. Revenir aux définitions du cours : il n'y a aucune difficulté si on pose clairement la problématique.
- 5  _____
On peut raisonner par l'absurde ou par récurrence, en revenant aux combinaisons linéaires.
- 6  _____
La famille du 1. est liée. Au 2., il faut effectuer une disjonction de cas suivant la parité de n en revenant aux combinaisons linéaires.
- 7  _____
La CNS recherchée est $\sum_{k=1}^n \alpha_k \neq -1$.
- 8  _____
Commencer par étudier la liberté $(v_1, \dots, v_n)$ en tant que famille de vecteurs du $\mathbb{C}$ -ev C^n .
- 9  _____
Raisonner par récurrence. Afin de se ramener au rang $n - 1$, on pourra dériver.
- 10  _____
Au 2., on s'intéressera à $(\text{id}_E - g) \circ (\text{id}_E - f)$ et $(\text{id}_E - f) \circ (\text{id}_E - g)$.
- 11  _____
Appliquer le théorème du rang.

12 ↻

On pourra remarquer que, si $\text{Im } u \cap \text{Im } v = \{0\}$, alors $\text{Ker}(u + v) = \text{Ker } u \cap \text{Ker } v$.

13 ↻

Remarquer que $\text{Ker } u|_{E_1} = E_1 \cap \text{Ker } u$.

14 ↻

Au 1., on pourra définir un endomorphisme u qui convient en utilisant des bases de E .

15 ↻

Un isomorphisme de $F \cap G$ sur $\text{Ker } \sigma$ est donné par $x \mapsto (x, -x)$.

16 ↻

Utiliser le théorème du rang.

17 ↻

Utiliser le théorème du rang pour démontrer **4.** $\implies$ **1.**

18 ↻

On sait que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante pour l'inclusion (cf. les exercices de ALG 9). La suite des $\dim K_n$ va donc être stationnaire (à justifier avec soin).

19 ↻

Pour l'implication non triviale, considérer un supplémentaire S de G dans E puis s'aider d'une base adaptée à la décomposition $E = G \oplus S$ pour définir u .

20 ↻

Souvenez-vous que a induit un isomorphisme d'un supplémentaire de $\text{Ker } a$ sur $\text{Im } a$.

21 ↻

Au 3., justifier que $\dim u\langle S \rangle = \dim S$.

22 ↻

Les deux premières questions (qui relèvent d'une analyse), suggèrent de définir $\phi|_{\text{Ker } u} = \phi_1|_E$. Il reste à définir ϕ sur un supplémentaire S_2 de $\text{Ker } u$.

23 ↻

1. Vérifier que $\phi^{2n-1} = 0$.

2. Trouver $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\phi^{2n-2}(g) \neq 0$ en utilisant $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

24



Partir d'une combinaison linéaire nulle au 1. et appliquer u^{n-1} .

25



La démonstration de **b.** $\implies$ **a.** est facile par double inclusion. Pour la réciproque, on pourra construire g en utilisant un supplémentaire de $\text{Im } f$ dans E .

26



Une analyse aboutit à la relation $\text{Im } f = \text{Vect } a$.

27



Travailler sur une décomposition $E = H \oplus \text{Vect}(x_0)$.

28



On peut – par exemple – raisonner par analyse-synthèse au 1.