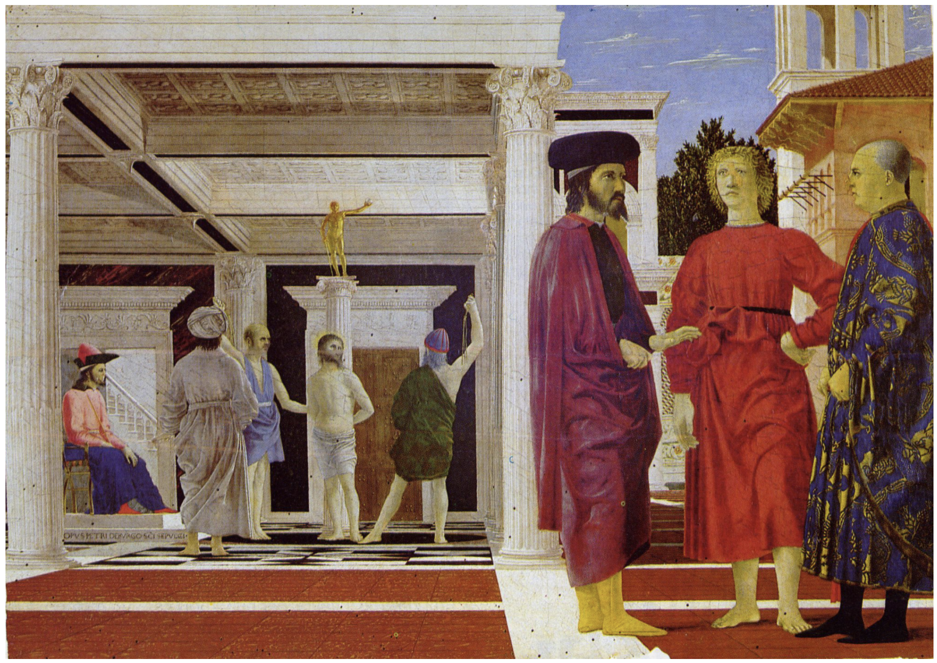
ALG 14 | Espaces préhilbertiens réels

Les mathématiciens sont comme les français : quoique vous leur dites ils le traduisent dans leur propre langue et le transforment en quelque chose de totalement différent.

Johann Wolfgang von Gœthe



Flagellation du Christ, Piero della Francesca

I. Produits scalaires, normes euclidiennes et inégalités

1 — *Une inégalité sur les intégrales*

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où $a < b$. Démontrer que

$$\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2} \leqslant \sqrt{\int_a^b f(t)^2 \mathrm{d}t}\sqrt{\int_a^b f'(t)^2 \mathrm{d}t}$$

2 — *Une suite monotone f*

Soit $(f,g) \in \mathscr{C}^0\left([0,1], \mathbb{R}_+^*\right)^2$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_0^1 f g^n$. Montrer que $\left(\dfrac{\mathrm{I}_n}{\mathrm{I}_{n+1}}\right)_{n \geqslant 0}$ est décroissante.

3 — *Une curiosité f*

Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que $\forall\ (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ 2 + \|x+y\|^2 \leqslant 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right)$.

4 — *Minimisation d'une fonctionnelle f*

Soit E un espace euclidien et $x_1, \ldots, x_n$ dans E. On note $\phi : x \in \mathrm{E} \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \|x - x_k\|^2$.

1. Vérifier que $\forall (\mu, h) \in \mathrm{E}^2$, on a $\phi(h+\mu) = n\|h\|^2 + 2\left\langle \sum_{k=1}^{n}\left(\mu - x_k\right), h\right\rangle + \phi(\mu)$.

2. En déduire qu'il existe un unique $\mu_0 \in \mathrm{E}$ tel que ϕ réalise son minimum en μ_0.

5 — *Étude d'une forme bilinéaire symétrique ff*

Soit E un espace euclidien et a un vecteur unitaire de E. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on note

$$\psi_\lambda : \begin{array}{rcl} \mathrm{E}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \langle x, y\rangle + \lambda\langle a, x\rangle\langle a, y\rangle \end{array}$$

Établir que ψ_λ est un produit scalaire sur E *si et seulement si* $\lambda > -1$.

6 — *Taille d'un nuage de vecteurs unitaires ff*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $v_1, \ldots, v_n$ des vecteurs unitaires d'un espace préhilbertien E. On considère les nombres

$$\mathrm{S} := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \|v_i - v_j\| \quad \text{et} \quad \mathrm{T} := \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} \|v_i - v_j\|^2$$

Montrer qu'on a les relations $\mathrm{T} = n^2 - \left\| \sum_{k=1}^{n} u_i \right\|^2$ et $\mathrm{S} \leqslant n\sqrt{\dfrac{n(n-1)}{2}}$.

7 — *Étude d'une forme bilinéaire symétrique et positive ff*

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs dans $[0,1]$. On considère l'application définie par

$$\forall (f,g) \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2\ ,\ \langle f,g\rangle := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f(a_n)g(a_n)}{2^n}$$

1. Justifier que cette application est correctement définie, bilinéaire, symétrique et positive sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})^2$.
2. Déterminer une cns pour cette application soit un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.

II. Familles de vecteurs

8 — *Les polynômes de Legendre f*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ muni du produit scalaire $\langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle := \displaystyle\int_0^1 \mathrm{PQ}$ sur $\mathbb{R}^2$.

Pour tout k dans $[\![0,n]\!]$, on note $\mathrm{L}_k(\mathrm{X}) := \big(\mathrm{X}^k(\mathrm{X}-1)^k\big)^{(k)}$.

1. Montrer que, pour $k \in [\![0,n]\!]$, $\mathrm{L}_k \in \mathrm{E}$ et déterminer le degré ainsi que le coefficient dominant de L_k.
2. Calculer, par des intégrations par parties successives, et pour tous $p \neq q$, $\langle \mathrm{L}_p, \mathrm{L}_q\rangle$. En déduire que $(\mathrm{L}_0,\ldots,\mathrm{L}_n)$ est une base orthogonale de E.
3. Déterminer la norme de L_k, pour tout $k \leqslant n$.

9 — *Une caractérisation des bon ff*

Soit E un espace euclidien et $e_1,\ldots,e_n$ dans $\mathrm{E}\setminus\{0\}$ tels que $\forall x \in \mathrm{E},\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x|e_k\rangle^2$.

1. Montrer que, $\forall (x,y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x|y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle\langle y|e_i\rangle$.
2. En déduire que, $\forall x \in \mathrm{E},\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x|e_i\rangle e_i$.
3. Établir que $(e_1,\ldots,e_n)$ est une base orthonormée de E.

10 — *Changer de poids ff*

On munit $\mathrm{E} := \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$ du produit scalaire $(\mathrm{P},\mathrm{Q}) \in \mathrm{E}^2,\ \langle \mathrm{P},\mathrm{Q}\rangle := \displaystyle\int_{-1}^{1} \big(1+t^2\big)\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer l'existence et l'unicité d'une suite $(P_n)_{n\geqslant 0}$ de E, orthogonale pour $\langle\,,\rangle$ et telle que P_n admette (pour tout entier naturel n) X^n comme monôme dominant.
2. Étudier la parité de P_n.
3. Montrer que $P_{n+1} - XP_n$ est orthogonal à tout polynôme de degré strictement inférieur à $n-1$.
4. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P_{n+1} - XP_n = -\dfrac{\|P_n\|^2}{\|P_{n-1}\|^2} P_{n-1}$.

11 — *Polynômes orthogonaux ff*

On munit $E := \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\forall (P,Q) \in E^2,\ \langle P, Q\rangle := \displaystyle\int_0^1 PQ$.

1. Établir qu'il existe $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ famille orthonormale de vecteurs telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \deg P_n = n$.
2. Montrer que P_n possède n racines simples, toutes dans $]0,1[$.

12 — *Un exercice de chimie fff*

Soit $n \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ et E un espace euclidien de dimension n. Pour deux vecteurs unitaires u et v de E, on pose

$$(u,v) := \arccos\langle u,v\rangle \quad \text{(angle non orienté entre } u \text{ et } v)$$

1. Justifier la définition de (u,v).
2. Montrer l'existence d'une famille de vecteurs unitaires $(u_1,\ldots,u_{n+1})$ de E telle que

$$\exists \theta \in]0,\pi[,\ \forall (i,j) \in [\![1,n+1]\!]^2,\ i \neq j \implies (u_i,u_j) = \theta$$

3. Démontrer que la matrice $\big(\langle u_i,u_j\rangle\big)_{1\leqslant i,j\leqslant n+1}$ n'est pas inversible.
4. En déduire l'expression de θ en fonction de n.
5. Que vaut $\displaystyle\sum_{i=0}^{n+1} u_i$?
6. Quel est l'angle de liaison d'une molécule de méthane ?

13 — *Familles obtus-angles fff*

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel, E un espace euclidien et $f = (f_k)_{1\leqslant k\leqslant n}$ une famille de vecteurs de E telle que

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2,\ i \neq j \implies \langle f_i, f_j\rangle < 0$$

Prouver que $\operatorname{rg} f \geqslant n-1$.

III. Orthogonalité, projections et symétries orthogonales

14 — *Une caractérisation du supplémentaire orthogonal f*

Soit E un espace préhilbertien réel. Soit F et G deux sev de E tels que $F \oplus G = E$ et $F \subset G^{\perp}$. Montrer que $F = G^{\perp}$.

15 — *Orthogonal d'une somme f*

Soit E un espace préhilbertien réel, A et B deux sev de E.

1. Établir que $(A+B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.

2. On suppose E euclidien. Montrer que $(A \cap B)^{\perp} = A^{\perp} + B^{\perp}$.

16 — *Composée de deux symétries orthogonales sous une hypothèse d'inclusion ff*

Soit E un espace euclidien, F et G deux sev de E tels que $F \subset G$. On note s_F et s_G les symétries orthogonales par rapport à F et G.

1. Déterminer l'orthogonal de F dans G en fonction de $F^{\perp}$, orthogonal de F dans E.

2. Etablir que s_F et s_G commutent et que $s_F \circ s_G = s_H$ où H est un sev de E à expliciter.

17 — *Caractérisation d'une projection orthogonale ff*

Soit E un espace euclidien et p une projection de E. Établir l'équivalence des trois propriétés suivantes :

1. p est orthogonale ; **2.** $\forall x, y \in E,\ \langle p(x), y \rangle = \langle x, p(y) \rangle$; **3.** $\forall x \in E,\ \|p(x)\| \leqslant \|x\|$.

18 — *Autour du théorème de représentation de Riesz ff*

On munit $\mathbb{R}$ du produit scalaire défini par $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{[0,1]} PQ$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique $A_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}_n[X],\ P(0) = \langle A_n, P \rangle$.

2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le degré de A_n vaut n.

3. Existe-t-il $A \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall P \in \mathbb{R}[X],\ P(0) = \langle A, P \rangle$?

19 — *Endomorphismes orthogonaux et réflexions fff*

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 2$ et a un vecteur unitaire de E. On désigne par s_a l'application définie sur E par

$$\forall x \in E,\quad s_a(x) = x - 2\langle x, a \rangle a$$

On appelle réflexion de E tout endomorphisme de E de la forme s_a avec $a \in E$ unitaire.

1. Soit $a \in E$ unitaire. Montrer que s_a est un automorphisme de E. Quelle est sa nature *géométrique* ? L'application s_a est appelée réflexion d'hyperplan $(\operatorname{Vect} a)^{\perp}$.
2. On dit qu'un endomorphisme g de E est orthogonal si $\forall (x,y) \in E^2,\ \left\langle g(x), g(y) \right\rangle = \langle x, y\rangle$.
   - **a.** Démontrer qu'un endomorphisme g de E est orthogonal *si et seulement si* $\forall x \in E,\ \left\| g(x) \right\| = \|x\|$.
   - **b.** Montrer que l'ensemble O(E) des endomorphismes orthogonaux de E est un sous-groupe de GL(E).
   - **c.** Montrer que, si g est orthogonal, alors $g \circ s_a \circ g^{-1} = s_{g(a)}$.
   - **d.** Montrer que s_a est un endomorphisme orthogonal.
3. **a.** Soit u et v deux vecteurs unitaires distincts de E. Démontrer que $\exists a \in E$ unitaire tel que $s_a(u) = v$.
   - **b.** Soit $g \in O(E)$ et $u \in E$ unitaire tel que $g(u) = u$. Justifier que $(\operatorname{Vect} u)^{\perp}$ est stable par g.
   - **c.** En déduire que les réflexions engendrent O(E), i.e. tout endomorphisme orthogonal de E est un produit de réflexions.
4. Soit a et b deux vecteurs unitaires, non colinéaires de E. Montrer que $s_a \circ s_b = s_b \circ s_a \iff a \perp b$.

20 — *Déterminants de Gram fff*

Soit E un espace euclidien. À une famille $(x_1, \dots, x_p)$ de p vecteurs de E, on associe la matrice

$$G(x_1, \dots, x_p) = \left(\langle x_i \mid x_j \rangle \right)_{1 \leqslant i,j \leqslant p} \quad \text{(matrice de Gram des } x_i\text{)}$$

On note $g(x_1, \dots, x_p) = \det G(x_1, \dots, x_p)$.

1. Montrer que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est liée *si et seulement si* $g(x_1, \dots, x_p) = 0$.
2. Soit $x \in E$. On note π la projection orthogonale sur $F := \operatorname{Vect}(x_1, \dots, x_p)$.
   - **a.** Montrer que $g(x, x_1, \dots, x_p) = g(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$.
   - **b.** En déduire que $d(x, F)^2 = \dfrac{g(x, x_1, \dots, x_p), \dots, x_p)}{g(x_1, \dots, x_p)}$.
3. On suppose maintenant que la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
   - **a.** Soit $\mathscr{B} := (e_1, \dots, e_p)$ une bon de F et A la matrice dont les colonnes sont les coordonnées dans la $\mathscr{B}$ de $x_1, \dots, x_p$. Démontrer que $G(x_1, \dots, x_p) = A^T A$.
   - **b.** En déduire une interprétation géométrique de la formule du 2.b.

IV. Endomorphismes remarquables

21 — *Matrice d'un endomorphisme dans une bon*

Soit E un espace euclidien, $f \in \mathscr{L}(E)$ et $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée de E.

1. Exprimer les coefficients de $M := \operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$ au moyen du produit scalaire, de f et des vecteurs e_i.

2. On suppose dans cette question que f est un projecteur orthogonal. Établir que $\mathrm{M} \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.

3. Soit $(x, y) \in \mathrm{E}^2$, $\mathrm{X} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(x)$ et $\mathrm{Y} = \mathrm{mat}_{\mathscr{B}}(y)$. Exprimer $\langle x \,|\, f(y)\rangle$ au moyen de X, M et Y en utilisant le produit matriciel.

22 — *Centrale PC-2014*

Soit E un espace euclidien et a un vecteur unitaire. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, on pose $f_\alpha : x \in \mathrm{E} \mapsto x + \alpha\langle a, x\rangle a$. Pour quels $\alpha \in \mathbb{R}$, l'endomorphisme f_α est-il bijectif ?

23 — *Étude d'un endomorphisme f*

Dans un espace euclidien E de dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, on fixe une famille libre (a, b) et on considère l'endomorphisme f de E défini par $x \mapsto \langle a|x\rangle b + \langle b|x\rangle a$.

1. Déterminer le noyau et le rang de f.

2. Montrer que $\mathrm{Im}\, f$ est un sous-espace vectoriel de E stable par f et en donner une base.

3. Déterminer la matrice de l'endomorphisme g induit par f sur $\mathrm{Im}\, f$ dans cette base.

24 — *Une caractérisation de bases f*

Soit E euclidien de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n) \in \mathrm{E}^n$. On pose, pour $x \in \mathrm{E}$, $\phi(x) := \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de E.

2. Établir que ϕ est bijective *si et seulement si* $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E.

25 — *Étude d'un endomorphisme ff*

Soit E un espace euclidien, u et v deux vecteurs unitaires de E. On note $\phi : \mathrm{E} \to \mathrm{E},\ x \mapsto x - \langle u, x\rangle v$.

1. Déterminer une CNS sur (u, v) pour que ϕ soit bijective.

2. Expliciter ϕ^{-1} au moyen du produit scalaire quand ϕ est bijective.

26 — *Endomorphismes conservant l'orthogonalité ff*

Soit E un espace euclidien et $f \in \mathscr{L}(\mathrm{E})$. On suppose que

$$\forall (x, y) \in \mathrm{E}^2,\ \langle x, y\rangle = 0 \implies \big\langle f(x), f(y)\big\rangle = 0$$

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in \mathrm{E}$, $\big\| f(x)\big\| = k\|x\|$.

V. Calculs de distance

27 — *Quelques calculs euclidiens*

On fixe n dans $\mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on pose $\forall (A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \langle A|B\rangle := \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$.

1. Justifier que $\phi : (A, B) \mapsto \langle A|B\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer une base orthonormée de $\mathscr{M}_n(/R)$.
3. Établir que $\mathscr{A}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^\perp$.
4. Déterminer les projections orthogonales de $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
5. Démontrer que, pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$,

$$d\big(M, \mathscr{S}_n(\mathbb{R})\big) = \sqrt{\frac{1}{2}\operatorname{tr}\left(M^\top M - M^2\right)}$$

6. Soit $M \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$. Établir que $\left(\operatorname{tr} M\right)^2 \leqslant n \operatorname{tr}\left(M^2\right)$ et caractériser les cas d'égalité.
7. On note U l'élément de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients valent 1.

   Calculer le projeté orthogonal de M sur $\operatorname{Vect}(I_n, U)$ pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

   On donnera le résultat sous la forme d'une combinaison linéaire de I_n et U en fonction de n, la somme σ de tous les coefficients de M et $t := \operatorname{tr} M$.

28 — *Centrale PC-2015 f*

Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts. Pour P et Q dans $\mathbb{R}_n[X]$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$.

1. Montrer que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire.
2. Soit $H = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \,;\, \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0 \right\}$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$. Déterminer $d(Q, H)$.

29 — *Vecteur de norme minimale dans un hyperplan affine f*

Soit $a \in \mathbb{R}$ et $\mathscr{H}_a := \left\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \,;\, x_1 + \cdots + x_n = a\right\}$. Existence et calcul de $\min_{x \in \mathscr{H}_a} \|x\|$.

30 — *Retour à l'nterpolation aux entiers de 0 à n ff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(P, Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on pose $\langle P, Q\rangle = \sum_{i=0}^{n} P(i)Q(i)$.

1. Montrer que $\langle\,,\rangle$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Montrer l'existence de $(L_0,\ldots,L_n) \in \mathbb{R}_n[X]^{n+1}$ telle que $\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2,\ L_i(j) = \delta_{i,j}$. En déduire que cette famille est une bon de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. Pour tout $i \in [\![0,n]\!]$, déterminer $\mu_i \in \mathbb{R}$ tel que $L_i - \mu_i X^n \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.
4. En déduire une bon de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$ puis montrer que $d\left(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right) = \dfrac{n!}{\sqrt{\binom{2n}{n}}}$.

31 — *Mines PSI-2014* *ff*

Soit F et G deux sev d'un espace euclidien E.

Montrer que F et G sont supplémentaires orthogonaux *si et seulement si* $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = d^2(x,F) + d^2(x,G)$.

32 — *Centrale PC-2013* *ff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $I = \inf_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n} \int_0^1 \left(1 - \sum_{i=1}^n x_i t^i\right)^2 dt$.

1. Montrer qu'il existe un unique $(a_1,\ldots,a_n) \in \mathbb{R}^n$ réalisant la borne inférieure.
2. On pose $g : x \mapsto \dfrac{1}{x+1} - \sum_{i=1}^n \dfrac{a_i}{x+i+1}$. Calculer $g(k)$ pour $k \in [\![1,n]\!]$. Que vaut $g(0)$?
3. Déterminer I.

33 — *Mines PSI-2014* *ff*

Soit $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$. Pour $(f,g) \in E^2$, on pose $\langle f,g\rangle = \int_{[0,1]} (fg + f'g')$.

1. Montrer que l'on définit ainsi un produit scalaire sur E.
2. Soit $V := \{f \in E;\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $W = \{f \in E;\ f = f''\}$.
   a. Montrer que V et W sont deux sous-espaces supplémentaires et orthogonaux.
   b. Soit $f \in E$. Déterminer le projeté orthogonal de f sur W.
3. Soit $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ et $V_{\alpha,\beta} := \{f \in E;\ f(0) = \alpha,\ f(1) = \beta\}$. Existence et calcul de $\inf_{u\in V_{\alpha,\beta}} \int_0^1 \left(u^2 + u'^2\right)$.

VI. Indications

1

Écrire $f(b)^2 - f(a)^2$ sous forme intégrale.

2

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

3

Former la différence des deux expressions puis développer et simplifier.

4

Comment choisir μ_0 tel que $\phi(\mu_0 + h) \geqslant \phi(\mu_0)$ pour tout $h \in \mathrm{E}$?

5

Utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour minorer $\psi_\lambda(x)$ lorsque $-1 < \lambda < 0$.

6

Remarquer que $2\mathrm{T} = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \|v_i - v_j\|^2$. Appliquer une inégalité de Cauchy-Schwarz (mais pas celle de E) pour la majoration de S.

7

Il s'agit d'un produit scalaire *si et seulement si* $\{\, a_n\,;\, n \in \mathbb{N} \,\}$ est dense dans $[0,1]$.

8

Au 2., intégrer par parties plusieurs fois. Il faut reprendre les calculs du 2. au 3.

9

Utiliser une formule de polarisation au 1., par exemple $\langle x | y\rangle = \dfrac{\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2}{2}$.

10

Noter $(\mathrm{P}_0, \dots, \mathrm{P}_n)$ la famille obtenue par orthonormalisation de la base canonique $(1, \mathrm{X}, \dots, \mathrm{X}^n)$ de $\mathrm{E} = \mathbb{R}_n[\mathrm{X}]$. Raisonner par récurrence. Au c), remarquer que la famille $((-1)^n \mathrm{P}_n(-\mathrm{X}))_{n\in\mathbb{N}}$ est orthogonale et exploiter l'unicité prouvée au b). Au d), remarquer que $\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{X}\mathrm{P}_n$ est de degré $\leqslant n-1$. Au e), déduire de ce qui précède que $\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{X}\mathrm{P}_n \in \mathrm{Vect}(\mathrm{P}_{n-1})$. On trouve

$$\mathrm{P}_{n+1} - \mathrm{X}\mathrm{P}_n = -\frac{\|\mathrm{P}_n\|^2}{\|\mathrm{P}_{n-1}\|^2}\mathrm{P}_{n-1}$$

11

Raisonner par l'absurde au 2.

12

La question 2. est la plus difficile : le passage du cas $n = 2$ à $n = 3$ peut se généraliser en une démonstration par récurrence. Au 3., on peut reconnaître une matrice de Gram ou remarquer que $(u_1, \dots, u_{n+1})$ est liée. En déduire une équation vérifiée par λ.

13

Considérer des vecteurs $f_1, \dots, f_n, f_n$ solutions. Que dire de leurs projections sur l'orthogonal de f_n ?

14

Décomposer $x \in \mathrm{G}^\perp$ dans $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G}$ puis montrer que la composante dans G est nulle.

15

La formule du 2. peut être établie à partir du 1.

16

Au 2., remarquer que $\mathrm{E} = (\mathrm{F}^\perp \cap \mathrm{G}) \oplus \mathrm{F} \oplus \mathrm{G}^\perp$ et décomposer un vecteur x de E dans cette somme.

17

Faire une chaîne de trois implications. Pour 2. $\implies$ 1., raisonner par contraposition . Commencer par faire une figure : si p n'est pas orthogonale, il existe $u \in \operatorname{Ker} p$ et $v \in \operatorname{Im} p$ tels que $\langle u, v \rangle \neq 0$. Rechercher x tel que $\|p(x)\| > \|x\|$ dans le plan $\operatorname{Vect}(u, v)$.

18

La réponse est négative au 2.

19

L'application s_a est la symétrie orthogonale par rapport à l'hyperplan $(\operatorname{Vect} a)^\perp$.

20

À la dernière question, vérifier que $\mathrm{G}(x - \pi(x), x_1, \dots, x_p)$ est diagonale par blocs.

21

Les coordonnées de x dans une bon $(e_1, \dots, e_n)$ sont $\langle x, e_1 \rangle, \dots, \langle x, e_n \rangle$.

22

Considérer la matrice de f_α dans une base où sa matrice est simple ou bien étudier son noyau.

23 ↺

Le noyau de f est $(a, b)^{\perp}$ et on peut facilement en déduire son rang.

24 ↺

Commencer par remarquer que ϕ est bijective *si et seulement si* ϕ est injective.

25 ↺

On a que ϕ est bijective *si et seulement si* $u \neq v$. Utiliser le cas d'égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

26 ↺

Commencer par calculer $\|f(x)\|$ en décomposant x dans une bon $(e_1, \dots, e_n)$.

27 ↺

Les premières questions ont été traitées dans le cours ALG 14.

28 ↺

Remarquer que $\mathrm{H} = \mathrm{Vect}(1)^{\perp}$.

29 ↺

Il s'agit de la norme euclidienne canonique. L'ensemble $\mathscr{H}_a$ est un hyperplan affine. On se ramène à calculer une distance euclidienne.

30 ↺

Il faut choisir μ_i égal au coefficient dominant de $\mathrm{L}_i = \prod_{j \in [\![0,n]\!] \setminus \{i\}} \frac{\mathrm{X}-j}{i-j}$.

31 ↺

Pour l'implication non triviale, on peut commencer par démontrer que $\mathrm{F}^{\perp} \subset \mathrm{G}$.

32 ↺

Reconnaître un problème de moindres carrés dans un espace préhilbertien réel. On trouve $g(k) = 0$ pour $k \in [\![1, n]\!]$ en remarquant que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \ \ 1 - \sum_{i=1}^{n} a_i \mathrm{X}^i \perp \mathrm{X}^k$$

En déduire deux polynômes dont g est le quotient. On trouve que $\mathrm{I} = \dfrac{1}{(n+1)^2}$.

33 ↺

Remarquer que W est de dimension finie.