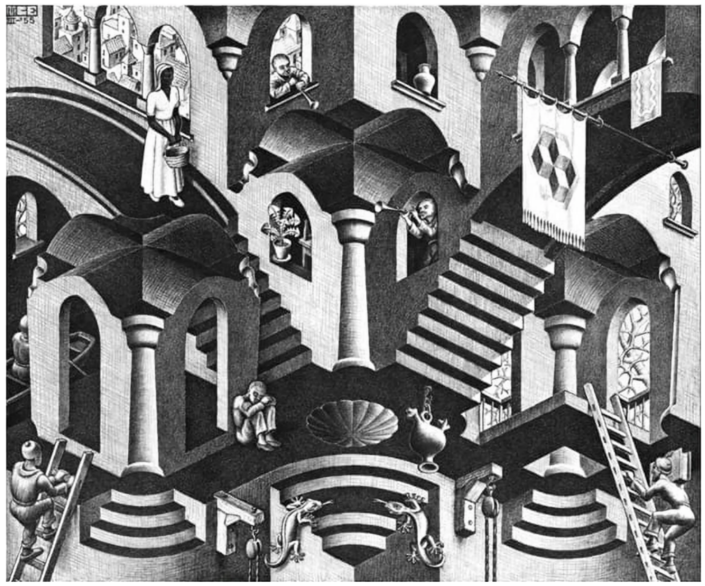
AN 7 | Fonctions convexes

La musique est, au fond, de la mathématique rendue audible.

Thomas Bernhard



Convex and concave, Escher

I. Études

1 — *Fonctions convexes majorées f*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et majorée. Démontrer que f est décroissante.

2 — *Bijections convexes f*

Soit $f : \mathrm{I} \to f\langle \mathrm{I} \rangle$ strictement croissante, continue et convexe. Montrer que $f^{-1} : f\langle \mathrm{I} \rangle \to \mathrm{I}$ est concave.

3 — *Une curiosité f*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ convexe. On pose $g : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) + f(1-x)$

1. On suppose dans cette question que f est dérivable. Démontrer que g est décroissante.
2. Démontrer que g est décroissante dans le cas général.

4 — *Fonctions convexes majorées f*

1. Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. Démontrer que f est constante.
2. Soit $f : \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{R}$ une fonction convexe majorée. A-t-on la même conclusion qu'au 1. ?

5 — *Convexité et minima ff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que f est dérivable et qu'il existe un réel a tel que $f'(a) = 0$. Montrer que f admet en a un minimum global.
2. On suppose maintenant que f est deux fois dérivable et qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $f'' \geqslant \alpha > 0$.
   - **a.** Montrer que f possède un minimum unique.
   - **b.** A-t-on encore ce résultat avec l'hypothèse $f'' > 0$?

6 — *Étude asymptotique d'une fonction convexe fff*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. Montrer que $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ admet une limite $\ell \in \overline{\mathbb{R}}$ en $+\infty$.
2. On suppose que $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction ϕ définie par $\phi(x) := f(x) - \ell x$ est convexe et décroissante. En déduire qu'elle admet une limite en $+\infty$.

II. Inégalités

7 — *Inégalités de convexité élémentaires* f

Démontrer en utilisant la convexité les inégalités suivantes :

1. Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $x^{n+1} - (n+1)x + n \geqslant 0$;
2. $\forall x > 0$, $\dfrac{x}{1+x^2} \leqslant \arctan x \leqslant x$;
3. $\forall (a,b) \in]1, +\infty[^2$, $\ln\left(\dfrac{a+b}{2}\right) \geqslant \sqrt{\ln(a)\ln(b)}$;
4. Pour $0 < b \leqslant a$, $\dfrac{a-b}{a} \leqslant \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) \leqslant \dfrac{a-b}{b}\cdot$;
5. Pour $(a,b,x,y) \in]0,+\infty[^4$, $(x+y)\ln\left(\dfrac{x+y}{a+b}\right) \leqslant x\ln\left(\dfrac{x}{a}\right) + y\ln\left(\dfrac{y}{b}\right)$.

8 — *Géométrie du triangle* f

Soit a, b et c les angles non orientés d'un triangle. Établir que

$$\frac{1}{1+\sin a} + \frac{1}{1+\sin b} + \frac{1}{1+\sin c} \geqslant \frac{6}{2+\sqrt{3}}$$

9 — *Une inégalité* ff

1. Étudier la convexité de $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^x}$ sur $\mathbb{R}_+$.
2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tous réels $x_1, \ldots, x_n$ supérieurs à 1, on a

$$1 + \sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} x_i} \geqslant \frac{n}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1+x_i}}$$

10 — *L'inégalité de Brunn-Minkowski* ff

1. Étudier la convexité de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \ln\left(1+e^x\right)$.
2. Établir que $\forall n \geqslant 1$ et $\forall x_1, \ldots, x_n > 0$, $1 + \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} x_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (1+x_k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

3. En déduire que $\forall n \geqslant 1$ et tous $a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_n > 0$, $\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\prod_{k=1}^{n} b_k\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\prod_{k=1}^{n} (a_k+b_k)\right)^{\frac{1}{n}}$.

11 — *Inégalités de Young, Hölder et Minkowski ff*

Soit p et q deux nombres réels strictement positifs tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

1. Prouver l'inégalité de Young : $\forall (u,v)\in\mathbb{R}_+^2,\ uv \leqslant \frac{u^p}{p}+\frac{u^q}{q}\cdot$

2. Soit $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ des réels positifs. Démontrer l'inégalité de Hölder :

$$\sum_{k=1}^{n} x_k y_k \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

3. Soit $p>1$, $x_1,\ldots,x_n$ et $y_1,\ldots,y_n$ des réels positifs. Établir l'inégalité de Minkowski :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} (x_k+y_k)^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} x_k^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

III. Problèmes

12 — *Transformée de Legendre-Fenchel*

On définit l'intervalle $\mathrm{I} = \mathbb{R}_+$ et on note $\mathscr{C}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

- $f(0) = 0$;
- $\forall x \in \mathrm{I}, f(x) \geqslant 0$;
- f est deux fois dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I}, f''(x) \geqslant 0$.

Pour $f \in \mathscr{C}$, on note τ_f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $\tau_f(x) := \dfrac{f(x)}{x}\cdot$

On rappelle qu'une droite d'équation $\Delta : y = ax + b$ (où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$) est dite asymptote à $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ en $+\infty$ si

$$f(x) - (ax + b) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Les parties I et II sont indépendantes. Les parties III et IV utilisent des résultats des parties précédentes.

Partie I – Préliminaires

1. Dans cette question, on note $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x - \tanh x$.

a. Vérifier que $f \in \mathscr{C}$.

b. Étudier le comportement en $+\infty$ de f' et τ_f.

c. Démontrer l'existence d'une droite asymptote à la courbe représentative de f. On précisera la position de la courbe par rapport à son asymptote.

2. Dans cette question, on note $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x \arctan x - \dfrac{1}{2}\ln\left(1 + x^2\right)$.

a. Vérifier que $f \in \mathscr{C}$.

b. Étudier le comportement en 0 et $+\infty$ de f' et de τ_f.

c. Étudier l'existence d'une droite asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$.

INDICATION : Supposons la droite d'équation $\Delta : y = ax + b$ asymptote à f en $+\infty$.
Que dire de $\lim\limits_{x\to+\infty} \tau_f(x)$?

3. Donner un exemple de fonction $f \in \mathscr{C}$ telle que $\tau_f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.

4. Soit $\phi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\phi(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\infty$. Établir que ϕ est majorée sur I.

Partie II – Étude asymptotique des éléments de $\mathscr{C}$

Soit $f \in \mathscr{C}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \leqslant x f'(x)$.
2. Justifier que τ_f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Soit $x > 0$. Montrer que $\dfrac{x}{2} f'\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant f(x) - f\left(\dfrac{x}{2}\right) \leqslant f(x)$. INDICATION : La fonction f est convexe.
4. On suppose dans cette question que $\tau_f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Montrer que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
5. On suppose dans cette question que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Établir que $\tau_f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$.
6. On suppose dans cette question que f n'est pas constante et que τ_f ne tend pas vers $+\infty$ en $+\infty$.
   - **a.** Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $f(x) \underset{+\infty}{\sim} ax$.
   - **b.** Montrer qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} \ell$.
   - **c.** Montrer que $\ell = a$.
   - **d.** Montrer qu'il existe $b \in \overline{\mathbb{R}}$ tel que $f(x) - ax \xrightarrow[x\to+\infty]{} b$.
   - **e.** Dans le cas où $b \in \mathbb{R}$, montrer que la courbe représentative de f possède une droite asymptote au voisinage de $+\infty$ et préciser la position de la courbe par rapport à son asymptote.

Partie III – Étude de l'ensemble $\mathrm{M}(f)$ et premières propriétés de la conjuguée

Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. On définit, pour tout réel positif m, la fonction $h_m : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto mx - f(x)$ et on note

$$\mathrm{M}(f) := \left\{ m \in \mathbb{R}_+ \,;\, h_m \text{ est majorée sur } \mathrm{I} \right\}$$

Pour $m \in \mathrm{M}(f)$, on note

$$f^\star(m) := \sup_{x\in\mathrm{I}} h_m(x) := \sup_{x\in\mathrm{I}} \big(mx - f(x)\big)$$

La fonction $f^\star$, définie sur $\mathrm{M}(f)$, est appelée conjuguée de f. On notera $f^{\star\star}$ la conjuguée de $f^\star$, sous réserve d'existence.

1. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$. Démontrer que $\mathrm{M}(f)$ est un intervalle de $\mathbb{R}_+$. INDICATION : Vérifier que $\mathrm{M}(f)$ est convexe.
2. Soit $f_1 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \dfrac{x^2}{2}\cdot$ Démontrer que $\mathrm{M}(f_1) = \mathbb{R}_+$ et que $f_1^\star = f_1$.
3. Soit c un réel et α un réel strictement supérieur à 1. Pour les fonctions f qui suivent, préciser $\mathrm{M}(f)$ et déterminer, pour les réels x de $\mathrm{M}(f)$, $f^\star(x)$ en fonction de x.
   - **a.** $f_2 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto c$.
   - **b.** $f_3 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^\alpha$.
4. Déterminer une fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{M}(f) = \varnothing$.
5. Soit $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ telle que $\mathrm{M}(f)$ soit non vide. Montrer que $\forall x \in \mathrm{I}$, $\forall m \in \mathrm{M}(f)$, $f(x) + f^\star(m) \geqslant mx$.
6. Soit f, g deux fonctions de I dans $\mathbb{R}$ telles que $f \leqslant g$. Montrer que $\mathrm{M}(f) \subset \mathrm{M}(g)$, puis que

$$\forall m \in \mathrm{M}(f),\ g^\star(m) \leqslant f^\star(m)$$

7. On se propose de chercher les fonctions vérifiant $\mathrm{M}(f) = \mathrm{I}$ et $f = f^\star$. Pour cela, on considère la fonction $f_1 : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{x^2}{2}$ et l'on désigne par f une fonction de I dans $\mathbb{R}$ telle que $\mathrm{I} = \mathrm{M}(f)$ et $f^\star = f$.

  a. Montrer que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) \geqslant f_1(x)$.

  b. En déduire que, pour tout $x \in \mathrm{I}$, $f(x) = f_1(x)$.

8. Dans cette question, on considère la fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}, x \mapsto e^x - 1$.

  a. Déterminer l'ensemble $\mathrm{M}(f)$ et déterminer $f^\star$.

  b. Déterminer $\mathrm{M}\left(f^\star\right)$ puis $f^{\star\star}$.

9. Montrer que, pour toute fonction $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$, $f^\star$ est convexe sur $\mathrm{M}(f)$. INDICATION : Revenir à la définition de la convexité.

Partie IV – Quelques propriétés de la conjuguée d'une fonction de $\mathscr{C}$

1. On suppose dans cette question que f est une fonction non nulle de $\mathscr{C}$. Justifier que $\mathrm{M}(f)$ est un intervalle non réduit à $\{0\}$.

INDICATION : Remarquer que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$, on a $\tau_f(x_0) \in \mathrm{M}(f)$.

2. On considère, dans cette question, une fonction f de $\mathscr{C}$ vérifiant $\mathrm{I} = \mathrm{M}(f)$.

  a. Montrer que $\mathrm{M}\left(f^\star\right) = \mathrm{I}$ et $\forall x \in \mathrm{I},\ f^{\star\star}(x) \leqslant f(x)$.

  b. Établir que $f^{\star\star} = f$.

  INDICATION : Montrer l'inégalité inverse du IV.2.a. en remarquant que $\forall y \in \mathrm{I}, f(y) \geqslant f(x) + \left(y - x\right) f'(x)$.

3. Dans cette question, on suppose que $f \in \mathscr{C}$, $f'(0) = 0$ et il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ vérifiant $\forall x \in \mathrm{I}, f''(x) \geqslant c$.

  a. Montrer que $\forall x \in \mathrm{I}, f'(x) \geqslant cx$ et en déduire que f' réalise une bijection de I dans I.

  b. Montrer que $\mathrm{M}(f) = \mathrm{I}$ et que $\forall x \in \mathrm{I}, f^\star\left(f'(x)\right) = x f'(x) - f(x)$.

  c. Montrer que $f^\star$ est dérivable et donner le lien entre $\left(f^\star\right)'$ et f'.

4. Déterminer l'ensemble $\mathrm{M}(f)$ lorsque f appartient à $\mathscr{C}$.

INDICATION : Décrire l'intervalle $\mathrm{M}(f)$ au moyen du paramètre a défini dans la partie II. On effectuera une disjonction de cas en s'aidant du II et du I.4.

IV. Indications

1

Raisonner par contraposition.

2

Essentiellement il s'agit d'appliquer f^{-1} (qui est aussi strictement croissante) à l'inégalité de convexité de f.

3

Au 2., comparer des pentes.

4

Pour le 1., par l'absurde en supposant l'existence d'une corde de pente $p \neq 0$. Distinguer les cas $p > 0$ et $p < 0$, un dessin s'imposant dans les deux cas ... Pour le 2., considérer le contre-exemple $x \longmapsto e^{-x}$.

5

On appliquera l'IAF au 3.

6

Utiliser la caractérisation des fonctions convexes par la monotonie des pentes des cordes.

7

Revenir à la définition, ou comparer à des cordes ou des tangentes.

8

Se souvenir que $a + b + c = \pi$.

9

Passer au logarithme au 2. afin de faire apparaître l'inégalité de Jensen.

10

Pour le 2., remarquer que $x_k = e^{\ln x_k}$.

11

Passer au logarithme. Les questions sont enchaînées. Pour le 3., appliquer deux fois l'inégalité de Hölder en remarquant que $(x_k + y_k)^p = x_k(x_k + y_k)^{p-1} + y_k(x_k + y_k)^{p-1}$.

12

Au II.3., on utilisera les propriétés des tangentes au graphe d'une fonction convexe.