AN 6 | Fonctions dérivables

En mathématiques, nous sommes d'avantage des serviteurs que des maîtres.

Hermite

Le Paradis (détail), Le Tintoret

I. Généralités, exemples et contre-exemples

1 — *L'entonnoir à sinus*

Soit f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par $f : x \mapsto x\sin(1/x)$, $\;g : x \mapsto x^2\sin(1/x)$.

1. Prolonger par continuité en 0 les fonctions f et g.
2. Etudier la dérivabilité sur $\mathbb{R}$ de ces prolongements que nous noterons abusivement f et g.

2 — *Une bijection et sa réciproque*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie par $f(x) = e^x + x$.

1. Montrer que f est bijective.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable et déterminer la valeur de $\left(f^{-1}\right)'(1)$.
3. Montrer que f^{-1} est deux fois dérivable et donner la valeur de $\left(f^{-1}\right)''(1)$.

3 — *Sandwich au voisinage de 0* f

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\forall x \in [0,1],\; \sqrt[3]{x} \geqslant f(x) \geqslant \sqrt{x}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Ce prolongement est-il dérivable en 0 ?

4 — *Étude d'un raccord* f

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable. On définit une fonction $\phi : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$\phi(x) = \begin{cases} f(2x) & \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ f(2x-1) & \text{sinon} \end{cases}$$

Donner une condition suffisante et nécessaire pour que ϕ soit dérivable sur $[0,1]$.

5 — *Avec partie entière* f

Étudier la dérivabilité de $\phi : x \mapsto (x - \lfloor x \rfloor)(x - \lfloor x \rfloor - 1)$.

6 — *Le Guldermanien* f

On note $\mathrm{G}_d : x \mapsto \arctan\left(\sinh(x)\right)$.

1. Calculer $\mathrm{G}_d(0)$. Montrer que G_d est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dérivée. Vérifier que $\mathrm{G}_d' = \cos \circ \mathrm{G}_d$.

2. Justifier que G_d réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur l'intervalle $G_d\langle\mathbb{R}\rangle$ que l'on déterminera.
3. Établir que G_d^{-1} est dérivable et que sa dérivée vaut $\dfrac{1}{\cos}$.
4. On pose $F := 2G_g$. Vérifier que f est solution de l'équation du pendule simple $F'' + \sin\circ F = 0$.

7 — *Dérivée d'une itérée en un point fixe f*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable, $\alpha \in \mathbb{R}$ un point fixe de f et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $f^n := f\circ\cdots\circ f$ (itérée n-ème de f) est dérivable et exprimer sa dérivée en α en fonction de n et de $f'(\alpha)$.

8 — *Dérivée symétrique ff (pour le 3.)*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On note $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $g(x) := \dfrac{f(x) - f(-x)}{2x}$.

1. On suppose que f est dérivable en 0. Montrer que g admet une limite en 0.
2. Démontrer que la réciproque est fausse.
3. On suppose que f est croissante au voisinage de 0 et $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$. Établir que f est dérivable en 0.

9 — *Dérivabilité de la valeur absolue d'une fonction ff*

1. Soit f, une application dérivable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   - **a.** On suppose que $f(x_0) \neq 0$. Démontrer que la fonction $|f|$ est dérivable en x_0.
   - **b.** On suppose que $f(x_0) = 0$. Démontrer que $|f|$ est dérivable en x_0 si et seulement si $f'(x_0) = 0$.
2. Construire une fonction continue sur $[0,1]$, telle qu'il existe une infinité de réels dans $[0,1]$ en lesquels elle ne soit pas dérivable.

10 — *Local et global ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable, bornée et telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\exists C > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}_+,\ \left|f(x)\right| \leqslant Cx$.

11 — *Une fonction implicite ff*

Soit $t \in \mathbb{R}_+$.

1. Montrer que l'équation $xe^x = t$ possède une unique solution x_t dans $\mathbb{R}_+$.
2. Justifier que la fonction $f : t \longmapsto x_t$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.
3. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}_+$? Déterminer la classe de f sur $\mathbb{R}_+$.

12 — *Limite en $+\infty$ et dérivée ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ dérivable.

1. On suppose que $f'(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Est-il vrai que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$?
2. Trouver une fonction f telle que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et telle que $f'(x)$ n'admette pas de limite en $+\infty$.

13 — *Dérivée et monotonie ff*

1. Soit f, une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(0) > 0$. Démontrer que f est strictement croissante au voisinage de 0.
2. Trouver une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, telle que $f'(0) = 1$, qui n'est pas croissante au voisinage de 0.

II. Théorème de Rolle, théorème et inégalité des accroissements finis

14 — *Cascad'Rolle*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b dans $\mathbb{R}$ tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ sur $]a, b[$, n fois dérivable sur $]a, b[$. Soit $a_0 = a < a_1 < \cdots < a_n = b$ des réels tels que

$$f(a_0) = f(a_1) = \cdots = f(a_n)$$

Montrer qu'il existe $c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

15 — *On the Rolle again f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, a et b dans I avec $a < b$ et $f : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ n fois dérivable sur I tels que $f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = f(b) = 0$. Montrer que $\exists c \in]a, b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

16 — *Profite d'Rolle f*

Soit $a < b$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable s'annulant en a et en b, vérifiant $f'(a) > 0$ et $f'(b) > 0$.
Démontrer l'existence de trois réels $c_1 < c_2 < c_3$ tels que $f'(c_1) = f(c_2) = f'(c_3) = 0$.

17 — *Étude d'une suite récurrente*

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite définie par $u_0 \in [0,1]$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = 1 - \alpha u_n^2$

1. Démontrer que l'équation $x = 1 - \alpha x^2$ admet une seule solution dans $[0, 1]$. On la note ℓ.

2. Démontrer l'existence de $\lambda \in [0,1[$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \ell| \leqslant \lambda |u_n - \ell|$.

   INDICATION : appliquer l'inégalité des accroissements finis.

3. En conclure que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

18 — *Une minoration affine ff*

Soit f une fonction $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$ telle que $f(0) = 0$ et $\forall x \in [0,1],\ f'(x) > 0$. Montrer qu'il existe un réel $\mu > 0$ tel que $\forall x \in [0,1],\ f(x) \geqslant \mu x$.

19 — *Généralisation du TAF et règle de l'Hospital ff*

1. Soient a et b des nombres réels tels que $a < b$, f et g des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$ et dérivables sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $g'(c)\big(f(b) - f(a)\big) = f'(c)\big(g(b) - g(a)\big)$.
2. Soient I un vrai intervalle de $\mathbb{R}$, $x_0 \in \mathrm{I}$, $f, g : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continues sur I, dérivables sur $\mathrm{I} \setminus \{x_0\}$ vérifiant de plus $\forall x \in \mathrm{I},\ g'(x) \neq 0$ et $\dfrac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$. Montrer que $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \xrightarrow[x\to x_0]{} \ell$.

20 — *Il faut dessiner ! ff*

Soit une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = f(1) = f'(0) = 0$. Prouver l'existence d'un point du graphe de f *distinct de l'origine* en lequel la tangente au graphe passe par l'origine.

21 — *Deux classiques en un ff*

On considère une fonction $f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$, telle que $f(0) = 0$ et $f(1)f'(1) < 0$.

1. Démontrer qu'il existe un réel $a \in]0,1[$ tel que $f'(a) = 0$.
2. Même question en supposant simplement f dérivable sur $[0,1]$.

22 — *Un point attracteur ff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que $f(0) = 0$ et $\left|f'(0)\right| < 1$.

1. Démontrer que $\exists \alpha > 0,\ \exists k \in [0,1[,\ \forall x \in [-\alpha,\alpha],\ \left|f'(x)\right| \leqslant k$.
2. En déduire que l'intervalle $[-\alpha,\alpha]$ est stable par f.
3. Prouver que, $\forall u_0 \in [-\alpha,\alpha]$, la suite définie par $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ converge vers 0.

23 — *Théorème de Darboux fff*

Soit f une fonction dérivable sur un vrai intervalle I. Soient a et b dans I tels que $f'(a) < f'(b)$.

1. Soient $\gamma \in \left]f'(a), f'(b)\right[$ et $g : x \mapsto f(x) - \gamma x$ définie sur I. Montrer que $g'(a)g'(b) < 0$ puis que g n'est pas injective.
2. En déduire l'existence de $c \in \mathrm{I}$ tel que $\gamma = f'(c)$.
3. Établir que $f'(\mathrm{I})$ est un intervalle.

Nous venons d'établir le théorème de Darboux : toute fonction dérivée possède la propriété des valeurs intermédiaires.

24 — *Au-delà de Taylor-Lagrange fff*

Soit $f \in \mathscr{C}^n(\mathrm{I}, \mathbb{R})$ où I est un vrai intervalle, $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n$ des points distincts de I. On note L le polynôme de degré au plus $n-1$ qui coïncide avec f an x_i, pour tout i entre 1 et n. Établir que :

$$\forall x \in \mathrm{I},\ \exists c \in \mathrm{I},\ f(x) - \mathrm{L}(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \prod_{i=1}^{n} (x - x_i)$$

III. Équations fonctionnelles

25 — *Une caractérisation des paraboles f*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ f(a) - f(b) = (a-b) f'\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

1. Montrer que f est trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. En déduire que f est polynomiale de degré au plus deux.

26 — *Fonctions dérivables duplicatives ff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dérivable en 0 telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = 2f(x)$. Démontrer que f est linéaire.

27 — *X-PC 2009 fff*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $\forall x \in \mathbb{R},\ \left(f \circ f\right)(x) = \frac{x}{2} + 1$.

IV. Dérivées successives

28 — *Le contre-exemple de Cauchy ff*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\forall t \in \mathbb{R}_+^*,\ \ f(t) = e^{-\frac{1}{t}}$. et nulle sur $\mathbb{R}_-$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \ \exists\, \mathrm{P}_n$ polynôme à coefficients réels tel que $\forall t \in \mathbb{R}_+^*\ \ f^{(n)}(t) = \dfrac{\mathrm{P}_n(t)e^{-1/t}}{t^{2n}}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

29 — *Autour de Leibniz ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_n(x) := x^{n-1} f\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

1. Justifier l'existence de $g_n := f_n^{(n)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Au moyen de la formule de Leibniz, exprimer g_{n+1} en fonction de g_n' et g_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ g_n(x) = \dfrac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

30 — *Dérivées successives de l'arcsinus ff*

Soit $\mathrm{I} =]-1,1[$ et f la fonction définie par
$$f : \begin{array}{rcl} \mathrm{I} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I et que
$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathrm{I}\ \ f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1-x^2)^{n+\frac{1}{2}}} \quad \text{où } \mathrm{P}_n \text{ est un polynôme réel}$$
2. Prouver que $\forall x \in \mathrm{I}$, $(1-x^2)f'(x) - xf(x) = 0$.
3. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{P}_{n+1}(x) = (2n+1)x\mathrm{P}_n(x) + n^2\left(1-x^2\right)\mathrm{P}_{n-1}(x)$.
4. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $x \in \mathrm{I}$, $\mathrm{P}_n'(x) = n^2\mathrm{P}_{n-1}(x)$.

V. Fonctions usuelles

31 — *Une simplification f*

On se propose de simplifier par trois méthodes différentes l'expression $f(x) := \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)$.

1. Établir que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer f'. En déduire que $f = \arctan$.
2. Retrouver que $f = \arctan$ par un changement de variable, i.e. en écrivant $x = \phi(t)$ où ϕ est une fonction bien choisie.
3. Démontrer que $f = \arctan$ en simplifiant $\tan f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

32 — *La formule cachée* f

On souhaite établir que $\forall x \in [0,1],\ \arcsin\left(\sqrt{x}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\arcsin(2x-1)$.

1. *Première méthode* : en utilisant la dérivation.
2. *Seconde méthode* : en utilisant les formules de trigonométrie. On pourra poser $x = \sin^2 u$.

33 — *Belle et inutile formule* f

Simplifier la somme $S = \arctan(2) + \arctan(3) + \arctan\left(2+\sqrt{3}\right)$.

34 — *La formule de Machin* f

Prouver la relation $4\arctan\left(\frac{1}{5}\right) - \arctan\left(\frac{1}{239}\right) = \frac{\pi}{4}\cdot$

35 — *Calcul de* $\cos(\pi/5)$ ff

On pose $y = \arcsin\left(\frac{1+\sqrt{5}}{4}\right)\cdot$ Calculer $\cos 4y$ et en déduire la valeur de y.

36 — *Des équations* ff

Résoudre les équations suivantes :

1. $\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4}$;
2. $\arcsin(2x) + \arcsin(x) = \frac{\pi}{2}$;
3. $\arcsin(2x) = \arcsin x + \arcsin\left(\sqrt{2}x\right)$.

VI. Problèmes

37 — *Résolution d'une équation fonctionnelle* f–ff

On s'intéresse dans ce sujet aux fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant l'équation **E** : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1+f(x)^2}$.

Partie I – Propriétés générales des solutions de E

Dans cette section, on se donne une solution f de **E**.

1. Établir que $f(0) \in \{-1, 0, 1\}$.

2. **a.** Vérifier que $\forall y \in \mathbb{R},\ \left|\dfrac{2y}{y^2+1}\right| \leqslant 1$.

b. En déduire que $f(\mathbb{R}) \subset [-1, 1]$.

3. On suppose dans cette question que f est continue en 0.

a. On suppose que $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = 1$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right) = 1$. En déduire $f(0)$.

b. On suppose que $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ f(x_0) = -1$. Déterminer la valeur de $f(0)$.

c. On suppose que $\exists x_0 \in \mathbb{R},\ -1 < f(x_0) < 1$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left|f\left(\dfrac{x_0}{2^n}\right)\right| \leqslant |f(x_0)|$. En déduire la valeur de $f(0)$.

d. On suppose que $1 \in f(\mathbb{R})$. Déterminer f. Même question sous l'hypothèse $-1 \in f(\mathbb{R})$.

Partie II – Solutions de E dérivables en 0

On rappelle que tanh réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$.

1. Dans cette question, on se donne une solution f de **E** dérivable en 0 telle que $f(0) = 0$. On pose la fonction $\theta := \tanh^{-1} \circ f$.

a. Justifier que θ est bien définie et dérivable en 0.

b. Vérifier que tanh est une solution de l'équation **E**.

c. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \theta(2x) = 2\theta(x)$.

d. Établir que, pour tout entier naturel n et tout réel x, $\theta\left(\dfrac{x}{2^n}\right) = \dfrac{\theta(x)}{2^n}$.

e. Démontrer l'existence de $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ \theta(x) = \lambda x$.

2. En déduire les solutions de **E** dérivables en 0.

38 — *La méthode de Newton* ff

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^3$ sur $[a, b]$ vérifiant les hypothèses suivantes :

$$f(a) < 0\ ,\quad f(b) > 0\ ,\quad f'(a) > 0 \qquad \text{et } \forall x \in [a,b]\ ,\ f''(x) > 0$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé direct du plan.

Le but de ce problème est de donner une méthode de résolution approchée de l'équation $f(x) = 0$. On notera α l'unique solution de cette équation. Les approximations seront données par une suite qui converge vers α.

La première partie du problème étudie la convergence de cette suite. Dans la deuxième, *la vitesse de convergence* de cette suite sera évaluée.

Partie I – Description et convergence de la méthode de Newton

1. Montrer l'existence et l'unicité de α.

2. Soit $u \in [a,b]$. Montrer que la tangente à $\mathscr{C}$ au point de coordonnées $\big(u, f(u)\big)$ et l'axe des abscisses sont des droites sécantes. Calculer leur intersection.

3. Soit g la fonction définie sur $[a,b]$ par $g(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$.

- **a.** Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^2$ puis calculer $g'(x)$ pour $x \in [a,b]$.
- **b.** Étudier les variations de g.
- **c.** En déduire que l'intervalle $]\alpha, b[$ est stable par g.

4. On définit la suite (x_n) par $x_0 \in]\alpha, b[$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ x_{n+1} = g(x_n)$.

- **a.** Montrer que la suite (x_n) est bien définie.
- **b.** Quelle est l'interprétation géométrique de la suite (x_n) ? On illustrera son propos par une figure soignée.
- **c.** Établir que $x_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha$.

Partie II – Vitesse de convergence de la méthode de Newton

On reprend les notations de la partie I et on pose $\mathrm{K} := \dfrac{1}{2} \max\limits_{t\in[a,b]} \left|g''(t)\right|$.

1.
- **a.** Justifier l'existence de K.
- **b.** Calculer $g(\alpha)$ et $g'(\alpha)$ en fonction de $f'(\alpha)$ et $f''(\alpha)$.
- **c.** Soit $x \in [a,b]$. Démontrer l'existence d'un réel c compris entre α et x tel que

$$g(x) - \alpha = \frac{(x-\alpha)^2}{2} g''(c)$$

  On pourra appliquer le théorème de Rolle à une fonction auxiliaire et sa dérivée.

2. Pour tout entier naturel n, on pose $\varepsilon_n := |x_n - \alpha|$.

- **a.** Établir que $\forall n \in \mathbb{N},\ \varepsilon_{n+1} \leqslant \mathrm{K}\varepsilon_n^2$.
- **b.** En déduire l'existence de $n_0 \in \mathbb{N}$, de $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$ et de $\lambda \in [0,1[$ tel que

$$\forall n \geqslant n_0,\ \ \varepsilon_n \leqslant \mathrm{M}\lambda^{2^{n-n_0}}$$

39 Estimation du nombre d'involutions de $[\![1,n]\!]$

L'objectif de ce problème est la détermination d'un équivalent simple de la suite définie par

$$T_0 = 1\,,\ T_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n\,,\ T_{n+2} = T_{n+1} + (n+1)T_n$$

On rappelle quelques définitions et propriétés qui pourront être librement utilisées dans la partie I de ce problème :

- On appelle primitive de $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ toute fonction $F : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ dérivable telle que $F' = f$.
- Une fonction continue f sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ admet des primitives. En notant F l'une d'entre-elles, on a
$$\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$
- Pour $u, v : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, on a
$$\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t \ \text{(formule d'intégration par parties)}$$
- Pour $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continue, on a
$$\forall a > 0,\ \forall b > 0,\ \forall c > 0,\ \int_a^b f(t)\mathrm{d}t + \int_b^c f(t)\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\mathrm{d}t \ \text{(relation de Chasles)}$$

Partie I – La formule de Stirling

1. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^3$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et

$$\delta : \begin{array}{rcl} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & F(t) - F(a) - \dfrac{F'(a)+F'(t)}{2}(t-a) + \lambda\dfrac{(t-a)^3}{12} \end{array}$$

a. Justifier que δ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ puis expliciter les fonctions δ' et δ''.

b. Déterminer $\delta(a)$ et $\delta'(a)$.

c. Dans cette question, on choisit $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\delta(b) = 0$. Démontrer l'existence de c dans $]a,b[$ tel que

$$F(b) = F(a) + \frac{F'(a)+F'(b)}{2}(b-a) - F^{(3)}(c)\frac{(b-a)^3}{12}$$

2. Établir que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \exists \zeta_k \in]k, k+1[,\ \int_k^{k+1} \ln(t)\mathrm{d}t = \frac{\ln(k)+\ln(k+1)}{2} + \frac{1}{12\zeta_k^2}$$

INDICATION : Considérer une primitive F de ln.

3. En déduire que, pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$:

$$\int_1^n \ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2}\ln n + \ln n! + C_n \quad \text{où} \quad C_n := \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\zeta_k^2}$$

4. Établir que $n! = e^{1-C_n}\sqrt{n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ pour tout entier naturel n tel que $n \geqslant 2$.

INDICATION : Calculer l'intégrale de la question I.3.au moyen d'une intégration par parties.

5. Montrer que $(C_n)_{n\geqslant 2}$ converge.

INDICATION : On remarquera que $\forall k \geqslant 2,\ \dfrac{1}{\zeta_k^2} \leqslant \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$.

6. Démontrer que $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ en admettant la formule de Wallis :

$$\frac{2^{4n}n!^4}{(2n+1)(2n)!^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

Partie II – Étude d'une suite de polynômes

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u(x) := e^{\frac{x^2}{2}}$$

Pour tout entier naturel n, on désigne par $u^{(n)}$ la dérivée n-ème de u. On note H_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation $u^{(n)}(x) = H_n(x)u(x)$. On note v_n la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par la relation :

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\ v_n(x) = H_n(x)e^{\frac{x^2}{4}}$$

1. Exprimer $u'(x)$ en fonction de $u(x)$ et $x \in \mathbb{R}$.

2. En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier $n \geqslant 2$:

$$\forall x \in \mathbb{R},\ u^{(n)}(x) = xu^{(n-1)}(x) + (n-1)u^{(n-2)}(x)$$

3. Calculer H_0 et H_1, puis déduire des relations précédentes l'expression de $H_n(x)$ en fonction de $H_{n-1}(x)$, $H_{n-2}(x)$ et $x \in \mathbb{R}$.

4. Prouver que H_n est une fonction polynomiale dont on précisera, en fonction de n, le degré, la parité et le signe sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

5. Comparer T_n et $H_n(1)$.

6. Établir que pour tout nombre entier naturel non nul n et $x \in \mathbb{R}$, $H'_n(x) = nH_{n-1}(x)$.

7. Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $H_n(0)$ et $H'_n(0)$ en fonction de n. On distinguera deux cas suivant la parité de n.

8. Établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ H''_n(x) + xH'_n(x) - nH_n(x) = 0$$

9. Étudier le signe de v_n et de v'_n sur $\mathbb{R}_+$. Calculer $v_n(0)$ et $v'_n(0)$.

10. Exprimer $v''_n(x)$ en fonction de $v_n(x)$ et $x \in \mathbb{R}$.

11. En déduire la relation suivante, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$:

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)v_n(x) \leqslant v_n''(x) \leqslant \left(n+\frac{3}{4}\right)v_n(x)$$

Partie III – Une inégalité différentielle

On établit dans cette question un résultat préliminaire permettant d'encadrer une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ de classe $\mathscr{C}^2$ et satisfaisant aux relations :

$$f(0) = a\,,\ f'(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1]\,,\ \alpha^2 f(x) \leqslant f''(x) \leqslant \beta^2 f(x)$$

où a, α et β sont des nombres réels strictement positifs donnés.

1. Déterminer des nombres réels λ et μ tels que la fonction numérique ϕ définie sur [0, 1] par

$$\phi(x) = \lambda e^{\beta x} + \mu e^{-\beta x}$$

vérifie $\phi(0) = a$ et $\phi'(0) = 0$. Indiquer alors le signe de ϕ sur $[0,1]$ et exprimer $\phi''(x)$ en fonction de $\phi(x)$.

2. Soit w la fonction numérique définie sur $[0,1]$ par la relation

$$w := f\phi' - \phi f'$$

Calculer $w(0)$. Étudier le signe de w', puis celui de w.

3. En déduire, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$, l'inégalité $f(x) \leqslant \phi(x)$.

4. Établir, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$, l'inégalité suivante :

$$f(x) \leqslant \frac{a}{2}\left(e^{\beta x}+1\right)$$

5. Établir de même que, pour tout nombre réel x appartenant à $[0,1]$:

$$\frac{a}{2}e^{\alpha x} \leqslant f(x)$$

INDICATION : Adapter la stratégie des questions de III.1. à III.4. afin d'exploiter l'inégalité $\alpha^2 f \leqslant f''$.

On établit par des méthodes analogues que, si g est une fonction numérique définie sur $[0,1]$ à valeurs strictement positives sur $]0,1]$ de classe $\mathscr{C}^2$ et satisfaisant aux relations

$$g(0) = 0\,,\ g'(0) = a \quad \text{et} \quad \forall x \in [0,1]\,,\ \alpha^2 g(x) \leqslant g''(x) \leqslant \beta^2 g(x)$$

où a, α et β sont des nombres réels strictement positifs donnés, alors

$$\forall x \in [0,1]\,,\ \frac{a}{2\alpha}\left(e^{\alpha x}-1\right) \leqslant g(x) \leqslant \frac{a}{2\beta}e^{\beta x}$$

On ne demande pas de démonstration de ce résultat, et on pourra l'utiliser librement dans la suite du sujet.

Partie IV – Application à l'estimation de T_n

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$\alpha_n := \sqrt{n+\frac{1}{2}} \quad \text{et} \quad \beta_n := \sqrt{n+\frac{3}{4}}$$

1. Déterminer des équivalents de e^{α_n} et e^{β_n} de la forme $e^{n^{\mu}}$ où μ est une constante.

2. Établir que, pour tout nombre entier naturel n :

$$\mathrm{H}_{2n}(0)\frac{e^{\alpha_{2n}}}{2} \leqslant e^{\frac{1}{4}}\mathrm{H}_{2n}(1) \leqslant \mathrm{H}_{2n}(0)\frac{e^{\beta_{2n}}+1}{2}$$

3. En déduire que

$$\mathrm{H}_{2n}(1) \sim \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{1}{4}}e^{\sqrt{2n}}\left(\frac{2n}{e}\right)^{n}$$

4. Démontrer que $\mathrm{H}_{2n+1}(1) \sim \dfrac{e^{-\frac{1}{4}}}{2}\sqrt{n}e^{\sqrt{n}}\mathrm{H}_{2n}(0)$.

5. Déterminer un équivalent de $\mathrm{H}_{2n+1}(1)$.

VII. Indications

1

Les deux fonctions sont prolongeables par continuité en 0 par $f(0) = g(0) = 0$. La fonction f n'est pas dérivable en 0 car $f(x)/x$ n'a pas de limite en 0. La fonction g est dérivable en 0 avec $g'(0) = 0$.

2

On trouve $\left(f^{-1}\right)''(1) = \frac{1}{2}$ et $\left(f^{-1}\right)''(1) = -\frac{1}{8}\cdot$

3

Revenir au taux d'accroissement.

4

Il faut étudier le raccord en $\frac{1}{2}\cdot$

5

Pas de souci en un point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Étudier la dérivabilité à gauche et à droite de $n \in \mathbb{Z}$.

6

On trouve que, pour tout réel x, $\left(\mathrm{G}_d^{-1}\right)'(x) = \dfrac{1}{\cos x}\cdot$

7

On trouve $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(f^n\right)'(\alpha) = \left(f'(\alpha)\right)^n$.

8

Aux 1. et 3., il est profitable d'exprimer g au moyen du taux d'accroissement de f en 0.

9

Au 1.a., on pourra remarquer que $|f|$ est une composée. Au 1.b., on pourra s'intéresser au taux d'accroissement de $|f|$ en x_0 à gauche et à droite de x_0. Au 2., s'inspirer du sinus du topologue.

10

L'expression $\frac{f(x)}{x}$ est petite pour des raisons différentes pour x « petit » et x « grand ».

11

La fonction f est la réciproque d'une bijection.

12

Réponse positive au 1. Construire un cex au 2. de la forme $x \mapsto A(x)\sin\theta(x)$.

13

Au 2., rechercher une fonction de la forme $0 \mapsto 0 \ , \ x \neq 0 \mapsto x^{\alpha} \sin x^{\beta}$.

14

Raisonner par récurrence.

15

Procéder par récurrence.

16

Faire une figure. Prouver l'existence de $\alpha > c_1$ et de $\beta < c_2$ tels que $f(\alpha) > 0$ et $f(\beta) < 0$. Conclure.

17

Le réel $\lambda := 2\alpha$ convient (cf. l'IAF).

18

La fonction f' admet un minimum sur $[0,1]$.

19

Appliquer le théorème de Rolle à une fonction de la forme $x \mapsto C_1(g(x) - g(a)) + C_2(f(x) - f(a))$ où C_1 et C_2 sont des constantes.

20

Il faut dessiner ! Il y a du $\frac{f(x)}{x}$ dans l'air ...

21

TAF et TVI au 1. TVI et Rolle au 2. (par exemple).

22

Appliquer la définition de la continuité de f' en 0 au 1.

23

Sur un intervalle, une fonction continue injective est strictement monotone.

24

Dans le cas où $x \notin \{x_1, \ldots, x_n\}$, poser

$$\forall t \in \mathrm{I}\,,\ g(t) := f(t) - \mathrm{L}(x) - \mathrm{K}\prod_{i=1}^{n}(t - x_i)$$

où K sera judicieusement choisi tel que $g(x) = 0$. La fonction g s'annule en $n+1$ points, appliquer le théorème de Rolle plusieurs fois pour conclure.

25

Au 1., choisir par exemple $a := x+1$ et $b := x-1$ où $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $f^{(3)} = 0$.

26

Faire apparaître le taux d'accroissement en 0 en itérant dans l'équation fonctionnelle.

27

Vérifier que $f\left(\frac{x}{2}+1\right) = \frac{f(x)}{2} + 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ puis en déduire que f' est constante.

28

Raisonner par récurrence au a). Idem au b) en appliquant le théorème de la limite de la dérivée. On a $f^{(n)}(0) = 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

29

Remarquez que, pour tout réel x non nul, $x f_n(x) = f_{n+1}(x)$ et n'oubliez pas Leibniz.

30

Au 3., on pourra appliquer la formule de Leibniz.

31

Poser $x = \tan t$.

32

Attention à l'ensemble de dérivabilité.

33

On trouve $5\pi/6$.

34

Utiliser, par exemple, les nombres complexes.

35

Il faut faire apparaître $\sin(y)$ puisque y est un arcsinus. On trouve $\cos(4y) = -\sin(y) = -\frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

36

Attention aux équivalences logiques : il est par exemple faux d'écrire

$$\arctan x + \arctan(2x) = \frac{\pi}{4} \iff \tan\left(\arctan x + \arctan(2x)\right) = \tan\frac{\pi}{4}$$

On pourra raisonner par Analyse-Synthèse, utiliser des études de fonctions (pour connaître le nombre de solutions d'une équation ou leurs signes par exemple), etc.

37

Au I.3.c., on trouve $f(0) = 0$.

38

Cf. le chapitre AN 1 et en particulier le paragraphe dédié aux développements décimaux pour le principe de la méthode de Newton.

39

Au II.2., on pourra appliquer la formule de Leibniz.