AN 4 | Fonctions numériques

La mathématique universelle… est une logique de l'imagination.

Leibniz

La nuit étoilée, Vincent van Gogh

I. Comparaison des fonctions

1 — *Une salve d'équivalents*

Déterminer un équivalent en 0 des expressions suivantes :

1. $f : x \mapsto \dfrac{\cos(\pi x) - 1}{\tan(\pi x)}$;
2. $g : x \mapsto \dfrac{\ln(1+2x) - \sin\left(x^2\right)}{e^x - 1}$;
3. $h : x \mapsto \dfrac{2^{x^2} - 1}{\sqrt[3]{1+x} - 1}$;
4. $k : x \mapsto 1 - \dfrac{1}{\cos x}$.

2 — *Quelques formes indéterminées f*

Étudier les formes indéterminées suivantes :

1. $\dfrac{x^a - a^a}{a^x - a^a}$ en a (où $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) ;
2. $\left(1 + \sin\dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ en $+\infty$;
3. $(\sin x)^{\ln(1+x)}$ en 0^+ ;
4. $x^{\sqrt{x}} - \sqrt{x}^{\,x}$ en $+\infty$.

3 — *Quelques formes indéterminées f*

Étudier l'existence d'une limite en 0 des expressions suivantes :

$$f(x) := \frac{\ln(1+x) + x^2}{\sin x}\ ,\ g(x) := \frac{\sqrt[5]{1+x} - 1 + \sin x}{\tan x}\ ,\ h(x) := \left(1 + x^2\right)^{\frac{1}{e^x - 1}}$$

4 — *Quelques formes indéterminées f*

Lever les formes indéterminées suivantes :

1. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$ en $+\infty$;
2. $(\tan x)(\tan 2x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$;
3. $\dfrac{x^x - e^x}{x}$ en $0+$;
4. $\dfrac{x^2}{x-1} - \dfrac{x^3}{x^2 - 2}$ en $+\infty$;
5. $(\ln(x-1))^2 - (\ln(x+1))^2$ en $+\infty$;
6. $(\sin x)^x$ en $0+$.
7. $\dfrac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\sqrt{1+x} - \sqrt{x}}$ en $+\infty$;
8. $\tan(x)\sin(4x)$ en $\dfrac{\pi}{2}$;
9. $\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\sqrt{x}}$ en $+\infty$;
10. $\dfrac{3^x - 9}{2^x - 4}$ en 2 ;
11. $x^x - e^x$ en $+\infty$;
12. $(\sin x)^{\sin x}$ en $0+$.

II. Limites

5 — *Théorème de Césaro fonctionnel ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ croissante telle que $f(x) - f(x-1) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Montrer que $\dfrac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

6 — *Limite d'un quotient ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\dfrac{f(2x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

1. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{f(2^n x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

2. On suppose désormais que f est croissante.

   a. Montrer que $\forall \lambda > 1$, $\dfrac{f(\lambda x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

   b. Démontrer plus généralement que $\forall \lambda > 0$, $\dfrac{f(\lambda x)}{f(x)} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

7 — *Un lemme ff*

Soit f et g deux applications définies sur $\mathbb{R}$, on suppose que : g est périodique, f tend vers 0 en $+\infty$ et $f+g$ est croissante. Montrer que g est constante.

8 — *Fonctions sous-additives fff*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2\,,\ f(x+y) \leqslant f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad \exists \lambda \in \mathbb{R}\,,\ \frac{f(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \lambda$$

III. Équations fonctionnelles

9 — *Une équation fonctionnelle f*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telle que $\forall (x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, $f\left(xf(y)\right) = yf(x)$ et $f(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f(a) = a$.

   a. Démontrer que, pour tout $b \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $f\left(ba^n\right) = a^n f(b)$.

   b. En déduire, au moyen d'un raisonnement par l'absurde, que $a \leqslant 1$.

   c. Démontrer que $a = 1$.

2. En déduire l'expression de $f(x)$ pour tout réel x non nul.

10 — *Morphismes ff*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(xy) = f(x)f(y)$$

1. Que peut valoir $f(1)$? Déterminer f dans le cas où $f(1) = 0$.
2. On suppose que $f(1) \neq 0$.
   a. Calculer $f(r)$ tout tout $r \in \mathbb{Q}$.
   b. Montrer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$ puis que f est croissante sur $\mathbb{R}$.
   c. En déduire que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

11 — *Une équation fonctionnnelle ff*

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ croissante non identiquement nulle telle que

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \ f(xy) = f(x) + f(y)$$

1. Démontrer que $f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Déterminer la limite de f en 0.
2. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_+^*$. En déduire que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

IV. Fonctions usuelles

12 — *Étude d'une fonction*

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x(1 - e^x)$. On note Γ le graphe de f dans le repère orthonormé $\mathscr{R} = (\mathrm{O}, \mathbf{u}, \mathbf{v})$.

1. Justifier la dérivabilité de f puis étudier les variations de la fonction f'.
2. En déduire les variations de f.
3. Prouver que Γ admet *une seule* asymptote, notée $\mathscr{D}$. Etudier la position relative de Γ et $\mathscr{D}$.
4. Tracer Γ et $\mathscr{D}$.
5. Calculer l'aire, notée $\mathscr{A}(\lambda)$, comprise entre Γ et $\mathscr{A}$ sur le segment $[\lambda, 0]$ pour tout $\lambda \leqslant 0$. Cette aire admet-elle une limite lorsque λ tend vers $-\infty$?

13 — Une étude f

Soit f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - (\tanh x)\ln(\cosh x)$.

1. Montrer que $\cosh x = e$ n'admet qu'une seule solution positive notée a.
2. Étudier les variations de f (mais pas les limites !)
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(\cosh x) = x - \ln 2 + \ln\left(1 + e^{-2x}\right)$.
4. En déduire les limites de f puis tracer la courbe représentative de f.

14 — Une inégalité f

Démontrer que, pour tout x dans $\mathbb{R}$, on a $|\tanh x| \geqslant \dfrac{|x|}{1+|x|}$.

15 — Sommes hyperboliques f

Soient $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les sommes $\mathrm{S}_n = \sum_{k=0}^{n} \cosh(ka+b)$ et $\Sigma_n = \sum_{k=0}^{n} \sinh(ka+b)$.

16 — Équations aux puissances f

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : **1.** $2^x + 3^x = 5$; **2.** $9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.

17 — Une inégalité classique ff

L'objectif de cet exercice est d'établir que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall t \in [0, n[,\ 0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{t^2 e^{-t}}{n}$.

1. Prouver que $\forall u \in [0,1[,\ \ln(1+u) \leqslant u \leqslant -\ln(1-u)$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Établir que pour tout $t \in [0,n],\ e^{-t} \geqslant \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$ et $e^t \geqslant \left(1 + \dfrac{t}{n}\right)^n$.
3. En déduire que $\forall t \in [0,n],\ 0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant f_n(t)$ où $f_n(t) := e^{-t}\left(1 - \left(1 - \dfrac{t^2}{n^2}\right)^n\right)$.
4. Soit $a \in [0,1]$. Prouver que pour tout $m \in \mathbb{N},\ (1-a)^m \geqslant 1 - ma$.
5. Prouver que $\forall t \in [0,n],\ 0 \leqslant e^{-t} - \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leqslant \dfrac{t^2 e^{-t}}{n}$.

18 — Une inégalité ff

On note $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(x) := \ln(1+x)\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

1. Étudier sur $[1,+\infty[$ le signe de $x \mapsto (x-1)\ln(1+x) - x\ln x$.
2. En déduire les variations de ϕ sur $[1,+\infty[$ puis sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Établir que, pour tous a, b dans $\mathbb{R}_+^*$, $\ln\left(1+\dfrac{a}{b}\right)\ln\left(1+\dfrac{b}{a}\right) \leqslant (\ln 2)^2$.

19 — *Une équation ff*

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} \sinh(2+kx) = 0$.

V. Indications

1

Utiliser les équivalents usuels.

2

Au 1., poser $x := a + u$ et utiliser les équivalents usuels en 0.

3

Utiliser les équivalents usuels en 0. Attention, se souvenir que l'on ne peut pas en général additionner les équivalents : si $f(x) \sim ax$ et $g(x) \sim bx$, on ne peut affirmer en général que $f(x) + g(x) \sim ax + bx$.

4

On recommande vivement de poser $x = x_0 + u$ avec u tendant vers 0 pour étudier le comportement d'une expression $f(x)$ quand x tend x_0.

5

Appliquer le théorème de Césaro à $\big(f(n) - f(n-1)\big)_{n\geqslant 1}$ et encadrer $f(x)$ au moyen de la partie entière.

6

Au 2.a., on pourra encadrer λ par deux puissances de 2 successives.

7

Quel est le comportement de la suite $\big((f+g)(x+n\mathrm{T})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ où $\mathrm{T} > 0$ est une période de g et $x \in \mathbb{R}$?

8

Montrer que $f : x \mapsto \lambda x$. En considérant $x \mapsto f(x) - \lambda x$

9

Remarquer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $xf(x)$ est un point fixe de f.

10

Le début est classique. Remarquer que f est positive sur $\mathbb{R}_+$ et en déduire qu'elle est croissante. Utiliser alors la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ (mais avec une petite subtilité).

11

La fonction admet une limite ℓ dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par le TLM. Montrer par l'absurde que $\ell = 0$.

12

L'asymptote est la droite d'équation $y = x$.

13

Il y a des asymptotes.

14

On peut se ramener à étudier $x \mapsto (1+x)\tanh(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

15

Penser aux sommes trigonométriques : se ramener à des exponentielles, appliquer la formule de la série géométrique, etc.

16

Le réel 1 est l'unique solution du 1. Au 2., on trouve $\frac{3}{2}$.

17

Raisonner par récurrence au 4. Les questions sont enchaînées.

18

Dériver deux fois au 1.

19

Appliquer la formule de la série géométrique. On trouve $x = -\frac{4}{101}$.