AN 9 | Intégration des fonctions continues par morceaux

Ma cohabitation passionnée avec les mathématiques m'a laissé un amour fou pour les bonnes définitions, sans lesquelles il n'y a que des à peu près.

Stendhal

Géoglyphes de Nazca

I. Généralités

1 — *Formule de la moyenne, X PC-2012* f

1. Soit $(f,g)\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})^2$ avec $g \geqslant 0$. Montrer que $\exists c \in [a,b]$, $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(c)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$ et $g \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$ tels que $f' \geqslant 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a,b]$ tel que

$$\int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t = f(a)\int_a^c g(t)\mathrm{d}t + f(b)\int_c^b g(t)\mathrm{d}t$$

2 — *Primitives d'une fonction continue et périodique* ff

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue T-périodique.

1. Soit F une primitive de f. Montrer que F est T-périodique *si et seulement si* $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t = 0$.

2. On suppose que $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t = 0$. Montrer que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\displaystyle\int_a^b f(\lambda t)\mathrm{d}t \xrightarrow[\lambda \to +\infty]{} 0$.

3. Que devient le résultat si $\displaystyle\int_0^{\mathrm{T}} f(t)\mathrm{d}t \neq 0$?

3 — *Intégrale du module* ff

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

1. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que si $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| = \displaystyle\int_a^b |f|$ alors f garde un signe constant sur $[a,b]$.

2. Soit $f \in \mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{C})$ telle que $\left|\displaystyle\int_a^b f\right| = \displaystyle\int_a^b |f|$.

Montrer qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $f = |f|e^{i\theta}$, ie f est « d'argument » constant.

4 — *Des propriétés géométriques* ff

Soit f et g dans $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}_+)$. Les questions suivantes sont indépendantes.

1. Montrer qu'il existe $c \in [0,1]$ tel que $\displaystyle\int_0^c f = \int_c^1 g$.

2. Montrer qu'il existe $d \in]0,1[$ tel que $g(d)\displaystyle\int_0^1 f = f(d)\int_0^1 g$.

5 — *Moments nuls* ff

Soit $f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$, $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $\int_0^1 f(u)u^k \mathrm{d}u = 0$. Montrer que f admet au moins $n+1$ zéros distincts dans $]0,1[$.

6 — *Intégrales d'une bijection et de sa réciproque* ff

Soit $f \in \mathscr{C}^1\big([a,b],\mathbb{R}\big)$ strictement croissante. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(y)\mathrm{d}y = bf(b) - af(a)$.

II. Inégalités

7 — *Une minoration du carré de l'intégrale*

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}_+^*$ continue. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^3 \int_0^1 \frac{1}{f} \geqslant \left(\int_0^1 f\right)^2$.

8 — *Majoration de l'intégrale du carré de f'* f

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $f(0) = f(1) = 0$. Montrer que $\displaystyle\left(\int_0^1 f'^2\right)^2 \leqslant \left(\int_0^1 f^2\right)\left(\int_0^1 f''^2\right)$.

9 — *Inégalité de Carlson* f

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs. L'objectif est d'établir l'inégalité de Carlson :

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^4 \leqslant \pi^2 \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n k^2 a_k^2\right)$$

On pose $\mathrm{S} := \displaystyle\sum_{k=1}^n a_k^2$ et $\mathrm{T} := \displaystyle\sum_{k=1}^n k^2 a_k^2$.

1. Soit $(\alpha,\beta) \in \big(\mathbb{R}_+^*\big)^2$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que

$$\left(\sum_{k=1}^n a_k\right)^2 \leqslant (\alpha\mathrm{S} + \beta\mathrm{T}) \sum_{k=1}^n \frac{1}{\alpha + \beta k^2}$$

2. On considère $(\alpha,\beta) \in \big(\mathbb{R}_+^*\big)^2$ et on pose $f(t) := \dfrac{1}{\alpha + \beta t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

a. Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Exprimer $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ au moyen de la fonction arctangente.

b. Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $f(k) \leqslant \displaystyle\int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.

c. En déduire que $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \left(\mathrm{S}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \mathrm{T}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\,n\right)$.

3. Démontrer l'inégalité de Carlson.

10 — *Une majoration fine f*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $c = \dfrac{a+b}{2}$ et $\mathrm{M} \in \mathbb{R}_+$. On pose

$$\mathrm{E} = \left\{ f \in \mathscr{C}^2([a, b], \mathbb{R})\,;\, f'(a) = f'(b) = 0 \text{ et } |f''| \leqslant \mathrm{M} \right\}$$

1. Soit $f \in \mathrm{E}$. Montrer que $\left|\displaystyle\int_a^b (c - t) f''(t)\mathrm{d}t\right| = |f(b) - f(a)|$.

2. Montrer que $|f(b) - f(a)| \leqslant \mathrm{M}\dfrac{(b-a)^2}{4}$.

11 — *Inégalité FKG (Fortuin, Kasteleyn et Ginibre) ff*

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$ et $(f, g) \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$, avec f et g monotone de même sens de variation.

1. Établir que $\forall (x, y) \in [a, b]^2$, $\big(f(x) - f(y)\big)\big(g(x) - g(y)\big) \geqslant 0$.

2. En déduire que $(b - a)\displaystyle\int_a^b fg \geqslant \left(\int_a^b f\right)\left(\int_a^b g\right)$.

12 — *Inégalité de Poincaré ff*

Soit $f \in \mathscr{C}^1([0, 1], \mathbb{R})$ telle que $f(0) = 0$. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 f^2 \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 (f')^2$.

13 — *Intégrale d'un sinus pondéré ff*

Justifier, sans calculer cette intégrale, que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{1 + x}\mathrm{d}x > 0$.

14 — *Inégalité de Jensen ff*

Soit $f : [0, 1] \to \mathrm{I}$ continue avec I intervalle de $\mathbb{R}$ et $\phi : \mathrm{I} \to \mathbb{R}$ continue et convexe.

Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 f \in \mathrm{I}$ et établir que $\phi\left(\displaystyle\int_0^1 f\right) \leqslant \displaystyle\int_0^1 \phi \circ f$.

15 — *Inégalités de Hölder et Hardy fff*

Dans tout ce sujet, p désigne un nombre réel strictement plus grand que 1.

1. Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tel que $a<b$. Pour $\alpha\in\,]1,+\infty[$ et $h\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)$, on pose $\|h\|_\alpha := \left(\int_a^b h^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$.

- **a.** Démontrer que $\forall(u,v)\in\mathbb{R}_+^2,\ uv\leqslant \dfrac{u^p}{p}+\dfrac{v^q}{q}\cdot$
- **b.** Soit $(f,g)\in\mathscr{C}^0([a,b],\mathbb{R}_+)^2$. Démontrer l'inégalité de Hölder : $\|fg\|_1\leqslant\|f\|_p\|g\|_q$.

  INDICATION : On pourra poser $u:=\dfrac{f(x)}{\|f\|_p}$ et $v:=\dfrac{g(x)}{\|g\|_q}$ lorsque cela a un sens.

2. Soit $f\in\mathscr{C}^0(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}_+)$ et $\mathrm{A}\in\mathbb{R}_+^*$. On note $\mathrm{F}(x) := \int_0^x f$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$ et $\mathrm{G}(x) := \dfrac{\mathrm{F}(x)}{x}$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+^*$.

- **a.** Justifier que F^p de classe $\mathscr{C}^1$ et calculer sa dérivée.
- **b.** En déduire que $\forall a\in\,]0,\mathrm{A}]$, $\displaystyle\int_a^{\mathrm{A}}\mathrm{G}^p\leqslant\frac{a\mathrm{G}(a)^p}{p-1}+\frac{p}{p-1}\int_a^{\mathrm{A}} f\mathrm{G}^{p-1}$.
- **c.** Établir que G est prolongeable par continuité en 0.
- **d.** Montrer l'inégalité de Hardy : $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}}\mathrm{G}^p\leqslant\left(\frac{p-1}{p}\right)^p\int_0^{\mathrm{A}} f^p$. INDICATION : Appliquer Hölder.

16 — *X PC-2012 fff*

Soit $f\in\mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ telle que $f(0)=0$ et $0\leqslant f'\leqslant 1$. Établir que $\displaystyle\int_0^1 f^3\leqslant\left(\int_0^1 f\right)^2$.

III. Sommes de Riemann

17 — *Une étude asymptotique f*

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$. On pose pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n := \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n^\alpha+k^\alpha}\cdot$

1. Étudier le comportement asymptotique de u_n lorsque $\alpha\in\mathbb{R}_-$.
2. On suppose que $\alpha>0$. Déterminer le comportement asymptotique de u_n.

18 — *Riemann sur un plateau f*

Déterminer le comportement asymptotique des suites définies par :

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2+n^2}$; **2.** $\displaystyle\frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\cdots(n+n)}$; **3.** $\displaystyle\frac{1}{n^4}\prod_{k=1}^{2n}(n^2+k^2)^{\frac{1}{n}}$.

IV. Fonctions définies par une intégrale

19 — *Le produit de convolution* f

Soit $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Pour tout réel x, on pose, $(f \star g)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)g(x-t)\,\mathrm{d}t$.

1. Prouver que $f \star g = g \star f$.
2. Si f et g sont paires, qu'en est-il de $f \star g$?
3. On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout x réel, $f_k(x) = x^k$. Calculer $f_n \star f_m$ pour tous n et m dans $\mathbb{N}$.

20 — *Intégration sur une tranche de longueur fixe* f

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ admettant une limite finie ℓ en $+\infty$ et a un réel strictement positif.

1. Montrer que $\displaystyle\int_x^{x+a} f(t)\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} a\ell$.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^x \big(f(t+a)-f(t)\big)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x\to+\infty]{} -\int_0^a f + a\ell$.
3. Déterminer le comportement quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_0^x (\arctan(t+1)-\arctan(t))\,\mathrm{d}t$.

21 — *Mines-2019* ff

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto e^{t^2}$.

1. Démontrer que tour tout réel x, il existe $a(x) \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\int_x^{a(x)} f = 1$.
2. Justifier que la fonction a est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

22 — *Indémodable* ff

On pose $\phi(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de ϕ.
2. Étudier les variations de ϕ.
3. Établir que ϕ est prolongeable par continuité en 0 et en 1. Étudier la dérivabilité de ϕ en ces points.
4. Déterminer le comportement asymptotique de ϕ en $+\infty$.
5. Tracer le graphe de ϕ sur $\mathbb{R}_+$.

V. Suites d'intégrales

23 — *Une suite d'inégrales f*

Pour tout entier naturel n, on pose $\mathrm{I}_n := \int_1^e (\ln t)^n \mathrm{d}t$.

1. Démontrer que la suite $(\mathrm{I}_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
2. Trouver une relation de récurrence liant I_n et I_{n-1}.
3. En déduire la limite puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

24 — *Développement asymptotique de la suite des moments ff*

Soit f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0,1]$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n := \int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ puis déterminer un DAS de u_n à la précision $o\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. En supposant que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[0,1]$, déterminer un développement asymptotique à deux termes de u_n.

25 — *Lemme de Riemann-Lebesgue ff*

Soit a et b réels tels que $a < b$ et $f \in \mathscr{C}^1([a,b],\mathbb{R})$. Montrer que $\int_a^b f(x)\sin(nx)\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

26 — *Étude d'une suite de moments intégraux fff*

Soit $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ continues, positives et non nulles avec $g > 0$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{I}_n := \int_0^1 f^n(x)g(x)\mathrm{d}x \quad \text{et} \quad \theta_n := \frac{\mathrm{I}_{n+1}}{\mathrm{I}_n}$$

1. Montrer que $(\theta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On note ℓ sa limite dans $\overline{\mathbb{R}}_+^*$.
2. Justifier que $\mathrm{I}_n^{\frac{1}{n}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.
3. **a.** Soit $[a,b] \subset [0,1]$ et $\mu \in \mathbb{R}_+$ une constante minorant f sur $[a,b]$. Démontrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \left(\int_a^b g\right)^{\frac{1}{n}} \mu \leqslant \mathrm{I}_n^{\frac{1}{n}} \leqslant \|f\|_\infty \left(\int_0^1 g\right)^{\frac{1}{n}}$$

   b. En déduire la valeur de ℓ.

VI. Calculs de primitives et d'intégrales

27 — *Calcul intégral ƒ*

Calculer :

1. une primitive sur $\mathbb{R}$ arctan ; **2.** $\displaystyle\int_0^1 t^2 \arctan t \,\mathrm{d}t$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\ln\sqrt{3}} \frac{e^x}{e^{2x}+1}\mathrm{d}x$;

28 — *Changements de variable ƒ*

On pose $\mathrm{S} := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t \,\mathrm{d}t}{\sin t + \cos t}$ et $\mathrm{C} := \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t + \cos t}$.

1. Montrer que $\mathrm{C} = \mathrm{S}$ au moyen d'un changement de variable et en déduire C.

2. En déduire la valeur de $\mathrm{K} := \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t+\sqrt{1-t^2}}$.

29 — *Pratique du changement de variable ƒ*

Calculer les intégrales suivantes par les changements de variables indiqués :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+1}$, $u=\sqrt{x}$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x \sin x}{\cos 2x}\mathrm{d}x$, $u = \cos x$; **3.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u^2+u+1}}$, $x = \sqrt{u^2+u+1}-u$;

4. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}x}{\cos x}$, $u = \sin x$; **5.** $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, $u=\cos x$; **6.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^3 x \mathrm{d}x$, $u = \cos x$;

7. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin 2x \mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}$, $u = \cos 2x$; **8.** $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\mathrm{d}x$, $x = \cos 2u$. **9.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{x}+x^{\frac{1}{4}}}{\sqrt{x}+1}\mathrm{d}x$ par $u = x^{\frac{1}{4}}$.

30 — *Un changement de variable ƒ*

1. Calculer $\tanh \ln \sqrt{a}$.

2. En déduire, en posant $u = \tanh t$, la valeur de $\displaystyle\int_{\ln\sqrt{2}}^{\ln\sqrt{3}} \frac{\cosh^2 t + \sinh^2 t}{\cosh^3 t \sinh t}\mathrm{d}t$.

31 — *Pour réviser les principales techniques de calcul ƒƒ*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_0^3 x\sqrt{x+1}\mathrm{d}x$; **2.** $\displaystyle\int_0^{\sinh 1} \sqrt{t^2+1}\mathrm{d}t$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\pi} |\cos nt|\,\mathrm{d}t$ où $n \in \mathbb{N}$; **4.** $\displaystyle\int_0^{\pi} e^{\omega t}\sin t \mathrm{d}t$ où $\omega \in \mathbb{R}$.

5. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^4}{x^{10}+1}\,\mathrm{d}x$; **6.** $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{2x^4+3x^3+5x^2+17x+30}{x^3+8}\,\mathrm{d}x$; **7.** $\displaystyle\int_{-1}^1 (\arcsin x)^2\,\mathrm{d}x$.

32 — *Quelques calculs sans indication ff*

Calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^4 \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x}}$; **2.** $\displaystyle\int_1^e \cos(\ln x)\,\mathrm{d}x$; **3.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan^3 x\,\mathrm{d}x$; **4.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t$ par $u=\frac{\pi}{4}-t$.

33 — *Calcul de l'intégrale gaussienne ff*

L'objectif est de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, i.e. $\displaystyle\int_0^{\mathrm{A}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x \xrightarrow[\mathrm{A}\to+\infty]{} \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

⇛ On pose, $\forall n\in\mathbb{N},\ \mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2}\cos^n(x)\,\mathrm{d}x$ et $\mathrm{F}:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $\mathrm{F}(x) := \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

⇛ On utilisera librement les inégalités $\forall t\in\mathbb{R}_+,\ 1-t \leqslant e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{1+t}$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(\mathrm{W}_n)_{n\geqslant 0}$.

2. En déduire que $\forall n\in\mathbb{N},\ \dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n$.

3. Établir que $\forall n\in\mathbb{N},\ (n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \dfrac{\pi}{2}$ puis en déduire que $\mathrm{W}_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Étudier la monotonie de F et en déduire que F admet une limite réelle en $+\infty$. On la note $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

5. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}}\left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et en déduire que $\sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

b. Établir que $\displaystyle\int_0^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^n e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\,\mathrm{W}_{2n-2}$.

6. Établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

34 — *X PC-2021 ff*

Soit $n\in\mathbb{N}$. Calculer $\mathrm{I}_n := \displaystyle\int_0^{\pi} (\cos t)^n \cos(nt)\,\mathrm{d}t$.

VII. Problèmes

35 — *Inégalité de Carlson* ff

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs.

L'objectif est d'établir l'inégalité de Carlson :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^4 \leqslant \pi^2 \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2\right)$$

Nous prouverons également que la constante π^2 est optimale pour une inégalité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Partie I – La démonstration de Hardy

On pose $\mathrm{S} := \sum_{k=1}^{n} a_k^2$ et $\mathrm{T} := \sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2$.

1. Soit $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$. En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, établir que

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant (\alpha \mathrm{S} + \beta \mathrm{T}) \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\alpha + \beta k^2}$$

2. On considère $(\alpha, \beta) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et on pose $f(t) := \dfrac{1}{\alpha + \beta t^2}$ pour $t \in \mathbb{R}_+$.

- **a.** Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Exprimer $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ au moyen de la fonction arctangente.
- **b.** Montrer que, pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\displaystyle f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\mathrm{d}t$.
- **c.** En déduire que $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqslant \left(\mathrm{S}\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} + \mathrm{T}\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\right) \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}\, n\right)$.

3. Démontrer l'inégalité de Carlson.

Partie II – Optimalité de la constante

Soit $\mathrm{C} \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}_+^n$, $\displaystyle\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^4 \leqslant \mathrm{C}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} k^2 a_k^2\right)$.

Nous allons établir que $\mathrm{C} \geqslant \pi^2$. Soit $\lambda > 0$. On pose $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ u_k := \dfrac{\lambda}{\lambda^2 + k^2}$.

1. En vous inspirant de la question I.2.b., montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\sum_{k=1}^{n} u_k \geqslant \int_0^n \frac{\lambda \mathrm{d}t}{t^2 + \lambda^2} - \frac{1}{\lambda} \quad , \quad \sum_{k=1}^{n} u_k^2 \leqslant \int_0^n \frac{\lambda^2 \mathrm{d}t}{\left(t^2 + \lambda^2\right)^2} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n} k^2 u_k^2 \leqslant \int_0^n \frac{\lambda^2 (t+1)^2 \mathrm{d}t}{\left(t^2 + \lambda^2\right)^2}$$

2. a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^n \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\lambda^2}$ puis démontrer que $\displaystyle\int_0^n \frac{t^2\mathrm{d}t}{\left(t^2+\lambda^2\right)^2} = \frac{\arctan(n/\lambda)}{2\lambda} - \frac{1}{2}\frac{n}{n^2+\lambda^2}\cdot$

   b. En déduire une expression de $\displaystyle\int_0^n \frac{\lambda^2\mathrm{d}t}{\left(t^2+\lambda^2\right)^2}\cdot$

3. Établir que $\mathrm{C} \geqslant \pi^2$.

36 — *Calcul de l'intégrale gaussienne ff*

L'objectif de ce problème est de prouver que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

Partie I – Intégrales de Wallis

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{W}_n = \displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\mathrm{d}x$.

1. Trouver une relation de récurrence vérifiée par $(\mathrm{W}_n)_{n\geqslant 0}$.
2. En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{n+1}{n+2}\mathrm{W}_n \leqslant \mathrm{W}_{n+1} \leqslant \mathrm{W}_n$.
3. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(n+1)\mathrm{W}_{n+1}\mathrm{W}_n = \dfrac{\pi}{2}\cdot$ puis en déduire que $\mathrm{W}_n \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}\cdot$

Partie II – Intégrale de Gauss

On note F la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $\mathrm{F}(x) := \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $1-t \leqslant e^{-t} \leqslant \dfrac{1}{1+t}\cdot$
2. En déduire que F admet une limite réelle en $+\infty$. On la note $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

   a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t$ et en déduire que $\sqrt{n}\mathrm{W}_{2n+1} \leqslant \displaystyle\int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

   b. Établir que $\displaystyle\int_0^n e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \int_0^n \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t$ et en déduire que $\displaystyle\int_0^n e^{-t^2}\mathrm{d}t \leqslant \sqrt{n}\mathrm{W}_{2n-2}$.

4. Établir que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\cdot$

37 — *Calcul des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$* *fff*

⇛ Pour $\mathrm{A}>0$ et $f :]0,\mathrm{A}] \to \mathbb{R}$ continue et prolongeable par continuité en 0, on notera

$$\int_0^{\mathrm{A}} f(t)\mathrm{d}t$$

l'intégrale sur le segment $[0,\mathrm{A}]$ du prolongement par continuité de f sur $[0,\mathrm{A}]$.

⇛ Pour une fonction continue $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ prolongeable par continuité en 0, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f$ converge si la fonction

$$\mathrm{F} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t \end{array}$$

admet une limite réelle en $+\infty$. On note alors $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ cette limite.

⇛ On pose $\forall x \in \mathbb{R},\ \operatorname{signe}(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x \geqslant 0 \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$

Partie I – Le cas $n=1$: l'intégrale de Dirichlet

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\mathrm{d}t$ et $v_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{\sin t}\mathrm{d}t$.

1. Soit $a<b$ deux réels et $\psi : [a,b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer que

$$\int_a^b \psi(t)\sin(nt)\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

2. Justifier l'existence de u_n et v_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 0}$ est constante.
4. Établir que la fonction $t \mapsto \dfrac{\sin t - t}{t \sin t}$ est prolongeable en 0 en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
5. Établir que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{\pi}{2}$.
6. En déduire l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t$ ainsi que sa valeur.
7. Montrer que, $\forall \lambda \in \mathbb{R}^*$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(\lambda t)}{t}\mathrm{d}t$ converge et exprimer sa valeur en fonction de λ.

Partie II – Cas général

Dans cette partie, $n \in \mathbb{N}$ est fixé tel que $n \geqslant 2$. On note f_n l'application définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (\sin x)^n$.

1. Déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de f_n.

2. En déduire que $\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ f_n^{(k)}(x) = o\left(x^{n-1-k}\right)$ au voisinage de 0.

3. Montrer que, pour tout k dans $\mathbb{N}$, l'application $f_n^{(k)}$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$, u et v deux applications de classe $\mathscr{C}^k$ sur $[a, b]$, avec $a < b$. Montrer que :

$$\int_a^b u(x) v^{(k)}(x) \mathrm{d}x = \left[\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i u^{(i)}(x) v^{(k-1-i)}(x) \right]_a^b + (-1)^k \int_a^b u^{(k)}(x) v(x) \mathrm{d}x$$

5. On pose $g(x) = \dfrac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$. Justifier que g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et calculer $g^{(k)}$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

6. En déduire que, pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $0 < a < b$:

$$\int_a^b \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x = -\left[\sum_{k=0}^{n-2} \frac{(n-2-k)!}{(n-1)!} \frac{f_n^{(k)}(x)}{x^{n-1-k}} \right]_a^b + \frac{1}{(n-1)!} \int_a^b \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x} \mathrm{d}x$$

7. En linéarisant f_n, démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f_n^{(n-1)}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (2k-n)^{n-1} \sin((2k-n)x)$$

8. Établir que

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^{+\infty} \frac{f_n^{(n-1)}(x)}{x} \mathrm{d}x$$

INDICATION : En commençant par justifier soigneusement son existence, on calculera l'intégrale

$$\int_0^b \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x$$

pour $b > 0$, puis on étudiera son comportement lorsque b tend vers $+\infty$.

9. En déduire que :

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{\sin x}{x}\right)^n \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2^{n+1}(n-1)!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} (2k-n)^{n-1} \mathrm{signe}(2k-n)$$

VIII. Indications

1

Au 1., penser à Weierstrass ou au TVI. Au 2., intégrer par parties puis appliquer le 1.

2

Quelle est la dérivée de la fonction $x \longmapsto \mathrm{F}(x+\mathrm{T}) - \mathrm{F}(x)$?

3

Au a), se ramener au cas où f est positive. Au b), justifier l'existence de $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \left(\int_a^b \left|f(x)\right| \mathrm{d}x\right) e^{i\theta}$$

puis considérer $g := f e^{-i\theta}$.

4

Au 1., on pourra appliquer le TVI à une fonctions auxiliaire. Idem au 2., avec le théorème de Rolle.

5

Par linéarité de l'intégrale, on se donne un peu de marge : $\forall \mathrm{P} \in \mathbb{R}_n[\mathrm{X}],\ \int_0^1 f\mathrm{P} = 0$. Raisonner par l'absurde en vous intéressant au éventuels changement de signe de f.

6

Effectuer le changement de variable $y = f(x)$.

7

Appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

8

La piste de Cauchy-Schwarz nous mène à $\int_0^1 f f''$: comment arriver à cette intégrale en partant de $\int_0^1 f'^2$?

9

On trouve $\displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}} \arctan\left(\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}x\right)$.

10

Effectuer une IPP au 1.

11

Intégrer de a à b « dans » l'inégalité du 1. par rapport à x puis par rapport à y.

12

Partir de $f(t) = \int_0^t f'$ puis appliquer l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

13

Au moyen de la relation de Chasles, « découper » l'intégrale de 0 à π puis de π à 2π et comparer les deux intégrales obtenues.

14

Utiliser des sommes de Riemann ou adapter la démonstration donnée dans AN 7 de l'inégalité discrète de Jensen (via une droite d'appui).

15

Utiliser la convexité au 1.a.

16

Utiliser la fonction définie par :

$$\mathrm{G}(x) = \int_0^x f^3(t)\,\mathrm{d}t - \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

17

On fera apparaître une somme de Riemann.

18

On note a_n, b_n et c_n les expressions de l'énoncé.

1. On trouve

$$a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\pi}{4}$$

2. Passer au logarithme, on trouve

$$b_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{4}{e}$$

3. Passer au logarithme, on trouve

$$c_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{2\ln(5)-4+2\arctan(2)}$$

19

Effectuer un changement de variable pour répondre à la question **1**. Trouver une « relation de récurrence » à l'aide d'une IPP au **3**.

20

Au 1., on peut faire de l'epsilonométrie ou appliquer le TAF à une primitive de f. Au 2., faire un changement de variable et appliquer la relation de Chasles afin de se ramener au a). Le c) n'est qu'une application du b) ; la limite recherchée est $\pi/4 + \ln(2)/2$.

21

Reconnaître au 1. une problématique du type TVI. Exprimer a au moyen d'opérations usuelles sur des fonctions $\mathscr{C}^\infty$.

22

Au trois, on pourra par exemple appliquer le théorème de la limite de la dérivée.

23

Etudier la monotonie de la suite au 1. Effectuer une IPP au 2.

24

Au 1., on montre que $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ par un encadrement. Une IPP permet de conclure que

$$u_n = \frac{f(1)}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$$

Puis reprendre l'IPP du 1 et appliquer à f' le 1. On trouve $u_n = \dfrac{f(1)}{n} - \dfrac{f(1)+f'(1)}{n^2} + o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

25

L'hypothèse de classe $\mathscr{C}^1$ nous incite à effectuer une IPP.

26

On rappelle que $\|f\|_\infty = \max\limits_{t\in[0,1]} f(t)$.

27

Un changement de variable s'impose au 3.

28

Il existe une formule trigonométrique permettant de « transformer » un cosinus en sinus et inversement.

29

On se souviendra que l'on peut appliquer la formule du changement de variable « dans les deux sens »

30

On a $\tanh \ln \sqrt{a} = \dfrac{1-a}{1+a}$.

31

Au 2., exploiter la relation $\sinh^1 + 1 = \cosh^2$.

32

Au 4., on appliquera la formule d'addition de la tangente.

33

Des changements de variables « s'imposent » au 5.

34

Commencer par calculer $\int_0^{\pi} \cos(pt)\cos(qt)\,\mathrm{d}t$ pour tout $(p,q) \in \mathbb{Z}^2$.

35

On pourra passer à la limite $\lambda \to +\infty$ dans la dernière partie.

36

Cf. le cours pour le calcul des intégrales de Wallis.

37

Attention, ce sujet nécessite d'avoir traité le chapitre sur les développements limités. Le lemme de Riemann-Lebesgue a été étudiée en TD.