ALG 1 | Logique et raisonnements mathématiques

« C'est avec la logique que nous prouvons et avec l'intuition que nous trouvons. »

Henri Poincaré

Saint-François prêchant aux oiseaux, Giotto

I. Du bon usage des quantificateurs

1 — *Vocabulaire sur les fonctions*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. Écrire à l'aide des quantificateurs $\forall$ et $\exists$ les propositions suivantes :

1. f est la fonction nulle ;
2. f n'est pas constante ;
3. $f^2 = u$;
4. $f = u$ ou $f = -u$;
5. $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$;
6. f n'est pas nulle ;
7. f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$;
8. f est bornée.

Attention, aux numéros 3 et 4, u désigne la fonction constante égale à 1.

2 — *$\forall x \exists y$ Versus $\exists y \forall x$*

Soit $\mathscr{P}$ un prédicat à deux variables x et y. Déterminer laquelle des deux propriétés implique l'autre :

$$\forall x,\ \exists y,\ \mathscr{P}(x,y) \quad \text{et} \quad \exists y,\ \forall x,\ \mathscr{P}(x,y)$$

Donner un exemple de prédicat $\mathscr{P}$ sur $\mathbb{R}^2$ pour lequel l'implication réciproque est fausse.

3 — *Autour de l'implication* *f*

Soit $a \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer la proposition suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big(x + y > 2a \implies (x > a \text{ ou } y > a)\big)$.
2. Énoncer la négation de la proposition $\mathscr{P}$ suivante : $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big((x > a \text{ ou } y > a) \implies x + y > 2a\big)$.

   La propriété $\mathscr{P}$ est-elle vraie ?

4 — *Négations* *f*

Écrire la négation des formules suivantes :

1. $x = y = z$;
2. $c \geqslant 1 \implies ab \geqslant c^2$;
3. $\exists m \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ m$ divise n ;
4. $\forall a \in \mathbb{Q},\ \exists u \in \mathbb{N},\ 10^u a \in \mathbb{Z}$;
5. $\exists a > 0,\ \forall \varepsilon > 0,\ a \leqslant \varepsilon$;
6. $\exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ 2^n \geqslant n^2$.
7. $\forall n \in \mathbb{Z},\ \big(n \geqslant 0 \text{ ou } n \leqslant 0\big)$;
8. $\big(\forall n \in \mathbb{Z},\ n \geqslant 0\big)$ ou $\big(\forall n \in \mathbb{Z},\ n \leqslant 0\big)$;
9. $\forall x \in \mathbb{R},\ \big(\forall y \in \mathbb{R},\ xy = 0\big) \implies x = 0$;
10. $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ \big(xy = 0 \implies x = 0\big)$;
11. $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall m \in \mathbb{N},\ n + m$ est pair ;
12. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 \geqslant y$.

Parmi ces formules, trouver celles qui sont des énoncés et déterminer s'ils sont vrais.

5 — *Une équivalence f*

Soit $u := (u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\mathscr{P}_1(u) : \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant \varepsilon \quad \text{et} \quad \mathscr{P}_2(u) : \forall \varepsilon > 0,\ \exists n \in \mathbb{N},\ u_n < \varepsilon$$

Sont-elles équivalentes à $\mathscr{P}_3(u) : \exists n \in \mathbb{N},\ u_n \leqslant 0$?

6 — *Une équivalence f*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est strictement croissante si $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ x < y \implies f(x) < f(y)$. Montrer que f est strictement croissante si et seulement si

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2,\ a \leqslant b \iff f(a) \leqslant f(b)$$

7 — *Détermination d'une CNS ff*

Déterminer, en fonction de $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, une condition nécessaire et suffisante des propriétés suivantes :

1. $\forall x \in [0,1],\ ax + b \geqslant 0$; **2.** $\forall x \in [0,1],\ x^2 + ax + b \geqslant 0$.

Dans chacun des deux cas, représenter l'ensemble des points de coordonnées (a, b) pour lesquels la condition est vérifiée.

8 — *Zéros et familles de fonctions fff*

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Pour une partie $\mathscr{F}$ de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on définie les trois propriétés suivantes :

N : $\forall f \in \mathscr{F}, \exists x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$; **EN** : $\forall f \in \mathscr{F}, \exists! x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0$; **AN** : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall f \in \mathscr{F},\ f(x) = 0$.

1. Soit $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. L'implication **AN** $\implies$ **N** est-elle vraie ?
2. Étant donné trois réels strictement positifs $a, b, c \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la fonction

$$g_{a,b,c} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^{ax+b} - c \end{array}$$

   Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} := \left\{ g_{a,b,c}\,;\, (a, b, c) \in]0, +\infty[^3 \right\}$ vérifie la propriété **EN**.
3. **a.** Donner un exemple d'ensemble $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant **N** mais pas **EN**.

   b. Donner un exemple d'ensemble $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ vérifiant **EN** mais pas **AN**.

4. Pour tous $a \in \mathbb{R}$ et $\varphi \in \mathbb{R}$, on définit

$$h_{a,\phi} : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & a\cos(x+\phi) \end{array}$$

Montrer que l'ensemble $\mathscr{F} := \left\{h_{a,\phi}\,;\,(a,\phi) \in \mathbb{R}^2\right\}$ vérifie **N** mais pas **AN**.

5. Soit $\mathscr{F} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On suppose que :

- $\mathscr{F}$ vérifie **EN** ;
- $\forall f \in \mathscr{F}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geqslant 0$;
- $\mathscr{F}$ est stable par somme, c'est-à -dire que $\forall f, g \in \mathscr{F}, \quad f+g \in \mathscr{F}$.

Montrer que $\mathscr{F}$ vérifie **AN**.

6. Le résultat précédent reste-t-il vrai si l'on remplace **EN** par **N** ?

II. La disjonction de cas

9 — *Un zeste d'arithmétique*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $n+m$ soit impair et nm soit pair.

10 — *Une infinité d'inéquations f*

Déterminer les nombres réels x tels que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad x^{n+2} \leqslant x^{n+1} + x^n$.

11 — *Une équation à paramètres f*

Soit $a \in \mathbb{R}$. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+a} = x - a$ d'inconnue x.

III. Le raisonnement par récurrence

12 — *Raffinement de l'identité de Bezout f*

Montrer que tout entier supérieur ou égal à 8 peut s'écrire $3a+5b$ pour certains a, b dans $\mathbb{N}$.

13 — *Une majoration de $\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}$ ff*

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{1\times 3\times\ldots\times(2n-1)}{2\times 4\times\ldots\times 2n} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$ puis justifier le titre de cet exercice.

14 — *Somme et produit ff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [1, +\infty[^n$. Montrer que $x_1 + x_2 + \cdots + x_n \leqslant n - 1 + x_1 x_2 \cdots x_n$.

15 — *Histoire de point fixe fff*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, toute fonction croissante $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n]\!]$ admet un point fixe.

16 — *Technique de minoration a priori fff*

On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = a_1 = 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + \dfrac{a_n}{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a_n \leqslant n$.
2. Déterminer des réels λ et μ strictement positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\quad a_n \geqslant \lambda n + \mu$.

IV. Le raisonnement par l'absurde

17 — *Une preuve d'irrationnalité*

Prouver que le nombre $\dfrac{\ln 2}{\ln 3}$ est irrationnel.

18 — *Un peu d'arithmétique f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2+1}$ n'est pas un entier.

19 — *Descente infinie de Fermat ff*

Soit E l'équation $x^3 + 2y^3 = 4z^3$ d'inconnue $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

1. Soit (x, y, z) une solution de E.
   - **a.** Démontrer que x est pair puis que y et z le sont aussi.
   - **b.** Justifier que $\left(\frac{x}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z}{2}\right)$ est aussi une solution de E.
2. Démontrer que $(0, 0, 0)$ est la seule solution de E.

V. Pour apprendre à conjecturer et démontrer

20 — Une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \begin{cases} 2u_{\frac{n}{2}} + 1 & \text{si } n \text{ est pair} \\ u_n + 1 & \text{sinon} \end{cases}$

Déterminer la valeur de u_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

21 — Conjecture et démonstration

Étudier la monotonie de la suite définie par $u_0 = 0,\ u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = u_n^2 + u_{n+1}^2$.

22 — Conjecturer et démontrer par récurrence *f*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. On pose $b_0 = 1$ et $b_{n+1} = 1 - (a_0 b_0 + \cdots + a_n b_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Comparer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ b_n$ et $(1-a_0)\times\cdots\times(1-a_{n-1})$.

23 — Équation de Pell-Fermat *ff*

L'utilisation de la formule du binôme est interdite dans cet exercice.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers naturels a_n et b_n tels que
$$\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer $\left(3-2\sqrt{2}\right)^n$ en fonction de a_n et b_n.
3. L'ensemble des couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$ est-il infini ?

24 — Somme des inverses d'entiers *fff*

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$·

1. Écrire sous forme irréductible les rationnels H_n pour $n \in [\![1,5]\!]$. Que peut-on conjecturer ?
2. Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{H}_{2n} = \frac{1}{2}\mathrm{H}_n + \sum_{\ell=0}^{n-1} \frac{1}{2\ell+1}$·
3. Démontrer la conjecture émise au 1.

VI. La stratégie de l'analyse-synthèse

25 — *Une équation fonctionnelle élémentaire*

Déterminer les solutions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de l'équation suivante : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(x) + f(y) = 2f(x-y) + 1$.

26 — *Existe-t-il un logarithme sur $\mathbb{R}$?*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f(xy) = f(x) + f(y)$.

27 — *Une équation fonctionnelle f*

Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x+y) - f(x-y) = xy$.

28 — *CNS d'écriture comme somme et produit de deux réels ff*

Déterminer, en fonction des réels s et p, une condition nécessaire et suffisante de la propriété suivante :

$$\exists (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2,\ x_1 + x_2 = s \quad \text{et} \quad x_1 x_2 = p$$

29 — *Une équation fonctionnelle fff*

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $\mathscr{E}$ l'équations suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big(f(x)^2 + f(y)\big) = xf(x) + y$$

1. Soit f une solution de $\mathscr{E}$.

- **a.** Justifier l'existence d'un réel u tel que $f(u) = 0$ et en déduire que $f \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.
- **b.** Démontrer que
$$\forall (t, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big(t^2 + f(y)\big) = f\big(f(t)^2 + f(y)\big)$$
- **c.** En déduire que $\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = t$ ou $f(t) = -t$.
- **d.** Établir que $f = \mathrm{id}_{\mathrm{E}}$ ou $f = -\mathrm{id}_{\mathrm{E}}$.

2. Résoudre $\mathscr{E}$.

30 — *Une équation fonctionnelle fff*

Pour une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on note $\mathscr{E}$ l'équation suivante :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\big(x^2 + y\big) = f\big(f(x) - y\big) + 4f(x)y$$

1. Soit f une solution de $\mathscr{E}$. On pose $u := f(0)$.
   a. Vérifier que $\forall y \in \mathbb{R},\ f(y) = f(u-y) + 4uy$ et en déduire que $u = 0$.
   b. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(x^2 + f(x)\right) = 4f(x)^2$.
   c. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ 4f(x)^2 = 4x^2 f(x)$. Que peut-on en déduire sur $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$?
   d. On suppose dans cette question qu'il existe a et b dans $\mathbb{R}^*$ tels que $f(b) \neq 0$ et $f(a) = 0$.

      Justifier que $f\left(a^2 - b\right) = f(b)$ puis $2b = a^2$. En déduire une absurdité.
   e. Qu'en déduit-on pour f ?
2. Résoudre $\mathscr{E}$.

VII. Problème

31 — *Une équation fonctionnelle subtile fff*

Le but de ce problème est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\left(f(x)f(y)\right) + f(x+y) = f(xy) \quad (\mathbf{E})$$

Une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est dite injective si elle vérifie $\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2,\ h(\alpha) = h(\beta) \implies \alpha = \beta$.

Partie I – Propriétés générales des solutions de (E) *ff*

1. Déterminer les solutions affines de $(\mathbf{E})$.

   Dans toute la suite de cette partie, on considère une fonction f vérifiant l'équation fonctionnelle $(\mathbf{E})$.
2. On pose $z := f(0)^2$. Démontrer que $f(z) = 0$.
3. Montrer que si $f(0) = 0$, alors f est la fonction nulle, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = 0$.
4. Montrer que la fonction $-f$ vérifie également $(\mathbf{E})$.
5. Dans cette question, on suppose de plus que $f(0) > 0$.
   a. Montrer $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f(x) \neq 0$. INDICATION : S'aider d'un réel y tel que $x + y = xy$.
   b. En déduire $f(1) = 0$ et $f(0) = 1$.
   c. Montrer $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x+1) = f(x) - 1$ puis en déduire la valeur de $f(x+n)$ pour tout (x, n) dans $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$.
   d. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = 1$. Démontrer que $a = 0$.
   e. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R},\ f\left(f(x)\right) = 1 - f(x)$. En déduire $f\left(f\left(f(x)\right)\right)$ en fonction de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Partie II – L'injectivité qui règle tout *fff*

1. Dans cette question, on suppose que f est une solution injective de (**E**) vérifiant $f(0) > 0$.

Déduire de la question I.5.e. l'expression de $f(x)$ en fonction de x.

2. On pose $\mathscr{C} := \left\{(x+y, xy)\,;\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

- **a.** Soit $(s,p) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer une condition nécessaire et suffisante pour que $(s,p) \in \mathscr{C}$.
- **b.** Démontrer que $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \quad , \quad \exists n \in \mathbb{N} \quad , \quad (\alpha+n+1, \beta+n) \in \mathscr{C}$.
- **c.** En déduire que toute fonction f vérifiant (**E**) et $f(0) > 0$ est injective.
- **d.** En utilisant ce qui précède, déterminer complètement les fonctions f vérifiant (**E**).

VIII. Indications

1

Ne pas confondre les propositions $f \neq 0$ et f n'est pas nulle.

2

On pourra, par exemple, chercher un prédicat portant sur des inégalités.

3

La proposition $\mathscr{P}$ est fausse.

4

Seules les formules de 3 à 11 sont des énoncés et, parmi elles, seules 3,6,7 et 9 sont vraies.

5

Une des deux implications entre $\mathscr{P}_1(u)$ et $\mathscr{P}_2(u)$ ne nécessite aucune démonstration.

6

Procéder par double implication. Supposons f strictement croissante et fixons (a,b) dans $\mathbb{R}^2$. Il n'est pas difficile de vérifier que $a \leqslant b \implies f(a) \leqslant f(b)$ en faisant la disjonction de cas $a = b$ et $a < b$. Penser à la contraposition pour la réciproque.

7

Il faut dessiner des graphes afin de se forger une intuition.

8

Il faut bien comprendre que dans la formule **N**, la variable x est liée à f, ie dépend de x, alors que, dans la formule **AN**, la variable x est libre (il doit un exister un même x en lequel toutes les fonctions f de $\mathscr{F}$ s'annulent).

9

Il n'est pas difficile de construire « un m qui convient » si on connaît la parité de n.

10

On peut factoriser chacun de deux membres par x^n.

11

Résoudre l'équation de part et d'autre de a.

12

Trouver un entier non nul λ tel que si la propriété est vraie pour $n-\lambda$, alors elle est vraie pour n.

13

Raisonner par récurrence.

14

Afin d'y voir plus clair dans la preuve de l'hérédité, poser $p := x_1 \times \cdots \times x_n$.

15

Pour l'hérédité, effectuer une disjonction de cas selon que $f(n+1) = n+1$ ou $f(n+1) \neq n+1$.

16

Au 2., on pourra essayer de chercher λ et μ tels que la propriété soit héréditaire à partir d'un certain rang et correctement initialisée.

17

En supposant le quotient rationnel, en déduire une relation sans les logarithmes du type $2^{\bullet} = 3^{\square}$.

18

Si $p^2 - q^2 = 1$ avec $(p, q) \in \mathbb{N}^2$, alors $p+q$ divise 1.

19

S'il existait une solution non nulle de E, alors on pourrait construire une suite d'entiers naturels strictement décroissante.

20

Calculer les premier termes de la suite.

21

Calculer les premiers termes.

22

Examiner les premiers termes.

23

Conjecturer une formule au 2. après avoir examiné les « petites valeurs » de n. Attention à bien justifier l'infinité demandée au 3.

24

On conjecture que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est le quotient d'un entier impair sur un entier pair.

25

Il n'y a aucune solution.

26

On trouve une seule solution par analyse synthèse.

27

Procéder par analyse synthèse. Essayer de calculer $f(x)$ en fonction de x et $f(0)$ dans l'analyse.

28

Effectuer une analyse synthèse. Si $x_1 + x_2 = s$ et $x_1 x_2 = p$, alors il n'est pas difficile de trouver un trinôme du second degré dont x_1 et x_2 sont les racines.

29

La conclusion du 1.c. est que $f(t) = \varepsilon_t t$ avec $\varepsilon_t \in \{-1, 1\}$. L'objectif de la question suivante est de démontrer qu'en fait ε_t ne dépend pas de t.

30

Au 1.c., on arrive à la conclusion que, pour tout réel x, on a $f(x) = x^2$ ou $f(x) = 0$. Mais attention, il ne faut confondre cette proposition avec

$$\left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^2\right) \quad \text{ou} \quad \left(\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = 0\right)$$

31

Au II.2.a., la CNS est $s^2 \geqslant 4p$. Au II.2.b., on pourra s'intéresser au comportement en $+\infty$ de $(\alpha + n + 1)^2 - 4(\beta + n)$. Le II.2.c. est très délicat : partir de $f(\alpha) = f(\beta)$, considérer n tel que $(\alpha + n + 1, \beta + n) \in \mathscr{C}$ puis (x, y) tel que $(\alpha + n + 1, \beta + n) = (x + y, xy)$ et démontrer que $f\left(f(x)f(y)\right) = 1$.