

En essayant continuellement, on finit par réussir. Donc plus ça rate, plus on a de chances que ça marche.

Proverbe Shaddock



12 Représentation matricielle des applications linéaires	1
I Calcul matriciel.....	2
II Changements de base, équivalence et similitude	3
III Image, noyau et rang	4
IV Quelques calculs de dimension	6
V Matrices et applications linéaires	7
VI Problèmes	9
VII Indications	13

I. Calcul matriciel

1 ? _____ Un calcul de puissances _____

Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = A^2 + 2A$. Déterminer A^n en fonction de A et A^2 , pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2 ? _____ Bloc party *f* _____

Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ et $M \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ définie par $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & A+B \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de M en fonction de ceux de A et B .
2. En cas d'inversibilité, exprimer l'inverse de M en fonction de A et B .

3 ? _____ Inversibilité d'une matrice triangulaire par blocs *f* _____

Soit $A \in GL_p(\mathbb{K})$, $B \in GL_q(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, et $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{K})$.
Montrer que M est inversible et déterminer M^{-1} .

4 ? _____ Produit tensoriel de matrices *f* _____

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, $B \in \mathcal{M}_m(\mathbb{C})$ et $A \otimes B$ la matrice blocs définie par :

$$A \otimes B := \begin{pmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1}B & \dots & a_{n,n}B \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nm}(\mathbb{C})$$

1. Calculer $(A \otimes B) \times (A' \otimes B')$ en fonction de AA' et BB' pour A et A' dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, et B et B' dans $\mathcal{M}_m(\mathbb{C})$.
2. On suppose A et B inversibles. Montrer que $A \otimes B$ est inversible.
3. On suppose A et B diagonalisables (i.e. semblables à des matrices diagonales). Montrer que $A \otimes B$ est diagonalisable.

5 ? _____ Une relation *f* _____

Soit $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$ tel que $\forall k \in \{1, 2, 3\}$, $A^k = B + kC$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $A^k = B + kC$.

6 ? _____ Inversibilité de la matrice identité bordée *ff* _____

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $L \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$, $C \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $A = \begin{pmatrix} \alpha & L \\ C & I_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Montrer que A est inversible *si et seulement si* $\alpha - LC \neq 0$. Déterminer A^{-1} dans ce cas.

7 ?  _____ *The Schur's complement ff* _____

Suppose A, B, C, D are respectively $p \times p, p \times q, q \times p$ and $q \times q$ matrices, and D is invertible. Let

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

Then the *Schur complement* of the block D of the matrix M is the $p \times p$ matrix $A - BD^{-1}C$.
Prove that $\text{rg}(M) = \text{rg}(D) + \text{rg}(A - BD^{-1}C)$.

II. Changements de base, équivalence et similitude

8 ?  _____ *Changements de base par homothéties sur les vecteurs* _____

Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ de matrice A dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{K}^n .

1. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on note $\mathcal{B}_\lambda = (\lambda e_1, \dots, \lambda e_n)$. Exprimer $\text{mat}_{\mathcal{B}_\lambda}(f)$ en fonction de A .
2. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}^*$, on note $\mathcal{B}'_\lambda = (e_1, \lambda e_2, \dots, \lambda^{n-1} e_n)$. Exprimer $\text{mat}_{\mathcal{B}'_\lambda}(f)$ en fonction des coefficients $A_{i,j}$ de A et de λ .

9 ?  _____ *Permutation de blocs* _____

1. Soit $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ et $\mathcal{B} := (e_1, e_2)$ une base de \mathbb{R}^2 . On pose $M := \text{mat}_{\mathcal{B}}(\phi) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$. Démontrer que $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} D & C \\ B & A \end{pmatrix}$ sont semblables.

10 ?  _____ *Une diagonalisation* _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^2 = A$ et $A \neq 0$. Montrer que $\exists r \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que A soit semblable à $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

11 ?  _____ *Endomorphismes de matrice I_n f* _____

Soit E un espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer une cns sur f d'existence de :

1. une base \mathcal{B} de E telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = I_n$;
2. deux bases \mathcal{B} et \mathcal{C} de E telles que $\text{mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(f) = I_n$.

12 ?  _____ *Un changement de base f* _____

Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de \mathbb{R}^n et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \dots & \beta \\ \beta & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \beta \\ \beta & \dots & \beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Posons $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e'_j = \sum_{k=1}^j e_k$. Montrer que $\mathcal{B}' := (e'_1, \dots, e'_n)$ une base de \mathbb{R}^n et expliciter $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(f)$.

13 ?Une trigonalisation f

On pose $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $T := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N := \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que T est semblable à N .
2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} .
3. En déduire que M est semblable à M^{-1} .

14 ?Réduction des matrices de rang un f

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer que A est semblable à une matrice B dont les $n-1$ premières colonnes sont nulles.

15 ?Une symétrie f

Montrer que les matrices $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

16 ?Deux matrices semblables f

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose $A := \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $B := \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$.

Démontrer que A et B sont semblables.

17 ?Matrices de trace nulle ff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ tel que $f \notin \text{Vect}(\text{id}_{\mathbb{K}^n})$ et $\text{tr } f = 0$. Démontrer l'existence d'une base \mathcal{B} telle que

$$\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & L \\ C & B \end{pmatrix} \quad \text{avec } L \in \mathcal{M}_{1,n-1}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K}) \text{ telle que } \text{tr } B = 0 \quad \text{et } C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$$

2. Démontrer que toute matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de trace nulle est semblable à une matrice de diagonale nulle.

III. Image, noyau et rang

18 ?Matrices de rang 1 f

Soit A une matrice de taille $n \geq 2$ à coefficients réels de rang 1.

1. Montrer qu'il existe deux vecteurs colonnes U et V tels que $M = UV^T$.

2. Exprimer les puissances entières de M en fonction de M et de $\text{tr } M$.
3. A quelle condition une matrice de rang 1 est-elle une matrice de projection ?
4. Quelles sont les matrices de rang 1 qui sont nilpotentes ?

19 ?*Variations sur les symétries ff*Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. On suppose que $A^2 = I_n$. Montrer que $\text{rg}(A - I_n) + \text{rg}(A + I_n) = n$ et $\text{rg}(A + I_n) - \text{rg}(A - I_n) = \text{tr } A$.
2. Dans le cas général (i.e. sans l'hypothèse $A^2 = I_n$) montrer que $\text{rg}(A - I_n) + \text{rg}(A + I_n) \geq n$ et qu'il y a égalité *si et seulement si* $A^2 = I_n$.

20 ?*Une infinité d'équations ff*Soit A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}), AXB = 0$. Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.**21** ?*Centrale MP-2011 ff*Déterminer les matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $\exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \setminus \{0\}, AB = BA = 0$.**22** ?*XPC-2015 ff*Déterminer une cns pour que $\forall B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), AB = 0 \implies BA = 0$?**23** ?*Matrices telles que $\text{rg } A = \text{rg } A^2$ ff*Soit $n \in \mathbb{N}^*, r \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tels que $\text{rg } A^2 = \text{rg } A = r$.

1. Soit \mathcal{B} la base canonique de \mathbb{R}^n et $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = A$. Établir que $\mathbb{R}^n = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$.
2. En déduire l'existence de $P \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \text{GL}_r(\mathbb{R})$ tels que $A = P \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} P^{-1}$.

24 ?*Matrices à diagonale strictement dominante : lemme d'Hadamard fff*Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, |a_{i,i}| > \sum_{j \neq i} |a_{i,j}|$. Montrer que A est inversible.

IV. Quelques calculs de dimension

25 ?

Une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *f*

Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, on pose $M(a, b, c) := \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ c & 0 & a \end{pmatrix}$. Soit $E := \{M(a, b, c); (a, b, c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Calculer $\dim E$.
2. Montrer que E est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. Soit $M(a, b, c)$ un élément de E . Déterminer, suivant les valeurs des paramètres a, b et $c \in \mathbb{R}$ son rang.
4. Calculer (lorsque cela est possible) l'inverse $M(a, b, c)^{-1}$ de $M(a, b, c)$.
5. Donner une base de E formée de matrices inversibles et une autre formée de matrices de rang 1.

26 ?

Stabilités *f*

Soit E un \mathbb{K} -ev de dimension finie et F, G deux sev supplémentaires dans E . On note

$$\mathcal{S} := \{u \in \mathcal{L}(E); u\langle F \rangle \subset F \text{ et } u\langle G \rangle \subset G\}$$

Démontrer que \mathcal{S} est un sev de $\mathcal{L}(E)$ et déterminer sa dimension. en fonction de celles de F et G .

27 ?

XPC-2016 *ff*

Soit E et F deux \mathbb{K} -ev de dimensions n et p . Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$ de rang r .

Montrer que $\mathcal{V} := \{g \in \mathcal{L}(F, E); f \circ g \circ f = 0\}$ est un sous-espace de $\mathcal{L}(F, E)$ et déterminer sa dimension.

28 ?

Endomorphismes vérifiant $f^2 = -id_E$ *fff*

Soit E un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

⇒ On note $\mathcal{P}_E := \{f \in \mathcal{L}(E); f^2 = -id_E\}$.

⇒ Pour des matrices A_1, \dots, A_m de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on note $\text{Diag}(A_1, \dots, A_m)$ la matrice de $\mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ obtenue en mettant en diagonale les blocs A_1, \dots, A_m et en complétant par des zéros.

⇒ On note $D := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On suppose que \mathcal{P}_E est non vide et on considère $f \in \mathcal{P}$. Montrer l'existence de $m \in \mathbb{N}^*$ et d'une base \mathcal{B} de E tels que $n = 2m$ et $\text{mat}_{\mathcal{B}}(f) = \text{Diag}(D, \dots, D) \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$.
2. Établir que $\mathcal{P}_E \neq \emptyset \iff n$ est pair.
3. Pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$, on note $\mathcal{C}(A) = \{M \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R}); AM = MA\}$.
 - a. Démontrer que $\mathcal{C}(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_k(\mathbb{R})$ pour tout $A \in \mathcal{M}_k(\mathbb{R})$.

- b. Donner une base et la dimension de $\mathcal{C}(D)$ pour $D = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
- c. En déduire une base et la dimension de $\mathcal{C}(A)$ pour $A = \text{Diag}(D, \dots, D) \in \mathcal{M}_{2m}(\mathbb{R})$ où $m \in \mathbb{N}^*$. On pourra effectuer des calculs par blocs.
- d. On considère un \mathbb{K} -ev E de dimension $2m$ et $f \in \mathcal{P}_E$ où $m \in \mathbb{N}^*$. On pose

$$\mathcal{C}(f) = \{g \in \mathcal{L}(E); g \circ f = f \circ g\}$$

On montre comme au 3.a. que $\mathcal{C}(f)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$ (il n'est pas demandé de le faire). Calculer $\dim \mathcal{C}(f)$.

V. Matrices et applications linéaires

29  

Un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$

Soit ϕ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $P \mapsto (X^2 + 2)P'' + (X + 1)P' + P$.

- Vérifier que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer la matrice M de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
- Déterminer $\text{Ker}(\phi - 5\text{id}_{\mathbb{R}_2[X]})$. Calculer $\phi(1)$ et $\phi(X + 1)$.
- En déduire une base de $\mathbb{R}_2[X]$ dans laquelle la matrice de ϕ est diagonale.

30  

Un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$

On considère l'application $\phi : \mathbb{R}_3[X] \rightarrow \mathbb{R}[X]$ définie par $P \mapsto P(X + 1) + P(X)$.

- Montrer que ϕ induit un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$.
- On note \mathcal{B} la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$. Déterminer la matrice de ϕ dans la base \mathcal{B} . On notera M cette matrice.
- Montrer que M est inversible et calculer M^{-1} .
- En déduire que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$, et donner la matrice de ϕ^{-1} dans la base \mathcal{B} .
- En déduire que l'équation $P(X + 1) + P(X) = 4X^3 - 2X^2 + X - 1$ admet une unique solution $P \in \mathbb{R}_3[X]$, et donner cette solution.

31  

Un endomorphisme nilpotent d'indice maximal f

Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec $\dim E = n$. On suppose que $f^n = 0$ et $f^{n-1} \neq 0$.

- Montrer qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ tel que la famille $(x_0, f(x_0), \dots, f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E .
- Déterminer la matrice représentant f dans cette base.

3. Calculer $\text{rg } f$.

32 ? 

Autour de la trace f

Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ et $f: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), X \mapsto X + \text{tr}(AX)B$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer des conditions nécessaires et suffisantes sur A et B pour que f soit une symétrie.
3. Déterminer les caractéristiques de f dans ce cas.

33 ? 

Variations sur la nilpotence f

1. Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ nilpotente. Justifier que $M^3 = 0$.
2. Existe-t-il une matrice $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$?

34 ? 

Une réduction ff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, V un \mathbb{K} -ev de dimension $3n$ et $f \in \mathcal{L}(V)$, de rang $2n$ et tel que $f^3 = 0$. Montrer qu'il existe une base de V dans laquelle la matrice de f est

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ I_n & 0 & 0 \\ 0 & I_n & 0 \end{pmatrix}$$

35 ? 

Le produit par une matrice ff

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\tau_A: \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\tau_A(X) = AX$. Montrer l'existence d'une base \mathcal{B} de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\text{mat}_{\tau_A}(\mathcal{B}) = \begin{bmatrix} A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & A \end{bmatrix}$$

36 ? 

Endomorphisme de carré nul ff

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang r tel que $f \circ f = 0$.

Montrer qu'il existe une base de E dans laquelle l'endomorphisme admet pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & I_r \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

VI. Problèmes

37

Dérivations de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *ff*

On fixe un entier naturel n non nul. Dans tout le problème, \mathbb{K} désigne le corps \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

⇒ Pour toute matrice M à coefficients dans \mathbb{K} , on notera $M_{i,j}$ ses coefficients.

⇒ Pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, on note \mathcal{B}_m la base canonique du \mathbb{K} -espace vectoriel \mathbb{K}^m .

⇒ Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note $\mathcal{C}(M) := \{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) ; NM = MN\}$

⇒ On note $(E_{i,j})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et, pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, $\delta_{i,j} := \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$

⇒ On appelle dérivation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tout endomorphisme δ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant

$$\forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \delta(XY) = X\delta(Y) + \delta(X)Y$$

⇒ Pour $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on note δ_M l'application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans lui-même définie par $\delta_M(X) = MX - XM$.

L'objectif de ce sujet est de décrire toutes les dérivations de l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Partie I – Quatre lemmes

L'objectif de cette partie est de démontrer quatre lemmes qui seront utilisés dans les sections **II** et **III**.

1. Montrer que, pour tout $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, δ_U est une dérivation de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\mathcal{C}(A) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Démontrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $A = \lambda I_n$.
3. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension $m \in \mathbb{N}^*$ et π un projecteur de E . Établir que $\text{rg } \pi = \text{tr } \pi$.
4. Soit f et g deux endomorphismes d'un \mathbb{K} -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que

$$\text{rg}(f \circ g) \leq \min(\text{rg } f, \text{rg } g)$$

Partie II – Morphismes d'algèbres de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$

Dans cette partie, on fixe une application $\phi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ vérifiant :

$$\phi(I_n) = I_{2n}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall (X, Y) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2, \quad \phi(X + \lambda Y) = \phi(X) + \lambda \phi(Y) \quad \text{et} \quad \phi(XY) = \phi(X)\phi(Y)$$

Pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$, on note $\pi_{i,j}$ l'unique endomorphisme de \mathbb{K}^{2n} tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}_{2n}}(\pi_{i,j}) = \phi(E_{i,j})$.

1. **a.** Soit $(i, j, k, \ell) \in \llbracket 1, n \rrbracket^4$. Vérifier que $\pi_{i,j} \circ \pi_{k,\ell} = \delta_{j,k} \pi_{i,\ell}$.
- b.** Soit $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$. Montrer que $\text{rg } \pi_{i,i} = \text{rg } \pi_{j,j}$.
- c.** Établir que $\sum_{i=1}^n \pi_{i,i} = \text{id}_{\mathbb{K}^{2n}}$.

d. Montrer que, pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\pi_{i,i}$ est un projecteur de \mathbb{K}^{2n} puis déterminer son rang.

2. On fixe une base (u, v) de $\text{Im}(\pi_{1,1})$ et on pose

$$\mathcal{B} := (\pi_{1,1}(u), \pi_{2,1}(u), \dots, \pi_{n,1}(u), \pi_{1,1}(v), \pi_{2,1}(v), \dots, \pi_{n,1}(v))$$

On fixe $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et on note f l'unique endomorphisme de \mathbb{K}^{2n} tel que $\text{mat}_{\mathcal{B}_{2n}}(f) = \phi(M)$.

a. Montrer que \mathcal{B} est une base de \mathbb{K}^{2n} .

b. Exprimer f en fonction des $\pi_{i,j}$, où $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$.

3. En déduire l'existence de $P \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), P^{-1}\phi(M)P = \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right)$ (matrice par blocs).

Partie III – Description des dérivations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

Soit $\delta: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une dérivation. On note $\alpha: \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{K})$ l'application définie par

$$\alpha(M) := \left(\begin{array}{c|c} M & \delta(M) \\ \hline 0 & M \end{array} \right)$$

1. Justifier l'existence de $Q \in \text{GL}_{2n}(\mathbb{K})$ telle que $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \alpha(M) = Q \left(\begin{array}{c|c} M & 0 \\ \hline 0 & M \end{array} \right) Q^{-1}$.

2. On considère $(A, B, C, D) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^4$ tel que $Q = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array} \right)$.

a. Établir que, $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, on a $CM = MC$, $DM = MD$, $\delta(M)C = AM - MA$ et $\delta(M)D = BM - MB$.

b. En déduire l'existence de $U \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\delta = \delta_U$.

3. On note \mathcal{D}_n l'ensemble des dérivations de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

a. Justifier que \mathcal{D}_n est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))$.

b. Déterminer la dimension de \mathcal{D}_n .

38 ?

Matrices nilpotentes et unipotentes *fff*

Dans ce sujet, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$. On notera :

$\Rightarrow \mathcal{T}_n^+$ l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, i.e. $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall i > j, M_{i,j} = 0\}$;

$\Rightarrow \mathcal{T}_n^{++}$ l'ensemble des matrices strictement supérieures, i.e. $\{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \forall i \geq j, M_{i,j} = 0\}$;

$\Rightarrow \mathcal{N}$ l'ensemble des matrices nilpotentes de taille n , i.e. $\{N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}); \exists p \in \mathbb{N}, N^p = 0\}$;

\Rightarrow Pour $N \in \mathcal{N}$, le plus petit entier naturel p tel que $N^p = 0$ est appelé indice de nilpotence de N .

⇒ \mathcal{U} l'ensemble des matrices unipotentes, i.e. $\{I_n + N; N \in \mathcal{N}\}$.

⇒ Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, ϕ_A désigne l'endomorphisme canoniquement associé à A .

Structure du sujet

La première partie regroupe quelques lemmes qui seront utilisés dans la suite du sujet.

Dans la partie II, on étudie l'exponentielle d'une matrice nilpotente.

La troisième et dernière partie du sujet est consacrée à la trigonalisation des matrices nilpotentes. Les parties II et III sont indépendantes.

Partie I – Généralités sur les matrices nilpotentes

On supposera dans cette partie que $n \geq 2$.

1. Donner sans justification un exemple de matrice nilpotente d'indice n .
2. Démontrer que $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{N}$. A-t-on $\mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R}) = \mathcal{N}$?
3. Soit $N \in \mathcal{N}$ d'indice de nilpotence p . Justifier que $p \leq n$.

INDICATION : Considérer une famille de la forme $(X_0, NX_0, \dots, N^{p-1}X_0)$ avec X_0 bien choisi dans \mathbb{R}^n .

4. Soit $(A, B) \in \mathcal{N}^2$ telles que $AB = BA$.
 - a. Démontrer que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $(A + \lambda B)^n = 0$.
 - b. Établir que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $A^k B^{n-k} = 0$ et puis $A^p B^q = 0$ pour tout $(p, q) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p + q \geq n$.

Partie II – Exponentielle et puissances

Pour tout $N \in \mathcal{N}$, on pose

$$\exp(N) := I_n + N + \frac{N^2}{2} + \dots + \frac{N^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

1. Justifier que, pour tout $N \in \mathcal{N}$, $\exp(N) \in \mathcal{U}$.
2. On pose

$$P := \sum_{k=0}^{n-1} \frac{X^k}{k!} \quad \text{et} \quad Q := \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{X^k}{k}$$

- a. Vérifier que $P(Q(x)) = 1 + x + o(x^{n-1})$ au voisinage de 0.
- b. En déduire l'existence de $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(Q(X)) = 1 + X + X^n R(X)$.
- c. Simplifier $P(Q(N))$ pour tout $N \in \mathcal{N}$.
- d. En vous inspirant de ce qui précède, simplifier $Q(P(N) - I_n)$ pour tout $N \in \mathcal{N}$.
3. En déduire que \exp réalise une bijection de \mathcal{N} sur \mathcal{U} .
4. Soit $(A, B) \in \mathcal{N}^2$ telles que $AB = BA$. Établir que $\exp(A + B) = \exp(A) \exp(B)$

5. Soit $m \in \mathbb{N}^*$. Démontrer que l'application $A \mapsto A^m$ réalise une bijection de \mathcal{U} sur \mathcal{U} .

Partie III – Trigonalisation des matrices nilpotentes

On suppose dans cette partie que $n \geq 2$ et l'on fixe $N \in \mathcal{N}$.

1. Démontrer l'existence d'une base $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{R}^n telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}}(\phi_N)$ ait sa dernière ligne nulle.

INDICATION : On pourra commencer par justifier que $\text{rg } \phi_N < n$.

2. En déduire l'existence d'une base $\mathcal{B}' := (e'_1, \dots, e'_n)$ de \mathbb{R}^n telle que $\text{mat}_{\mathcal{B}'}(\phi_N) \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})$.

INDICATION : Raisonner par récurrence sur n en utilisant des matrices par blocs. On pourra remarquer que $F := \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1})$ est stable par ϕ_N (avec les notations de la question précédente).

3. Établir que $\mathcal{N} = \{P^{-1}AP; A \in \mathcal{T}_n^{++}(\mathbb{R})\}$.

4. En déduire une nouvelle démonstration du I.3.

VII. Indications

1 ↷ _____

Utiliser le polynôme annulateur $X^3 - X^2 - 2X$.

2 ↷ _____

Pivotez par blocs.

3 ↷ _____

Deux pistes : effectuer des opérations de pivot par blocs ou résoudre $MX = Y$.

4 ↷ _____

On trouve $(AA') \otimes (BB')$ au 1.

5 ↷ _____

Procédez par récurrence.

6 ↷ _____

Utiliser le déterminant ou bien des calculs par blocs.

7 ↷ _____

Effectuer des opérations par blocs.

8 ↷ _____

On trouve A au 1.

9 ↷ _____

Permuter les vecteurs de base.

10 ↷ _____

On reconnaît uen matrice de projection;

11 ↷ _____

La seconde cns est f est un isomorphisme.

12 ↷ _____

Formule de changement de base ou définition.

13 ↷ _____

Construire la nouvelle base à partir des vecteurs canoniques e_1, e_2 et e_3 .

14 ↷ _____

Une analyse permet de comprendre quel type de base choisir.

15 ↷ _____

On a $A^2 = I_2$.

16 ↷ _____

Inspirez-vous de l'exercice 8.

17 ↷ _____

Comme f n'est pas une homothétie, il est classique de démontrer l'existence de $x \in \mathbb{K}^n$ tel que $(x, f(x))$ soit libre (cf. ALG 9).

18 ↷ _____

Pour le 1. : U est un vecteur engendrant $\text{Im } M$.

19 ↷ _____

Au 2., remarquer que la somme $\text{Ker}(A - I_n) + \text{Ker}(A + I_n)$ est directe.

20 ↷ _____

Raisonner par contraposition et écrire A et B sous la forme $PJ_r Q$ et $P'J_{r'} Q'$.

21 ↷ _____

On trouve les matrices non inversibles. Travailler de préférence avec les endomorphismes canoniquement associés à A et B .

22 ↷ _____

Une cns est $A = 0$ ou A inversible. Cette condition est clairement suffisante. Réciproque par contraposition : si $A \neq 0$ et A non inversible, alors il existe B telle que $AB = 0$ et $BA \neq 0$ (considérer les colonnes de B).

23 ↷ _____

On pourra (par exemple) appliquer la formule du rang à $f|_{\text{Im } f}$.

24 ↷ _____

Raisonner par l'absurde en supposant l'existence de $X \neq 0$ (de composantes X_i) tel que $AX = 0$: considérer i tel que $|X_i|$ soit maximale et en déduire une absurdité.

25 ↷ _____

Écrire E sous la forme $E = \text{Vect}(\dots)$.

26 ↷ _____

Que dire de la matrice de $f \in \mathcal{S}$ dans une base de E adaptée à la décomposition $E = F \oplus G$?

27 ↷ _____

Vérifier que $g \in \mathcal{V} \iff g\langle \text{Im } f \rangle \subset \text{Ker } f$.

28 ↷ _____

Au 1., on pourra effectuer une analyse afin de mieux cerner la forme de la base à construire.

29 ↷ _____

Attention à ne pas confondre les vecteurs (ce sont ici des polynômes) et leurs coordonnées (matrices colonnes).

30 ↷ _____

L'unique solution recherchée au 5. est $2X^3 - 4X^2 + \frac{3}{2}X - \frac{1}{4}$.

31 ↷ _____

Choisir $x_0 \in E$ tel que $f^{n-1}(x_0) \neq 0$.

32 ↷ _____

L'application f est une symétrie *si et seulement si* l'une des trois conditions suivantes est réalisée : $B = 0$, $\text{tr}(AB) = -2$, $A = 0$.

33 ↷ _____

Que savez-vous de l'indice de nilpotence par rapport à la taille de la matrice ?

34 ↷ _____

Une petite analyse s'impose afin de « cerner » la base recherchée.

35 ↷ _____

Considérer la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qu'il faudra ordonner correctement...

36 ↷ _____

Commencer par une analyse afin de mieux cerner le type de base recherchée.

37 ↻ _____

On pourra utiliser le I.3. au II.1.d.

38 ↻ _____

Au II., il faut utiliser les $DL_n(0)$ de l'exponentielle et de $x \mapsto \ln(1+x)$.