ALG 3 | Nombres complexes

Étude et applications des nombres complexes, équations algébriques (second degré et racines n-èmes de l'unité). Les nombres complexes sont de puissants intermédiaires de calculs en trigonométrie, en géométrie et sont incontournables pour l'étude des oscillations en physique (électronique et mécanique).

Deux hommes contemplant la lune, *Caspar David Friedrich*

I. Calculs

1 — *Forme trigonométrique*

Écrire $z := \sqrt{2+\sqrt{2}} + i\sqrt{2-\sqrt{2}}$ sous forme trigonométrique. INDICATION : Que vaut z^2 ?

2 — *Relation sur les modules*

Démontrer que $\forall (a,b) \in (\mathbb{C}^*)^2,\ \left|\dfrac{a}{|a|^2} - \dfrac{b}{|b|^2}\right| = \dfrac{|a-b|}{|ab|}$.

3 — *Une partie imaginaire*

Soit $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ tel que $ad - bc > 0$ et $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $cz + d \neq 0$.

Démontrer que $\operatorname{Im} z > 0 \implies \operatorname{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) > 0$.

4 — *Paramétrage de $\mathbb{U}$ f*

On note $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1.

1. Soit $z \in \mathbb{U} \setminus \{1\}$. Démontrer que $\dfrac{z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur.
2. Vérifier que, $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i} \in \mathbb{U}$.
3. Réciproquement, déterminer les éléments de $\mathbb{U}$ pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{1+\lambda i}{1-\lambda i}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Soit $z \in \mathbb{C}$. Démontrer que, $\forall u \in \mathbb{U} \setminus \{1\},\ \dfrac{z - u\overline{z}}{1-u} \in \mathbb{R}$.

5 — *Modules f*

Déterminer les nombres complexes z tels que z, $\dfrac{1}{z}$ et $1+z$ aient le même module.

6 — *Petits calculs f*

Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^2$.

1. Développer $(a+i)(b+i)(c+i)$.
2. On suppose que $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$ et $ab + bc + ca = 1$.

   Démontrer que $\left(1+a^2\right)\left(1+b^2\right)\left(1+c^2\right)$ est le carré d'un nombre entier.

7 — *Identité du parallélogramme et application ff*

Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$. On considère $\mu \in \mathbb{C}$ tel que $\mu^2 = ab$ et on pose $m := \dfrac{a+b}{2}\cdot$

1. Soit $(u,v) \in \mathbb{C}^2$. Établir que $\forall (u,v) \in \mathbb{C}^2,\ |u+v|^2 + |u-v|^2 = 2\left(|u|^2 + |v|^2\right)$.
2. En déduire que $|a| + |b| = |m-\mu| + |m+\mu|$.
3. Justifier le titre de cet exercice.

8 — *Une question d'irrationnalité ff*

Soit $\alpha \in [0,1]$ tel que $\cos(\alpha\pi) = \dfrac{1}{3}\cdot$ Le but de cet exercice est de prouver que α est irrationnel.

1. Donner la forme algébrique de $e^{i\pi\alpha}$.
2. Montrer que $\alpha \in \mathbb{Q}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\left(1+2i\sqrt{2}\right)^n = 3^n$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des entiers a_n et b_n tels que $\left(1+2i\sqrt{2}\right)^n = a_n + ib_n\sqrt{2}$, et tels que $a_n - b_n$ ne soit pas divisible par 3. INDICATION : Raisonner par récurrence.
4. Conclure.

9 — *Un peu de finesse fff*

Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Démontrer que $\left(\forall u \in \mathbb{U},\ \dfrac{\lambda}{2u} + \dfrac{u}{2\lambda} \in \mathbb{R}\right)$ *si et seulement si* $\lambda \in \mathbb{U}$.

II. Inégalités

10 — *Inégalités f*

Prouver que $\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ 1 \leqslant |z+z'| + |1+z| + |z'|$ et $|z+z'|^2 \leqslant \left(1+|z|^2\right)\left(1+|z'|^2\right)$.

11 — *Partie réelle d'une fraction rationnelle f*

Soit z un nombre complexe tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. Établir que $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{1-z}\right) \geqslant \dfrac{1}{2}\cdot$

12 — *Variations sur le module f*

Soit a, b, c, d dans $\mathbb{U}$. Montrer que $|ab - cd| \leqslant |a-c| + |d-b|$.

13 — *Variations triangulaires ff*

L'objectif est d'établir l'inégalité $\forall\, a, b \in \mathbb{C},\ |a|+|b| \leqslant |a+b|+|a-b|$ et d'étudier les cas d'égalité.

1. Proposer une démonstration fondée sur l'inégalité triangulaire et son cas d'égalité.
2. Donner une autre démonstration en commençant par montrer que

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \big(|a+b|+|a-b|\big)^2 = \big(|a|+|b|\big)^2 + \big(|a|-|b|\big)^2 + 2\left|a^2-b^2\right|$$

14 — *L'inégalité triangulaire généralisée fff*

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux.

1. Prouver que, pour tout $(z_1,\dots,z_n) \in \mathbb{C}^n,\ |z_1+\cdots+z_n| \leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.
2. Montrer que, pour tous z_1 et z_2 dans $\mathbb{C}^*$, $|z_1+z_2| = |z_1|+|z_2| \iff \arg(z_1) = \arg(z_2)$.
3. Montrer que $\forall (z_1,\dots,z_n) \in (\mathbb{C}^*)^n,\ |z_1+\cdots+z_n| = |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| \iff \arg(z_1) = \cdots = \arg(z_n)$.

III. Équations atypiques

15 — *Equations*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes

1. $2z+3\overline{z} = 1$;
2. $z^2 = \bar{z}$;
3. $z^2 = -\overline{z}^2$;
4. $z^4 = \dfrac{1}{\overline{z}}$.

16 — *Une équation à deux inconnues f*

Déterminer l'ensemble des couples $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ tels que $|a+b| = |a| = |b|$.

17 — *Lieux géométriques f*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $\mathrm{Re}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0$, $\mathrm{Im}\left(\dfrac{z-1}{z-i}\right) = 0$ et $\mathrm{Re}\left(z^3\right) = \mathrm{Im}\left(z^3\right)$.

18 — *Équation en z et $\overline{z}$ ff*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.

IV. Équations algébriques

19 — *Un système f*

Déterminer les couples $(u, v) \in (\mathbb{C}^*)^2$ tels que $u + v = 2$ et $\dfrac{1}{u} + \dfrac{1}{v} = 1$.

20 — *Classique f*

Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $\left(z^2+1\right)^2 + \left(z^2 - z - 1\right)^2 = 0$.

21 — *Avis de recherche f*

Comment faut-il choisir $m \in \mathbb{C}$ pour que l'équation $z^2 - (2 + im)z - (1 + im) = 0$ admette deux racines imaginaires pures et conjuguées ?

22 — *Quatre équations f*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $(z+i)^3 + iz^3 = 0$;
2. $z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$ en posant $Z = z + z^{-1}$;
3. $z^4 + 2 - i\sqrt{12} = 0$.

23 — *Autour de l'exponentielle ff*

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $e^z = -1$ puis $e^z + e^{-z} = 2i$.

24 — *Un peu de géométrie ff*

Soit $\alpha \in]-\pi, \pi[$, on considère l'équation $z^2 - 2^{\alpha+1}\cos(\alpha)z + 2^{2\alpha} = 0$.

1. Résoudre cette équation, on notera z_1 et z_2 les solutions.
2. Soit A et B les points d'affixe z_1 et z_2 et O le point d'affixe 0, déterminer α pour que le triangle OAB soit équilatéral.

25 — *D'après X-MP 2007 fff*

Soit $\mathscr{E}_{p,q} : z^2 + pz + q = 0$ avec $(p, q) \in \mathbb{C}^2$.

1. Montrer que

   les solutions de $\mathscr{E}_{p,q}$ sont non nulles et de même argument modulo 2π *si et seulement si* $\dfrac{p^2}{4q} \in [1, +\infty[$

2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que les racines de P soient non nulles et d'arguments opposés modulo 2π.

V. Racines n-èmes

26 — *Racines septièmes de l'unité* f

Soit ω une racine septième de l'unité distincte de 1. Simplifier $\dfrac{\omega}{1+\omega^2}+\dfrac{\omega^2}{1+\omega^4}+\dfrac{\omega^3}{1+\omega^6}$.

27 — *Quelques équations* f

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

1. Écrire -1 et $1-i$ sous forme trigonométrique.
2. Calculer les racines n-èmes de -1 et $1-i$.
3. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de $z^n+\dfrac{i-1}{z^n}+i=0$.

28 — *Construction du pentagone régulier* ff

On pose $\omega := \exp\left(\dfrac{2i\pi}{5}\right)$ et $\alpha=\omega+\omega^{-1}$.

1. Justifier que $1+\omega+\omega^2+\omega^3+\omega^4=0$ et en déduire une équation du second degré dont α est racine.
2. En déduire la valeur de $\cos(2\pi/5)$.
3. On pose $\Phi=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$ (nombre d'or).
   - **a.** Vérifier que $\Phi^2=\Phi+1$. Quelle est l'abscisse des points d'intersection des cercles d'équations respectives $x^2+y^2=1$ et $(x+1)^2+y^2=\Phi^2$?
   - **b.** Soient A, B et C les points d'affixes respectives 1, -1 et $\frac{i}{2}$. Calculer la distance BC. En déduire une construction à la règle et au compas du pentagone régulier.

VI. Application à la géométrie plane

29 — *Une inéquation*

Résoudre l'inéquation $1 \leqslant |e^z| \leqslant e$ dans $\mathbb{C}$ et représenter l'ensemble des solutions dans le plan complexe.

30 — *Racines d'une équation à paramètre*

Pour $a \in \mathbb{C}$, on note E_a : $z^2-az+a^2=0$, équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

1. Résoudre E_a pour tout $a \in \mathbb{C}$. On notera z_1 et z_2 les solutions de E_a.
2. Soit $a \in \mathbb{C}^*$. Déterminer les nombres complexes ω tels que z_1, z_2 et ω forment un triangle équilatéral.

31 — *Où sont les racines ? f*

Le plan $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$. Soit $t \in]-\pi, \pi[$. On considère l'équation donnée par

$$\mathbf{E} : z^2 - 2(\cos t + i \sin t)z - 2(\sin t - i \cos t)\sin t = 0$$

d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. On note $z_1(t), z_2(t)$ les racines complexes de $\mathbf{E}$ et $\mathrm{M}_1(t), \mathrm{M}_2(t)$ leurs images respectives.

1. Quel est l'ensemble décrit par le milieu de $[\mathrm{M}_1(t)\mathrm{M}_2(t)]$ lorsque t décrit $]-\pi, \pi[$? On ne calculera explicitement ni $z_1(t)$ ni $z_2(t)$.
2. Calculer $z_1(t)$ et $z_2(t)$ en fonction de t.
3. Déterminer le module et un argument de $z_1(t)$ et $z_2(t)$.

32 — *Questions d'alignement f*

Le plan affine euclidien $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R}$.

1. Déterminer les nombres complexes z tels que les trois points d'affixes 1, z et iz soient alignés.
2. Déterminer les nombres complexes z tels que les trois points d'affixes z^2, $1-z$ et $\overline{z}$ soient alignés.

33 — *Quadrilatères f*

Soit ABCD un quadrilatère convexe du plan $\mathscr{P}$. On construit à l'extérieur de chacun des côtés du quadrilatère des triangles rectangles isocèles APB, BQC, CRD et DSA. Démontrer que les droites (PR) et (QS) sont perpendiculaires et que les longueurs PR et QS sont égales.

34 — *$\mathbb{C}$ magnifique ! f*

Soit A, B, C et D quatre points du plan $\mathscr{P}$ tels que les triangles OAB et OCD soient des triangles isorectangles en O et directs. On note I le milieu de [BC]. Prouver par un calcul d'affixes que les droites (OI) et (AD) sont orthogonales et que AD = 2OI.

35 — *Sa majesté équilatérale ff*

Soit A, B, C trois points deux à deux distincts d'affixes a, b, c.

1. Prouver que ABC est un triangle équilatéral direct *si et seulement si* $a + jb + j^2c = 0$, et équilatéral indirect *si et seulement si* $a + jc + j^2b = 0$.
2. Prouver que ABC est un triangle équilatéral *si et seulement si* $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

VII. Problèmes

36 — *Homographies stabilisant le cercle unité* ff

On appelle *homographie* toute fonction h de la forme $h(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ où la variable z est dans $\mathbb{C}$ et où a, b, c, d sont des complexes vérifiant $ad - bc \neq 0$.

On note $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\}$, $\mathrm{P} = \{z \in \mathbb{C} ; \mathrm{Im}(z) > 0\}$ et $\mathrm{D} = \{z \in \mathbb{C} ; |z| < 1\}$.

Une homographie h est dite :

- *de type I* s'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $h(z) = \dfrac{e^{i\theta}}{z}$;
- *de type II* s'il existe $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{U}$ et $\theta \in \mathbb{R}$ tels que $h(z) = e^{i\theta} \dfrac{z+\alpha}{\overline{\alpha} z + 1}$.

On va établir qu'une homographie h vérifie $\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}$ *si et seulement si* elle est du type I ou II.

1. Soit h une homographie *de type I*. Montrer que, pour tout z de $\mathbb{U}$, on a $h(z) \in \mathbb{U}$.
2. Soit h une homographie *de type II*. Vérifier que l'ensemble de définition de h contient $\mathbb{U}$ puis montrer que $\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}$.
3. Soit u et v deux complexes. Établir que $\left(\forall \theta \in \mathbb{R},\ u + 2\,\mathrm{Re}\left(v e^{-i\theta}\right) = 0\right) \implies \left(u = 0 \text{ et } v = 0\right)$.
4. Soit $h : z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d}$ une homographie dont l'ensemble de définition contient $\mathbb{U}$.

   On suppose de plus que $\forall z \in \mathbb{U},\ h(z) \in \mathbb{U}$. On rappelle que $ad - bc \neq 0$.

   a. Montrer que, pour tout θ de $\mathbb{R}$, $|a|^2 + |b|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{a} b e^{-i\theta}\right) = |c|^2 + |d|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{c} d e^{-i\theta}\right)$.

   b. En déduire que $|a|^2 + |b|^2 = |c|^2 + |d|^2$ et $\overline{a} b = \overline{c} d$.

   c. On suppose que $a = 0$. Montrer que h est du type I.

   d. On suppose que $a \neq 0$. Montrer que $(|a|^2 - |c|^2)(|a|^2 - |d|^2) = 0$ et en déduire que $|a| = |d|$.

   e. Toujours sous l'hypothèse $a \neq 0$, montrer que h est du type II.

37 — *Quelques propriétés des homographies du plan* ff

⇛ On identifie $\mathbb{C}$ au plan euclidien usuel. On rappelle que $\mathbb{U} = \left\{z \in \mathbb{C} ; |z| = 1\right\}$

⇛ Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$. On appelle homographie associée à (a, b, c, d) la fonction suivante

$$f : \begin{array}{ccc} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array} \qquad \text{où} \quad \Omega := \left\{z \in \mathbb{C} ; cz + d \neq 0\right\}$$

⇛ Pour $z \in \mathbb{C}$ et une homographie f, on s'intéresse à la suite des itérées de z par f définie par

$$u_0 := z \ \text{ et } \ \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} := f(u_n)$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = f^n(z)$. Une telle suite n'existe pas toujours (par exemple lorsque z n'appartient pas au domaine de définition de f). On rappelle que $f^0 = \mathrm{id}_{\mathbb{C}}$, $f^2 = f \circ f$, etc.

⇛ On dit qu'une homographie f vérifie la propriété $\mathscr{C}$ si, pour tout $z \in \mathbb{C}$ tel que $\left(f^n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ existe, les termes de cette suite sont cocycliques (i.e. situés sur un même cercle) ou alignés.

⇛ On appelle point fixe de f tout élément z de son ensemble de définition vérifiant $f(z) = z$.

L'objet de ce problème est de caractériser les homographies à deux points fixes vérifiant la propriété $\mathscr{C}$.

Partie I – Calculs préliminaires

1. Résoudre l'équation $(1-i)z^2 + 2iz + 3 - i = 0$, d'inconnue complexe z.

2. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$, où $a \neq b$, et $\mathrm{K} \in \mathbb{R}_+^*$.

a. On suppose que $\mathrm{K} \in]0,1[$. Déterminer, en fonction de a, b et K, des nombres $c \in \mathbb{C}$ et $\rho \in \mathbb{R}_+^*$ tels que

$$\forall z \in \mathbb{C},\ |z-a|^2 = \mathrm{K}^2|z-b|^2 \iff |z-c|^2 = \rho^2$$

INDICATION : On pourra utiliser la relation $|z-\omega|^2 = |z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}\omega\right) + |\omega|^2$.

b. En déduire la nature géométrique selon la valeur de K de l'ensemble $\left\{z \in \mathbb{C}\,;\, |z-a| = \mathrm{K}|z-b|\right\}$.

3. Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan, d'affixes respectives a, b, c, d.

On admet, que A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $(\mathbf{DA}, \mathbf{CA}) = (\mathbf{DB}, \mathbf{CB})\ [\pi]$.

On appelle birapport de (a, b, c, d) le nombre complexe $\mathscr{B}(a, b, c, d) := \dfrac{a-c}{a-d} \times \dfrac{b-d}{b-c}$.

Montrer que A, B, C, D sont cocycliques ou alignés si et seulement si $\mathscr{B}(a, b, c, d)$ est réel.

4. On dit d'une application f, définie sur une partie de $\mathbb{C}$, et à valeurs dans $\mathbb{C}$, qu'elle conserve le birapport si, pour tous complexes a, b, c, d distincts tels que $f(a), f(b), f(c), f(d)$ soient bien définis et distincts :

$$\mathscr{B}\big(f(a), f(b), f(c), f(d)\big) = \mathscr{B}(a, b, c, d)$$

a. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. Montrer que $z \mapsto \alpha z + \beta$ et $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ conservent le birapport.

b. Montrer que la composée $f \circ g$ d'applications conservant le birapport conserve le birapport.

Partie II – Homographies et birapport

Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{C}^4$ tel que $ad - bc \neq 0$, et soit f l'homographie associée à (a, b, c, d). On admet pour la suite que toute homographie est injective.

1. Donner le domaine de définition de f.

2. Montrer que f conserve le birapport. INDICATION : On pourra écrire f sous la forme $z \mapsto \lambda + \frac{\mu}{cz+d}$.

3. On suppose que f admet deux points fixes distincts u_1 et u_2.

a. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $z, f(z)$, u_1 et u_2 soient bien définis et distincts deux à deux.

Montrer que $\mathscr{B}\left(f(z), z, u_1, u_2\right)$ ne dépend pas de z, i.e. $\mathscr{B}\left(f(z), z, u_1, u_2\right) = \mathscr{B}\left(f\left(z'\right), z', u_1, u_2\right)$ pour tous complexes z et z' tels que ces birapports soient bien définis.

INDICATION : On pourra appliquer le résultat du II.2. au quadruplet $\left(z, z', u_1, u_2\right)$.

b. En déduire qu'il existe un unique nombre complexe non nul k tel que, pour tout complexe z tel que z, $f(z), u_1$ et u_2 soient bien définis et distincts deux à deux :

$$\frac{f(z)-u_1}{f(z)-u_2} = k\frac{z-u_1}{z-u_2}$$

Dans la suite, k sera appelé rapport de l'homographie f. On observe qu'en échangeant les rôles de u_1 et u_2, $1/k$ est aussi un rapport de l'homographie f.

c. Soit z un nombre complexe distinct de u_1 et u_2 tel que la suite $\left(f^n(z)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bien définie. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{f^n(z)-u_1}{f^n(z)-u_2} = k^n\frac{z-u_1}{z-u_2}$$

Partie III – Homographies à deux points fixes vérifiant la propriété $\mathscr{C}$.

Soit f une homographie de rapport k à deux points fixes u_1 et u_2.

1. On suppose dans cette questions que $k \in \mathbb{U} \cup \mathbb{R}$. Démontrer que f vérifie la propriété $\mathscr{C}$.

2. On suppose dans cette questions que f vérifie $\mathscr{C}$. Soit g l'homographie $z \mapsto \dfrac{z-u_1}{z-u_2}\cdot$ On suppose $k \notin \mathbb{U}$.

a. On introduit l'application $m_k : z \mapsto kz$. Montrer que $g(f(z)) = m_k(g(z))$, pour tout nombre complexe z pour lequel ces expressions sont bien définies.

b. On admet l'existence d'un nombre complexe z'_0, distinct de u_1 et de u_2, pour lequel la suite $\left(f^n\left(z'_0\right)\right)$ est bien définie. Montrer que $z'_0, f\left(z'_0\right), f^2\left(z'_0\right)$ et $f^3\left(z'_0\right)$ sont distincts deux à deux.

c. On pose $z_0 = g\left(z'_0\right)$. Montrer que :

$$\mathscr{B}\left(z_0, m_k\left(z_0\right), m_k^2\left(z_0\right), m_k^3\left(z_0\right)\right) = \mathscr{B}\left(z'_0, f\left(z'_0\right), f^2\left(z'_0\right), f^3\left(z'_0\right)\right)$$

d. En déduire que les termes de la suite $(z_0k^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont cocycliques ou alignés, puis que k est réel.

3. L'homographie $f : z \mapsto \dfrac{2(1-i)z+i-3}{(1-i)z+2}$ vérifie-t-elle $\mathscr{C}$?

VIII. Indications

1 ⟲

On a $z^2 = 4e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2 ⟲

Faire apparaître les conjugués de a et b.

3 ⟲

Utiliser la technique usuelle : faire apparaître $|cz+d|^2$ au dénominateur afin de calculer la partie imaginaire.

4 ⟲

Écrire (par exemple) les éléments de $\mathbb{U}$ sous forme exponentielle e^{it} avec $t \in \mathbb{R}$.

5 ⟲

Montrer que les solutions sont nécessairement dans $\mathbb{U}$ puis les rechercher sous forme polaire. On trouve $\{j, j^2\}$. Une solution purement géométrique est possible.

6 ⟲

Que vaut le module de $(a+i)(b+i)(c+i)$?

7 ⟲

Au 2., introduire des racines carrées α et β respectivement de a et b.

8 ⟲

On trouve $e^{i\alpha\pi} = \frac{1+2i\sqrt{2}}{3}$ et donc $3^n e^{in\alpha\pi} = \left(1+2i\sqrt{2}\right)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9 ⟲

Il est plus facile de monter que $\lambda \in \mathbb{U} \implies \left(\forall u \in \mathbb{U}, \dfrac{\lambda}{2u} + \dfrac{u}{2\lambda} \in \mathbb{R}\right)$. Pour la réciproque, on pourra donner à u des valeurs bien choisies...

10 ⟲

Appliquer judicieusement l'inégalité triangulaire.

11 ⟲

Écrire z sous forme algébrique.

12

Appliquer une seule fois l'inégalité triangulaire.

13

Afin d'exploiter l'inégalité triangulaire, il est judicieux d'exprimer a et b en fonction de $a+b$ et $a-b$.

14

Raisonner par récurrence sur n au c.

15

Forme polaire ou trigo ?

16

On pourra réduire le problème à une seule inconnue.

17

Rechercher les solutions sous forme : algébrique aux 1. et 2., polaire au 3. On trouve un cercle privé d'un point au 1., une droite privée d'un point au 2. et la réunion de trois droites au 3.

18

S'intéresser au module de chacun des deux membres.

19

Comment détermine-t-on deux nombres à partir de leur somme et leur produit, ?

20

Penser à $A^2+B^2=(A+iB)(A-iB)$. On trouve $\left\{\dfrac{-1-i}{2}, \dfrac{-1+i}{2} - 1 - i, -1+i\right\}$.

21

Procéder par analyse-synthèse en utilisant les relations coefficients-racines : que vaut la sommes des racines ?

22

On aboutit à une équation du second degré en Z au 2. On trouve :

1. $\left\{\dfrac{1-i}{2}, -\dfrac{1+i\left(2+\sqrt{3}\right)}{2\left(2+\sqrt{3}\right)}, -\dfrac{1+i\left(2-\sqrt{3}\right)}{2\left(2-\sqrt{3}\right)}\right\}$.

2. $\left\{j, j^2, \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$.

3. $\left\{-\sqrt{2}e^{i\pi/6}, \sqrt{2}e^{i\pi/6}, -i\sqrt{2}e^{i\pi/6}, i\sqrt{2}e^{i\pi/6}\right\}$.

23

Écrire z sous forme algébrique pour la première équation. Pour la seconde, remarquer que $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

24

Les solutions sont $2^\alpha e^{\pm i\alpha}$.

25

Si z_1 et z_2 sont les solutions de $\mathscr{E}_{p,q}$, alors $p = -(z_1 + z_2)$ et $q = z_1 z_2$.

26

Exploiter la périodicité des puissances de ω ainsi que la relation $1 + \omega + \cdots + \omega^6 = 0$. On trouve -2.

27

Au 3., se ramener à une équation du second degré.

28

On trouve $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$ puis $\cos \frac{2\pi}{5} = \dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{4}$.

29

Écrire z sous forme algébrique.

30

Les solutions sont $ae^{\frac{\pm i\pi}{3}}$.

31

Il faudra discuter sur t au 3.

32

Appliquer la CNS d'alignement. On trouve :

1. Le cercle de centre d'affixe $\frac{1-i}{2}$ et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$.
2. La réunion des deux droites verticales définies par $\operatorname{Re} z = \pm 1/2$ et de l'axe des abscisses.

33

Travaillez dans un repère orthonormé direct quelconque du plan en utilisant des rotations pour trouver les affixes de P, Q, R, S en fonction de celles de A, B, C, D.

34

Travailler dans un rond et effectuer des calculs d'affixes.

35

Traduire $(\mathbf{AB}, \mathbf{AC}) = \pi/3\,[2\pi]$ et $AB = AC$ en $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\pi/3}$. Se souvenir que $1 + j + j^2 = 0$.

36

Au I.4., on pourra écrire v sous forme polaire $v = |v|e^{i\phi}$ et bien choisir θ pour monter que $u = 0$ puis à nouveau bien choisir θ pour conclure que $v = 0$.

37

Au I.2.a., pour $z \in \mathbb{C}$, on partira de $|z-a|^2 - \mathrm{K}^2|z-b|^2 = \left(1-\mathrm{K}^2\right)\left(|z|^2 - 2\,\mathrm{Re}\left(\overline{z}\dfrac{a-\mathrm{K}^2 b}{1-\mathrm{K}^2}\right) + \dfrac{|a|^2 - \mathrm{K}^2|b|^2}{1-\mathrm{K}^2}\right)$.