



Toutes les opérations de notre intelligence tendent à la géométrie, comme au terme où elles trouvent leur parfait achèvement.

Henri Bergson



Nature morte, Pieter Claesz

1	Espaces probabilisés	1
I	Probabilités générales.....	2
II	Conditionnement et indépendance.....	2
III	Modéliser une expérience aléatoire.....	4
IV	Indications.....	6

I. Probabilités générales

1 ? _____ Quelques relations _____

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) .

1. Montrer que, si $A \cup B = \Omega$, alors $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(\bar{A})\mathbf{P}(\bar{B})$.
2. Établir l'égalité suivante $\mathbf{P}(A \cup B) + \mathbf{P}(A \cup \bar{B}) + \mathbf{P}(\bar{A} \cup B) + \mathbf{P}(\bar{A} \cup \bar{B}) = 3$.
3. Montrer que $\mathbf{P}(A \cap B) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A \cap B)\mathbf{P}(\bar{A} \cap \bar{B}) - \mathbf{P}(\bar{A} \cap B)\mathbf{P}(A \cap \bar{B})$.

2 ? _____ Mines PC-2019 f _____

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé. On suppose que $\mathbf{P}(A) = \frac{3}{5}$, $\mathbf{P}(B|A) = \frac{1}{4}$.
Exprimer $\mathbf{P}(A|B)$ en fonction de $\mathbf{P}(\bar{A}|\bar{B})$.

3 ? _____ Une majoration utile f _____

Soit $(A_i)_{i \in [1, n]}$ des événements mutuellement indépendants.

1. Justifier que $\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} \geq 1 - x$.
2. En déduire que la probabilité qu'aucun des A_k ne se réalise est inférieure à $\exp\left(-\sum_{i=1}^n \mathbf{P}(A_i)\right)$.

4 ? _____ Variations sur deux événements ff _____

Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé fini (Ω, \mathbf{P}) .

1. Établir que $\mathbf{P}(A \cap B)^2 \leq \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)$.
2. Montrer que $|\mathbf{P}(A) - \mathbf{P}(B)| \leq \mathbf{P}(A \Delta B)$.
3. On suppose de plus que $\mathbf{P}(A) > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(A \cap B | A \cup B) \leq \mathbf{P}(A \cap B | A)$.
4. On suppose de plus A et B indépendants et $\mathbf{P}(A \cup B) > 0$. Montrer que $\mathbf{P}(A \cap B | A \cup B) \leq \mathbf{P}(A)$.

II. Conditionnement et indépendance

5 ? _____ Un exemple d'indépendance f _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On s'intéresse à la répartition des sexes des enfants d'une famille de n enfants. On prend comme modélisation $\{F, G\}^n$ muni de l'équiprobabilité. On considère les événements A et B suivants : « la famille a des enfants des deux sexes » et « la famille a au plus une fille ».

1. Soit $n \geq 2$. Calculer $\mathbf{P}(A)$ et $\mathbf{P}(B)$.
2. En déduire que A et B sont indépendants *si et seulement si* $n = 3$.

6 ? Pile ou face à deux pièces

On dispose de deux pièces de monnaie A et B. La probabilité que A (resp. B) donne pile est $a \in]0, 1[$ (resp. $b \in]0, 1[$). On choisit une pièce au hasard et on la lance. Si on obtient pile, on relance la même pièce. Si on obtient face, on change de pièce.

1. Calculer la probabilité p_n que l'on lance la pièce A au n -ième lancer.
2. Calculer la probabilité q_n que l'on obtienne pile au n -ième lancer.
3. Déterminer la limite de la suite (q_n) .

7 ? Tirage et arithmétique f

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Deux urnes A et B contiennent chacune n boules numérotées de 1 à n . On tire une boule de A et une boule de B, puis on note leurs numéros respectifs a et b . On note E_n l'événement *le rapport a/b est un nombre entier*.

1. Calculer $\mathbf{P}(E_n)$ pour tout entier naturel n non nul.
2. Déterminer un équivalent de $\mathbf{P}(E_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

8 ? Loi de succession de Laplace f

On dispose de N urnes ($N > 1$) numérotées de 1 à N . Pour tout $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$, l'urne k contient k boules rouges et $N - k$ boules blanches. On choisit au hasard une urne. Dans l'urne ainsi choisie (et uniquement dans celle-ci), on procède à une suite de tirages avec remise. Pour $m \in \mathbb{N}^*$, on considère l'événement A_m : « au cours des m premiers tirages, on a obtenu m boules rouges ». Et l'événement B_m : « La boule tirée au cours du m -ième tirage est rouge ».

1. Exprimer $\mathbf{P}(A_m)$ sous forme d'une somme, puis donner une expression de la probabilité $\mathbf{P}(B_{m+1} | A_m)$.
2. Montrer que $\mathbf{P}(B_{m+1} | A_m) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \frac{m+1}{m+2}$.

9 ? XPC-2016 f

Une urne contient 3 boules vertes et 3 boules rouges. Une boule est enlevée de l'urne au hasard. Anatole tire 6 fois une boule avec remise et obtient 6 fois une boule rouge. Barnabé tire 600 fois une boule avec remise et obtient 303 fois une rouge et 297 fois une verte. Lequel des deux peut « s'attendre le plus » à ce qu'une boule verte ait été enlevée ?

III. Modéliser une expérience aléatoire

10 ? 

Tirage aléatoire de sous-ensembles *f*

Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un couple (A, B) de parties de E . Calculer les probabilités des événements suivants : $A \cap B = \emptyset$, $A \subset B$ et $A \cup B = E$.

11 ? 

D'après X PC-2016 et Mines PC-2019 *f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n boules numérotées de 1 à n que l'on place au hasard dans n urnes numérotées de 1 à n , chaque urne pouvant recevoir de 0 à n boules. Déterminer la probabilité des événements suivants puis étudier son comportement asymptotique quand $n \rightarrow +\infty$:

1. Chaque urne contient exactement une boule.
2. Au moins une urne contient la boule de même numéro.
3. Il existe au moins une urne vide.
4. Une seule urne est vide.

12 ? 

Une urne contient n boules blanches et autant de boules rouges. On tire N boules en remettant la boule après tirage si elle est rouge et en ne la remettant pas si elle est blanche. Calculer la probabilité $p_{n,N}$ d'obtenir exactement une boule blanche.

Montrer que $p_{n,2n} \sim 2n(e-1)2^{-2n}$.

13 ? 

Tirage alterné *f*

Une urne contient n boules rouges et n boules vertes que l'on tire toutes une à une, sans remise.

1. Calculer la probabilité p_n d'avoir un changement de couleur à chaque tirage.
2. Avec la formule de Stirling montrer que $p_n \sim \frac{2\sqrt{\pi n}}{2^{2n}}$.

14 ? 

Le problème du collectionneur *ff*

Pour faire une simulation, on effectue un échantillon de r tirages aléatoires indépendants sur un espace probabilisé Ω muni de l'équiprobabilité et de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$. Comment choisir r de façon qu'il y ait au moins 99% de chances que l'échantillon recouvre tous les points de Ω ?

15*La fonction indicatrice d'Euler, X PC-2018 ff*

Soit n un entier naturel tel que $n \geq 2$. Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. Pour $d \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note D_d l'événement « d divise X ». On rappelle que deux entiers p et q sont dits premiers entre eux si leur seul diviseur commun dans \mathbb{N} est 1.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ un diviseur de n . Calculer $\mathbf{P}(D_d)$.
2. Soit p et q des entiers naturels premiers entre eux et divisant n . Montrer que les événements D_p et D_q sont indépendants.
3. On note $\phi(n)$ le nombre d'entiers de $\llbracket 1, n \rrbracket$ premiers avec n . Montrer que

$$\frac{\phi(n)}{n} = \prod_{q \in \mathcal{P}_n} \left(1 - \frac{1}{q}\right)$$

où \mathcal{P}_n est l'ensemble des nombres premiers qui divisent n . On pourra exprimer l'événement « X et n sont premiers entre eux » au moyen des D_q pour $q \in \mathcal{P}_n$.

16*La fête au chalet fff*

Pour fêter leur réussite à un concours, n étudiants se donnent rendez-vous dans un chalet. En entrant chaque personne dépose sa veste dans un vestiaire. Au petit matin, quand les esprits ne sont plus clairs, chacun prend une veste au hasard.

1. Quelle est la probabilité pour qu'une personne au moins retrouve sa propre veste ?
2. En déduire le nombre s_n de permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ sans point fixe (problème de Montmort, 1708).
3. Calculer la probabilité $\pi_n(k)$ pour que k personnes exactement aient leur propre veste.
4. Calculer la limite $\pi(k)$ de $\pi_n(k)$ quand n tend vers l'infini.

IV. Indications

1 ↪ _____

Tout se résout au moyen de formules élémentaires. Au 2., on peut (par exemple) passer aux complémentaires.

2 ↪ _____

Appliquer (sans astuce) des formules du type Bayes et probabilités totales.

3 ↪ _____

Il s'agit de majorer $\mathbf{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}\right)$.

4 ↪ _____

La croissance de \mathbf{P} permet de traiter la plupart des inégalités demandées.

5 ↪ _____

Calculer $\mathbf{P}(\overline{A})$.

6 ↪ _____

Notons A_n et P_n les événements respectifs : *on tire la pièce A au n-ième lancer et on obtient pile au n-ième lancer.*

1. Soit $n \geq 2$. En appliquant la formule des probabilités totales au système d'événements complet formé par (A_{n-1}, A_{n-1}^c) , on trouve :

$$p_n = (a + b - 1)p_{n-1} + 1 - b$$

On reconnaît une suite arithmético-géométrique.

2. En appliquant la formule des probabilités totales au système d'événements complet formé par (A_n, A_n^c) , on trouve :

$$q_n = (a - b)p_n + b$$

3. Comme $-1 < a + b - 1 < 1$, on a

$$q_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 - b)(a - b)}{2 - a - b} + b = \frac{a + b - 2ba}{2 - a - b}$$

7 ↪ _____

L'espace probabilisé est ici très simple : $\llbracket 1, n \rrbracket^2$ muni de l'équiprobabilité.

1. On a $E_n = \left\{ (bm, b); b \in \llbracket 1, n \rrbracket \text{ et } 1 \leq m \leq \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor \right\}$, d'où $\mathbf{P}(E_n) = \frac{\#E_n}{n^2} = \frac{1}{n^2} \sum_{b=1}^n \left\lfloor \frac{n}{b} \right\rfloor$.

2. On encadre $\lfloor \cdot \rfloor$ et on utilise l'équivalent des sommes partielles de $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n}$: $\mathbf{P}(E_n) \sim \frac{\ln(n)}{n}$.

8 ↷ _____

Il faut ici conditionner. Penser à des sommes de Riemann au b).

9 ↷ _____

Il s'agit de comparer deux probabilités conditionnelles (mais pour des expériences différentes). Formaliser clairement les expériences puis définir les événements à considérer.

10 ↷ _____

L'espace probabilisé est très simple : $\mathcal{P}(E)^2$ muni de l'équiprobabilité.

11 ↷ _____

L'expérience est ici modélisable par $\Omega := \llbracket 1, n \rrbracket^n$ ou $\llbracket 1, n \rrbracket^{\llbracket 1, n \rrbracket}$ muni de l'équiprobabilité. C'est essentiellement un exercice de dénombrement.

12 ↷ _____

Noter B l'événement « une seule boule blanche est tirée au cours du jeu » et, pour $i \in \llbracket 1, N \rrbracket$, R_i l'événement « une boule rouge est obtenue au i -ème tirage ». Remarquer que

$$B = \bigsqcup_{i=1}^N \left(\overline{R}_i \cap \bigcap_{j \neq i} R_j \right)$$

13 ↷ _____

On a $p_n = \frac{2}{\binom{2n}{n}}$.

14 ↷ _____

On note $\Omega := \{\omega_1, \dots, \omega_n\}$. L'univers de l'expérience aléatoire est Ω^n . En notant V l'événement « l'échantillon recouvre tous les points de Ω », on a

$$\overline{V} = \bigcup_{i=1}^n A_i$$

où A_i est l'événement « l'élément ω_i n'apparaît pas dans l'échantillon ».

15 ↷ _____

On a $\mathbf{P}(D_d) = \frac{|M_d|}{n}$ où M_d est l'ensemble des multiples de d appartenant à $\llbracket 1, n \rrbracket$.

16 ↻

L'espace probabilisé est l'ensemble des permutations de $\llbracket 1, n \rrbracket$ muni de l'équiprobabilité. Utiliser la formule du crible au a).