PB 2 | Variables aléatoires

Je ne cherche pas à connaître les réponses, je cherche à comprendre les questions.

Confucius

Allégorie de la fortune, Francken

I. Calculs de lois et des moments

1 — *Calcul d'une loi*

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des va indépendantes de lois $\mathscr{B}(p_1), \ldots, \mathscr{B}(p_n)$. Déterminer la loi de $Y := \prod_{i=1}^{n} X_i$.

2 — *Mines PC-2025 f*

Soit $(X_i)_{i\geqslant 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} X_k \quad \text{et} \quad P_n := \prod_{k=1}^{n} X_k$$

1. Déterminer l'espérance de S_n et P_n.
2. Déterminer la loi de P_n.
3. Les variables S_n et P_n sont-elles indépendantes ?

3 — *Mines 2018 f*

On dispose p aléatoirement dans n tiroirs $T_1, \ldots, T_n$ où p et n appartiennent à $\mathbb{N}^*$.

1. Déterminer la loi du nombre X_k de boules situées dans T_k.
2. Les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
3. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs vides. Déterminer l'espérance de Y.

4 — *Expérience aléatoire en deux étapes f*

On tire au hasard un entier X entre 1 et n, puis de nouveau au hasard un entier Y entre 1 et X. Déterminer la loi et l'espérance de Y.

5 — *Calcul d'une espérance f*

Soit $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de va iid de la loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.
Calculer $\mathbf{E}(\cos(S_n t))$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et t dans $\mathbb{R}$.

6 — *Centrale PSI-2015 f*

Soit $X_1, \ldots, X_n$ des variables aléatoires mutuellement indépendantes suivant une loi de Bernoulli de paramètre p. On pose $U = (X_1, \ldots, X_n) \in \mathscr{M}_{1,n}(\mathbb{R})$ et $M = U^\top U$.

1. Déterminer la loi de probabilité de $\operatorname{rg} M$ et de $\operatorname{tr} M$.
2. Vérifier que $M^2 = (\operatorname{tr} M)M$ et en déduire la probabilité que M soit une matrice de projection.

7 — *Une répartition f*

Soit n et a dans $\mathbb{N}^*$. On pose $N := na$. On place indépendamment N boules dans n urnes, chaque placement se faisant selon la loi uniforme.

On note T_i la variable valant 1 si l'urne i est vide, et 0 sinon. On note Y_n le nombre d'urnes vides, et $S_n := \dfrac{Y_n}{n}$.

1. Déterminer la loi des T_i.
2. Déterminer $\mathbf{E}(S_n)$ puis la limite de $(\mathbf{E}(S_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

8 — *Maximum d'un tirage uniforme ff*

Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $Y_1, \dots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $[\![1, p]\!]$.

1. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[\![1, p]\!]$. Établir que $\mathbf{E}(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \mathbf{P}(X > k)$.
2. On pose $B_n := \max(Y_1, \dots, Y_n)$.
   a. Calculer $\mathbf{E}(B_n)$ en fonction de n et p.
   b. Déterminer un équivalent de $\mathbf{E}(B_n)$ quand p tend vers $+\infty$.

9 — *Plus petite boule tirée ff*

On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n. On tire aléatoirement $k \in [\![1, n]\!]$ boules en une seule prise. On note X la variable aléatoire donnant le numéro de la plus petite boule tirée.

1. Déterminer les probabilités $\mathbf{P}(X \geqslant i)$ pour $i \in [\![1, n-k+1]\!]$ puis la loi de X.
2. En déduire $\mathbf{E}(X)$.

10 — *Number of runs in a coin tossing game ff*

A biased coin is tossed n times, and heads shows with probability p on each toss. A *run* is a sequence of throws which result in the same outcome. For example, the sequence HTHHTHTT contains 6 runs. Find the expected number of runs.

11 — *Mines PC-2025*

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes suivant la loi uniforme sur $[\![1, N]\!]$. On note μ l'espérance de U_1 et σ^2 la variance de U_1.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n := U_1 + \cdots + U_n$ et $V_n := \dfrac{S_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que $\mathbf{E}\big(e^{tV_n}\big) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{\frac{t^2}{2}}$.

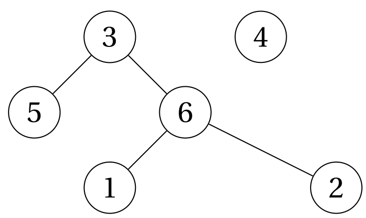
12 — *Distance et minimum de deux variables suivant une loi uniforme finie ff*

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{T}, \mathbf{P})$, indépendantes, de même loi uniforme sur l'ensemble $E = [\![0, n]\!]$. Soit Z et T les variables aléatoires définies par $Z = |X - Y|$ et $T = \inf(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de Z puis démontrer que $\mathbf{E}(Z) = \dfrac{n(n+2)}{3(n+1)}$.
2. En déduire $\mathbf{E}(T)$ et en donner un équivalent lorsque n tend vers l'infini.

13 — *Graphes aléatoires d'Erdös-Reyni fff*

Un graphe est un ensemble de points, appelés *nœuds*, dont certaines paires sont reliées par un lien. Ces liens sont appelés les *arêtes* du graphe. La figure ci-dessous représente un graphe à 6 nœuds et 4 arêtes :



Un graphe est dit *aléatoire* si les liens entre ses nœuds sont aléatoires. On notera $E = [\![1, n]\!]$ l'ensemble des n nœuds ordonnés d'un graphe aléatoire G. Pour deux nœuds distincts i et j de E avec $i < j$, on définit la variable aléatoire $T_{i,j}$ suivante :

$$T_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe une arête entre les nœuds } i \text{ et } j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Un graphe aléatoire est dit de type $\mathscr{G}(n, p)$ s'il possède n nœuds et vérifie les propriétés suivantes :

- ⇛ Les variables $T_{i,j}$ sont indépendantes ;
- ⇛ Deux nœuds distincts sont liés avec probabilité $p \in]0, 1[$.
- ⇛ Un nœud ne peut pas être relié à lui même : ie $T_{i,i} = 0$ pour tout i.

Les graphes aléatoires sont utilisés pour la modélisation de réseaux biologiques, sociaux ou de communication. Dans tout ce qui suit, on considère un graphe aléatoire G de type $\mathscr{G}(n, p)$.

1. *Loi du nombre d'arêtes.* Soit $X = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} T_{i,j}$ le nombre d'arêtes de G.
   - **a.** Calculer l'ensemble des valeurs prises par X.
   - **b.** Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On appelle *nœud isolé* de G tout nœud qui n'est relié à aucun autre nœud de G. Soit Z_n le nombre aléatoire de nœuds isolés dans G.

a. Soit $i \in [\![1,n]\!]$. Calculer la probabilité que le nœud i soit isolé. On pourra exprimer cet événement au moyen des variables $T_{j,i}$ pour $j < i$, et $T_{i,j}$ pour $j > i$.

b. En déduire que $\mathbf{E}(Z_n) = n(1-p)^{n-1}$.

c. En appliquant l'inégalité de Tchebychev, montrer que $\mathbf{P}(Z_n = 0) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(Z_n)}{\mathbf{E}(Z_n)^2}$.

3. On suppose désormais que p est de la forme suivante : $p_n = \lambda \dfrac{\ln n}{n}$, où $\lambda > 0$ et $n \geqslant 2$.

a. Montrer que $\mathbf{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n^{1-\lambda}$. En déduire le comportement asymptotique de $\mathbf{E}(Z_n)$.

b. On suppose ici que $\lambda > 1$. Déduire de la question précédente que $\mathbf{P}(Z_n \geqslant 1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

c. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$ tel que $i \neq j$. Calculer la probabilité que les nœuds i et j soient isolés.

d. En déduire la valeur de $\mathbf{E}\left(Z_n^2\right)$. Conclure que, si $\lambda < 1$, alors $\mathbf{P}(Z_n = 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

e. Interpréter les résultats précédents en termes d'existence de nœuds isolés.

14 — *Caractérisation d'une loi par ses moments fff*

Soit X et Y deux va définies sur le même espace de probabilisé fini et à valeurs dans le même ensemble E de cardinal $n+1$. Montrer que X et Y suivent le même loi *si et seulement si* $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \mathbf{E}\left(X^k\right) = \mathbf{E}\left(Y^k\right)$.

II. Chaînes de Markov et marches aléatoires

15 — *Une chaîne de Markov à deux états f*

Soit $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $a+b<1$. Un interrupteur admet deux positions que l'on note 0 et 1. Si, à l'instant n, il est en position 0, il sera encore en position 0 à l'instant $n+1$ avec la probabilité $1-a$ et passera en position 1 avec la probabilité a. De même, s'il est en position 1, il y restera l'instant suivant avec la probabilité $1-b$ et basculera en position 0 avec la probabilité b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n la position de l'interrupteur à l'instant n et on pose $\mu_n = (\mathbf{P}(X_n = 0), \mathbf{P}(X_n = 1))$.

1. Déterminer une matrice A telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \mu_{n+1} = \mu_n A$.

2. On suppose que X_0 suit la loi de Bernoulli $\mathscr{B}\left(\dfrac{a}{a+b}\right)$. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Dans le cas général, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, X_n suit une loi de Bernoulli dont on déterminera le paramètre p_n.

4. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, la covariance des variables X_n et X_{n+1}. Quelle est la limite de $(\mathbf{Cov}(X_n, X_{n+1}))$?

16 — *Un exemple de chaîne de Markov ff*

On dispose de 6 boules noires et deux boules blanches que l'on répartit dans deux urnes U_1 et U_2. On suppose que U_1 contient 2 boules et que U_2 en contient 6. Soit E l'épreuve : on tire une boule de U_1 et une boule de U_2, on met celle de U_1 dans U_2 et celle de U_2 dans U_1. Soit X_n le nombre de boules blanches dans U_1 après la n-ième épreuve. On pose $\mu_n := (\mathbf{P}(X_n = 0), \mathbf{P}(X_n = 1), \mathbf{P}(X_n = 2)) \in \mathscr{M}_{1,3}(\mathbb{R})$.

1. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ \mu_{n+1} = \mu_n M$.
2. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et étudier son comportement quand $n \to +\infty$.

17 — *Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}$ ff*

Un mobile évolue de façon aléatoire le long d'un axe gradué, d'origine O. A l'instant 0, il est en O. À chaque instant $k \in \mathbb{N}$, son abscisse varie de $+1$ avec la probabilité p et de -1 avec la probabilité $q = 1 - p$, où p est un nombre fixé dans $]0,1[$. On note X_n son abscisse au temps n. Pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, on note ε_i la variable aléatoire valant 1 si le i-ème déplacement se fait dans le sens positif et 0 sinon.

1. Déterminer les lois de ε_i pour $i \in \mathbb{N}^*$.
2. En déduire les lois de $S_n := \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ puis X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $\mathbf{E}(X_n)$ et $\mathbf{V}(X_n)$.
4. On suppose dans cette question que $p > \frac{1}{2}$.

   En utilisant l'inégalité de Tchebychev, démontrer que $\mathbf{P}(X_n \leqslant 0) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
5. Quel est le comportement de la suite de terme général $\mathbf{P}(X_n \leqslant 0)$ dans les cas où $p < \frac{1}{2}$ et $p = \frac{1}{2}$?

III. Inégalités

18 — *Inégalité de Jensen f*

Soit X une va finie et f une fonction convexe. Montrer que $f(\mathbf{E}(X)) \leqslant \mathbf{E}\big(f(X)\big)$.

19 — *Un intervalle de confiance f*

On lance n fois une pièce équilibrée. Déterminer une condition suffisante sur n pour que la fréquence d'apparition de *face* soit comprise entre $0,45$ et $0,55$ avec une probabilité au moins égale à $0,90$.

20 — *First and second moment principle f*

Let X be a random variable on a finite probability space $(\Omega, \mathbf{P})$.

1. Suppose the values of X are non negative integers. Prove that $\mathbf{P}(X > 0) \leqslant \mathbf{E}(X)$.

2. Suppose that $\mathbf{E}(X) \geqslant 0$. Prove that $\mathbf{P}(X > 0) \geqslant \dfrac{\mathbf{E}(X)^2}{\mathbf{E}\left(X^2\right)}$.

21 — *Inégalité triangulaire f*

Soit X et Y des variables aléatoires et $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $a > 0$ et $b > 0$. Montrer que

$$\mathbf{P}(|X+Y-u-v| > a+b) \leqslant \mathbf{P}(|X-u| > a) + \mathbf{P}(|Y-v| > b)$$

22 — *Borne de Chernov pour la loi binomiale ff*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des va iid suivant la loi $\mathscr{B}(p)$ où $p \in]0,1[$. On pose $S_n := X_1 + \cdots + X_n$ et $q := 1-p$ et on fixe un réel x dans $\mathbb{R}_+^*$.

1. Montrer que pour tout $\lambda > 0$, on a $\mathbf{P}\left(S_n - np \geqslant nx\right) \leqslant \dfrac{\mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda(S_n - np)\right)\right)}{\exp(n\lambda x)}$.

2. Établir la relation $\mathbf{E}\left(\exp\left(\lambda(S_n - np)\right)\right) = e^{-n\lambda p}\left(pe^{\lambda} + q\right)^n$.

3. Pour tout $\lambda \geqslant 0$, on pose $\psi(\lambda) = \ln\left(pe^{\lambda} + q\right) - \lambda p$. Montrer que $\forall \lambda \geqslant 0,\ \psi(\lambda) \leqslant \dfrac{\lambda^2}{8}$.

4. En déduire l'inégalité $\mathbf{P}\left(S_n - np \geqslant nx\right) \leqslant e^{-2nx^2}$. Comparer avec l'inégalité de Tchebychev.

23 — *Inégalités de Young et de Hölder d'après X PC-2015 ff*

Soit X et Y deux va positives finies et $(p, q) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

1. Montrer que $\forall (x, y) \in (\mathbb{R}_+)^2,\ x^{1/p} y^{1/q} \leqslant \dfrac{x}{p} + \dfrac{y}{q}$.

2. Montrer que $\mathbf{E}(XY) \leqslant \mathbf{E}(X^p)^{1/p}\,\mathbf{E}\left(Y^q\right)^{1/q}$.

24 — *Inégalité de Cantelli ff*

Soit $\varepsilon > 0$ et X une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini.

1. Établir au moyen de l'inégalité de Markov que $\forall x > 0,\ \mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X) + x^2}{(x+\varepsilon)^2}$.

2. En déduire que $\mathbf{P}(X - \mathbf{E}(X) \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$.

3. Démontrer que $\mathbf{P}(|X - \mathbf{E}(X)| \geqslant \varepsilon) \leqslant \dfrac{2\mathbf{V}(X)}{\mathbf{V}(X) + \varepsilon^2}$.

4. Quand cette inégalité est-elle plus fine que celle de Bienaymé-Tchebychev ?

IV. Fonctions génératrices et caractéristiques

25 — *Fonction génératrice d'une va à valeurs dans $\mathbb{N}$ f*

Pour toute variable finie X à valeur dans $\mathbb{N}$, on note G_X la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G_X(t) = \mathbf{E}\left(t^X\right)$.

1. Calculer G_X dans le cas où $X \hookrightarrow \mathscr{B}(p)$, $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $X \hookrightarrow \mathscr{U}(\llbracket 0,n \rrbracket)$.
2. Soit X et Y des variables finies à valeurs dans $\mathbb{N}$. Établir que X et Y suivent la même loi si et seulement si $G_X = G_Y$.
3. Soit X et Y des variables finies à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Démontrer que $G_{X+Y} = G_X G_Y$.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \ldots, X_n$ des variables finies à valeurs dans $\mathbb{N}$ et indépendantes. Exprimer $G_{X_1+\cdots+X_n}$ en fonction des G_{X_i}.
5. Soit X une variable finie à valeurs dans $\mathbb{N}$. Vérifier que $\mathbf{E}(X) = G_X'(1)$. Exprimer de même $\mathbf{V}(X)$ au moyen des dérivées de G_X.
6. On suppose que $X \hookrightarrow \mathscr{B}(n,p)$ et $Y \hookrightarrow \mathscr{B}(m,p)$ avec m et n dans $\mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$, et X et Y sont indépendantes. Déterminer la loi de $S = X+Y$.
7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(X_1,\ldots,X_n)$ une famille de variables iid dont la loi est déterminée par :

$$\mathbf{P}(X_k = 0) = \frac{8}{27}, \quad \mathbf{P}(X_k = 1) = \frac{12}{27}, \quad \mathbf{P}(X_k = 2) = \frac{6}{27}, \quad \mathbf{P}(X_k = 3) = \frac{1}{27}$$

   Déterminer la loi de $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

26 — *Fonction caractéristique d'une variable aléatoire, d'après X PC-2019 ff*

Pour toute va X à valeurs réelles, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction caractéristique de X par $F_X : t \mapsto \mathbf{E}\left(e^{itX}\right)$.

1. Montrer que deux va réelles X_1 et X_2 suivent la même loi *si et seulement si* $F_{X_1} = F_{X_2}$.
2. Que valent les dérivées $F_X^{(k)}(0)$ pour une va X à valeurs réelles et $k \in \mathbb{N}$?
3. Soit Y_1 et Y_2 deux variables aléatoires indépendantes et de même loi.
   - **a.** Donner une CNS sur F_X pour qu'une va X soit symétrique.
   - **b.** Montrer que $Y_1 - Y_2$ est symétrique.

27 — *X MP-2018 ff*

On prend deux dés à 6 faces numérotées de 0 à 5. Montrer qu'il est impossible de piper les dés de sorte que leur somme suive la loi uniforme sur $\llbracket 0,10 \rrbracket$.

V. Problèmes

28 — *Lois d'espèces et d'abondances d'espèces*

Soit θ un réel strictement positif.

Des individus numérotés $1, 2, \ldots, n, \ldots$ arrivent successivement dans une salle de restaurant contenant une infinité de tables infiniment longues. Le premier individu s'assied à une table. Pour tout entier $k \geqslant 1$, lorsque l'individu $k+1$ arrive :

- il choisit au hasard un des k convives déjà attablés avec la probabilité
$$\frac{1}{k+\theta}$$
et s'assied à la même table ;
- ou il occupe une nouvelle table avec la probabilité
$$\frac{\theta}{k+\theta}$$
indépendamment de ce qui s'est passé avant.

L'entier Y_n désigne le nombre de tables occupées lorsque n convives sont installés et pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $q_{n,i} = \mathbf{P}(Y_n = i)$.

Ce modèle est utilisé pour décrire la loi du nombre d'espèces et des abondances respectives de chaque espèce, dans un échantillon de n individus.

Partie I – Étude en loi

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1,1} = \dfrac{n!}{(n+\theta)(n-1+\theta)\cdots(1+\theta)}$.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $q_{n+1,n+1} = \dfrac{\theta^n}{(n+\theta)(n-1+\theta)\cdots(1+\theta)}$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $i \in [\![2, n]\!]$, trouver une relation entre $q_{n+1,i}$, $q_{n,i}$ et $q_{n,i-1}$ en appliquant la formule des probabilités totales.

4. Soit G_n le polynôme générateur de Y_n défini par $G_n(X) := \sum_{i=1}^{n} q_{n,i} X^i$.

  a. Déterminer $G_1(X)$.

  b. Établir que, $\forall n \geqslant 1$, $G_{n+1}(X) = \dfrac{\theta X + n}{\theta + n} G_n(X)$.

  c. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire un polynôme L_n tel que $G_n(X) = \dfrac{L_n(\theta X)}{L_n(\theta)}$.

  d. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que le polynôme L_n détermine la loi de Y_n.

5. Déduire de ce qui précède que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{E}(Y_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta+i}\,, \quad \mathbf{V}(Y_n) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{\theta+i}\left(1 - \frac{\theta}{\theta+i}\right)$$

Partie II – Étude asymptotique

1. Dans cette question, on cherche à retrouver par une autre méthode l'espérance et la variance de Y_n.

a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer, à partir du modèle, que $Y_n = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_n$ où les ε_i sont des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes dont on précisera les paramètres.

b. Retrouver par cette méthode les valeurs de $\mathbf{E}(Y_n)$ et de $\mathbf{V}(Y_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. **a.** Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\int_0^n \frac{\theta}{\theta + x}\,\mathrm{d}x \leqslant \mathbf{E}(Y_n) \leqslant 1 + \int_0^{n-1} \frac{\theta}{\theta + x}\,\mathrm{d}x$$

b. En déduire un équivalent de $\mathbf{E}(Y_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

c. Étudier le comportement asymptotique de la différence $\mathbf{V}(Y_n) - \mathbf{E}(Y_n)$ et en déduire un équivalent de $\mathbf{V}(Y_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

d. Montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 2$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\ln n} - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\ln n} - \frac{\mathbf{E}(Y_n)}{\ln n}\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right) + \mathbf{P}\left(\left|\frac{\mathbf{E}(Y_n)}{\ln n} - \theta\right| \geqslant \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

e. En déduire que, pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{Y_n}{\ln n} - \theta\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

29 — *Divisibilité de sommes de variables aléatoires i.i.d. et entières f–ff*

Dans tout ce problème, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et $Y_1, \ldots, Y_n$ des variables aléatoires indépendantes et suivant la même loi à valeurs dans $\mathbb{N}$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathbf{P})$ fini. On pose

$$S_n := Y_1 + \cdots + Y_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k$$

On supposera que $Y_1\langle\Omega\rangle = [\![0, N-1]\!]$ avec $N \in \mathbb{N}$ tel que $N \geqslant 2$ et on posera

$$\forall k \in [\![0, N-1]\!],\ p_k := \mathbf{P}(Y_1 = k)$$

Dans ce problème, on notera G le polynôme générateur de Y_1 et G_n celui de S_n. On rappelle la définition du polynôme générateur G_Z d'une variable aléatoire $Z : \Omega \to \mathbb{N}$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G_Z(t) = \sum_{k \in Z\langle\Omega\rangle} \mathbf{P}(Z = k)\, t^k$$

cette somme étant finie car Ω est de cardinal fini. Ainsi, avec les notations précédentes :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ G(t) = \sum_{k=0}^{N-1} p_k t^k$$

On fixe m dans $\mathbb{N}^*$. L'objectif du sujet est d'établir de plusieurs façons et sous certaines hypothèses que

$$\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \equiv 0\,[m]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{m}$$

où $(\mathrm{S}_n \equiv 0\,[m])$ est l'évènement « S_n est divisible par m ». On donnera de plus une estimation de la vitesse de convergence dans un cas particulier.

Partie I – Préliminaires

On regroupe dans cette partie quelques résultats classiques sur les fonctions génératrices et les nombres complexes.

1. Dans cette question, on considère des variables aléatoires Z, Z_1, Z_2 à valeurs dans $\mathbb{N}$, ne prenant qu'un nombre fini de valeurs.

- **a.** Vérifier que $\forall t \in \mathbb{R},\ \mathrm{G}_\mathrm{Z}(t) = \mathbf{E}\big(t^\mathrm{Z}\big)$.
- **b.** Justifier que Z_1 et Z_2 suivent la même loi *si et seulement si* $\mathrm{G}_{\mathrm{Z}_1} = \mathrm{G}_{\mathrm{Z}_2}$.
- **c.** Déterminer G_Z lorsque Z suit la loi $\mathscr{B}(p)$, avec $p \in [0,1]$.
- **d.** Déterminer G_Z lorsque Z suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$, avec $p \in [0,1]$.
- **e.** Justifier que $\mathbf{P}(\mathrm{Z} \equiv 0\,[2]) = \dfrac{\mathrm{G}_\mathrm{Z}(1) + \mathrm{G}_\mathrm{Z}(-1)}{2}$.
- **f.** Démontrer que, si Z_1 et Z_2 sont indépendantes, alors $\mathrm{G}_{\mathrm{Z}_1+\mathrm{Z}_2} = \mathrm{G}_{\mathrm{Z}_1}\mathrm{G}_{\mathrm{Z}_2}$.
- **g.** Justifier que $\mathrm{G}_n = \mathrm{G}^n$ (cf. le préambule pour les définitions de G et G_n).
- **h.** Comment peut-on retrouver le résultat de la question I.1.d. à partir du I.1.c. ?

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $z_1, \dots, z_n$ dans $\mathbb{C}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, on note $z_k = \rho_k e^{i\theta_k}$ avec $(\rho_k, \theta_k) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- **a.** Établir que $\displaystyle\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right|^2 = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \rho_k\rho_\ell \cos(\theta_k - \theta_\ell)$.
- **b.** En déduire que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k\right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k| \iff \theta_1 = \cdots = \theta_n\,[2\pi]$$

Partie II – Quelques stratégies de résolution dans le cas $m = 2$

Dans cette partie, on note $p := \mathbf{P}(\mathrm{Y}_1 \equiv 1\,[2])$ et on suppose que $0 < p < 1$.

Les trois questions suivantes sont indépendantes et résolvent le problème en suivant trois stratégies différentes.

1. On reprend ici les notations du préambule sur les fonctions génératrices de Y_1 et S_n.

- **a.** Vérifier que $\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \equiv 0\,[2]) = \dfrac{1 + \mathrm{G}(-1)^n}{2}$.
- **b.** En déduire que $\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \equiv 0\,[2]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$ et $\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \equiv 1\,[2]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{2}$.

2. On pose $\sigma_n := \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{(Y_k \equiv 1\,[2])}$.

a. Justifier que la variable aléatoire σ_n suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.

b. Établir que $\mathbf{P}(S_n \equiv 0\,[2]) = \mathbf{P}(\sigma_n \equiv 0\,[2])$.

c. En déduire une nouvelle démonstration des résultats établis au II.1.b.

INDICATION : On pourra utiliser la fonction génératrice de σ_n.

3. On pose $u_n := \mathbf{P}(S_n \equiv 0\,[2])$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

a. Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = (1-p)u_n + p(1-u_n)$.

b. En déduire l'expression de u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$ et p, puis retrouver le résultat du II.1.b.

Partie III – Étude du cas $m = 3$ via les chaînes de Markov

Dans cette partie, on suppose que $p_0 p_1 \neq 0$, on pose $j := e^{\frac{2i\pi}{3}}$ et on note

$$\forall r \in [\![0,2]\!],\ a_r := \mathbf{P}(Y_1 \equiv r\,[3]) \quad \text{et} \quad \mu := \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M := \begin{pmatrix} a_0 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mu_n := \big(\mathbf{P}(S_n \equiv 0\,[m])\,,\mathbf{P}(S_n \equiv 1\,[m])\,,\mathbf{P}(S_n \equiv 2\,[m])\big)^\top$

1. Justifier que $a_0 a_1 \neq 0$.

2. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mu_{n+1} = M\mu_n$.

INDICATION : Utiliser le système d'évènements complet $\big\{(Y_{n+1} \equiv r\,[3])\,;\, r \in [\![0,2]\!]\big\}$.

3. On pose $K := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $f_0 := (1,1,1)^\top$, $f_1 := (1, j^2, j)^\top$ et $f_2 := (1, j, j^2)^\top$.

a. Démontrer que (f_0, f_1, f_2) est une base de $\mathbb{C}^3$.

b. Exprimer Kf_0, Kf_1 et Kf_2 en fonction de j, f_0, f_1 et f_2.

c. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{C}^3$ tel que $\mu = \alpha_0 f_0 + \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2$. Démontrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}[X]\ ,\ P(K)\mu = \alpha_0 P(1) f_0 + \alpha_1 P(j) f_1 + P(j^2)\alpha_2 f_2$$

d. Trouver $\Gamma \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $M = \Gamma(K)$.

e. En déduire que $\forall r \in [\![0,2]\!]$, $\mathbf{P}(S_n \equiv r\,[3]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{3}$.

Partie IV – Étude du cas général via les fonctions génératrices

Dans cette partie, on suppose que $p_0 p_1 \neq 0$. On pose $\omega := e^{\frac{2i\pi}{m}}$

1. On fixe k dans $\mathbb{N}$. Démontrer que

$$\sum_{\ell=0}^{m-1} \omega^{k\ell} = \begin{cases} m \text{ si } k \equiv 0\,[m] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$$

2. En déduire que

$$\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \equiv 0\,[m]) = \frac{1}{m}\sum_{\ell=0}^{m-1} \mathrm{G}\left(\omega^{\ell}\right)^n$$

3. En déduire que $\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \equiv 0\,[m]) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{m}\cdot$

Partie V – Étude de la vitesse de convergence dans le cas de variables de Bernoulli indépendantes

Dans cette partie, on suppose que les Y_i suivent la loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$. On pose $q := 1-p$.

1. On reprend les notations de la partie IV. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(\mathrm{S}_n \equiv 0\,[m]) - \frac{1}{m} = \frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m-1}\left(p\omega^{\ell}+q\right)^n$$

2. Soit $\ell \in [\![1, m-1]\!]$.

a. Établir que $\left|p\omega^{\ell}+q\right|^2 = 1-4pq\sin^2\left(\dfrac{\ell\pi}{m}\right)$.

b. Démontrer que, pour tout $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin t \geqslant \dfrac{2t}{\pi}\cdot$

3. En déduire que

$$\left|\mathbf{P}(\mathrm{S}_n \equiv 0\,[m]) - \frac{1}{m}\right| \leqslant \exp\left(-\frac{8pq}{m^2}n\right)$$

30 — *Marches aléatoires dans $\mathbb{Z}^d$ avec $d \in [\![1,3]\!]$* ff–fff

Soit $p \in [0,1]$. Une variable aléatoire X suit la loi $\mathscr{R}(p)$, dite de Rademacher de paramètre p, si elle est à valeurs dans la paire $\{-1,1\}$ et vérifie

$$\mathbf{P}(\mathrm{X}=1) = p \text{ et } \mathbf{P}(\mathrm{X}=-1) = 1-p$$

L'objectif de ce problème est d'étudier les marches aléatoires en dimension un, deux et trois, et plus particulièrement d'estimer le nombre moyen de passages par l'origine.

On établit dans la première partie un développement en série qui permettra cette estimation dans les parties II et III, dédiées respectivement aux dimensions un et deux.

Le cas de la dimension trois, beaucoup plus délicat que les précédents, nécessite une approche différente et sera traité dans la partie IV.

Partie I – Un développement en série

1. Démontrer la formule de Taylor avec reste intégral :

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ avec $a < b$, on a :

$$\forall (x, x_0) \in [a, b]^2,\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \mathrm{R}_n(f)(x_0, x) \ \text{ où } \ \mathrm{R}_n(f)(x_0, x) := \int_{x_0}^{x} \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\mathrm{d}t$$

2. Dans cette question, on considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : \begin{array}{ccc} [0,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \dfrac{1}{\sqrt{1-t}} \end{array}$ et on fixe x dans $[0,1[$.

a. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ et que

$$\mathrm{R}_{n-1}(f)(0, x) = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \int_0^x n(1-t)^{-\frac{2n+1}{2}}(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t$$

b. Démontrer que

$$\int_0^x n(1-t)^{-\frac{2n+1}{2}}(x-t)^{n-1}\mathrm{d}t = nx^n \int_0^1 (1-ux)^{-n-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-1}\mathrm{d}u$$

c. Établir l'existence d'un réel K_x, indépendant de n, tel que $\displaystyle\int_0^1 (1-ux)^{-n-\frac{1}{2}}(1-u)^{n-1}\mathrm{d}u \leqslant \mathrm{K}_x$.

d. Rappeler sans démonstration l'équivalent de Stirling de $n!$ puis en déduire que $\displaystyle\frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$.

e. En déduire que

$$\forall x \in [0,1[\ ,\ \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n} x^n$$

Partie II – Marches aléatoires dans $\mathbb{Z}$

Soit $\mathrm{X}_0 = 0$ et $(\mathrm{X}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi $\mathscr{R}(p)$ où $p \in [0,1]$. On note

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{S}_n := \sum_{k=0}^{n} \mathrm{X}_k \ \text{ et } \ \mathrm{N}_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{(\mathrm{S}_{2k}=0)}$$

La variable S_n représente donc le point courant après n déplacements aléatoires selon 1 ou -1 (avec des probabilités respectives p et $1-p$) en partant de l'origine sur la droite $\mathbb{R}$.

1. Soit $i \in \mathbb{N}$. Déterminer la loi de la variable aléatoire $\dfrac{X_i+1}{2}\cdot$

2. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, S_n est à valeurs dans $\{2k-n\,;\, k \in [\![0,n]\!]\}$ et

$$\forall k \in [\![0,n]\!]\,,\ \mathbf{P}(S_n = 2k-n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

3. En déduire $\mathbf{P}(S_n = 0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. On suppose dans cette question que $p \neq \dfrac{1}{2}\cdot$

a. Démontrer que $p(1-p) \in \left[0, \frac{1}{4}\right[$.

b. En déduire que $\mathbf{E}(N_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \dfrac{1}{\sqrt{1-4p(1-p)}}\cdot$

5. On étudie dans cette question le cas où $p = \dfrac{1}{2}\cdot$ Démontrer que $\mathbf{E}(N_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.

6. Interpréter ces résultats en termes de retours à l'origine de la marche aléatoire.

Partie III – Marches aléatoires équilibrées dans $\mathbb{Z}^2$

Soit $X_0 = (0,0)$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur Δ où

$$\Delta := \{e_1\,, -e_1\,, e_2\,, -e_2\} \quad \text{et} \quad (e_1, e_2) \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^2$$

On note $O := (0,0)$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}\,,\ S_n := \sum_{k=0}^{n} X_k \ \text{ et } \ N_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{(S_{2k}=O)}$$

La variable S_n représente donc le point courant après n déplacements aléatoires selon e_1, $-e_1$, e_2 ou $-e_2$ (avec une probabilité $\frac{1}{4}$ pour chacune de ces directions) en partant de l'origine O dans le plan $\mathbb{R}^2$.

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathscr{U}(\Delta)$. On note $X = (A, B)$ où A et B sont les coordonnées de X. Ce sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{1, 0, -1\}$.

a. Déterminer les lois des variables aléatoires A et B. Les variables A et B sont elles indépendantes ?

b. Démontrer que les variables aléatoires $A+B$ et $A-B$ suivent des lois de Rademacher (on déterminera leur paramètre) puis établir qu'elles sont indépendantes.

2. On écrit désormais $X_i = (A_i, B_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ où A_i et B_i sont des variables aléatoires à valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$ et on pose $C_i := A_i + B_i$ et $D_i = A_i - B_i$.

a. Déterminer les lois des variables aléatoires $C_1 + \cdots + C_n$ et $D_1 + \cdots + D_n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

b. En déduire que $\mathbf{P}(S_{2n} = O) = \dfrac{1}{4^{2n}} \dbinom{2n}{n}^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de $\mathbf{E}(N_n)$.

Partie IV – Marches aléatoires équilibrées dans $\mathbb{Z}^3$

Soit $X_0 = (0,0,0)$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé, indépendantes et suivant la même loi uniforme sur Δ où

$$\Delta := \{e_1, -e_1, e_2, -e_2, e_3, -e_3\} \quad \text{et} \quad (e_1,e_2,e_3) \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^3$$

On note $O := (0,0,0)$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\ S_n := \sum_{k=0}^{n} X_k \quad \text{et} \quad N_n := \sum_{k=0}^{n} \mathbb{1}_{(S_{2k}=O)}$$

1. Démontrer que, $\forall n\in\mathbb{N}$, $i!\,j!\,k! \geqslant (n!)^3$ pour tout $(i,j,k)\in\mathbb{N}^3$ tel que $i+j+k=3n$.

INDICATION : Procéder par récurrence. Quitte à permuter les variables, on pourra supposer que $k\leqslant j\leqslant i$. Pour passer du rang n au rang $n+1$, on pourra remarquer que, si $i+j+k=3n+3$, alors $i\geqslant n+1$ et faire une disjonction de cas en remarquant que $i!\,j!\,k! = i\,(i-1)\,(i-2)\,(i-3)!\,j!\,k!$ dans le cas où $i\geqslant n+3$.

2. Justifier que

$$\forall n\in\mathbb{N},\ \sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3\\ i+j+k=3n}} \frac{(3n)!}{i!\,j!\,k!} = 3^{3n}$$

INDICATION : Dénombrer de deux façons différentes l'ensemble $[\![0,2]\!]^{3n}$.

3. Établir que, pour $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{P}(S_{2n}=O) = \frac{(2n)!}{6^{2n}} \sum_{\substack{(i,j,k)\in\mathbb{N}^3\\ i+j+k=n}} \frac{1}{i!^2\,j!^2\,k!^2}$$

INDICATION : Pour que $S_{2n}=O$, il faut et il suffit que, parmi les variables $X_1,\ldots,X_{2n}$, il y en ait autant valant e_1 que $-e_1$, autant valant e_2 que $-e_2$ et autant valant e_3 que $-e_3$. En notant respectivement i, j et k ces nombres respectifs, on a $i+j+k=n$...

4. On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $M_n := \dfrac{(6n)!\,3^{3n}}{(3n)!\,6^{6n}\,(n!)^3}$. Déterminer un équivalent simple de M_n.

5. Établir que, pour tout n dans $\mathbb{N}^*$:

$$\mathbf{P}(S_{6n}=O) \geqslant \frac{1}{6^2}\mathbf{P}(S_{6n-2}=O) \quad \text{et} \quad \mathbf{P}(S_{6n}=O) \geqslant \frac{1}{6^4}\mathbf{P}(S_{6n-4}=O)$$

6. En déduire l'existence de $\ell\in\mathbb{R}$ tel que $\mathbf{E}(N_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell$.

INDICATION : On pourra comparer $\mathbf{P}(S_{6n}=O)$ et M_n.

VI. Indications

1

La variable Y est de Bernoulli.

2

La variable P_n est à valeurs dans $\{-1,1\}$.

3

On peut modéliser l'expérience par $\Omega := [\![1,n]\!]^{[\![1,p]\!]}$ muni de l'équiprobabilité. La variable Y s'exprime facilement au moyen des X_k et de fonctions indicatrices.

4

Conditionner selon les valeurs prises par X.

5

On trouve $(\cos t)^n$.

6

La variable $\operatorname{rg} M$ suit une loi de Bernoulli et $\operatorname{tr} M = X_1+\cdots+X_n$ est la somme de n variables i.i.d. de loi $\mathscr{B}(p)$.

7

Au 1., on pourra s'aider des événements A_k : la boule k n'est pas dans l'urne i. Remarquer ensuite que $Y_n = T_1+\cdots+T_n$.

8

La formule donnant l'espérance se comprend bien en sommant « par colonnes » :

$$\begin{array}{rcccc}
\mathbf{P}(X>0) = & \mathbf{P}(X=1)+ & \mathbf{P}(X=2)+ & \mathbf{P}(X=3)+ & \cdots \\
\mathbf{P}(X>1) = & & \mathbf{P}(X=2)+ & \mathbf{P}(X=3)+ & \cdots \\
\mathbf{P}(X>2) = & + & + & \mathbf{P}(X=3)+ & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\hline
\mathbf{E}(X) = & \mathbf{P}(X=1)+ & 2\mathbf{P}(X=2)+ & 3\mathbf{P}(X=3)+ & \cdots
\end{array}$$

Il reste à formaliser. Reconnaître une somme de Riemann au 2.b..

9

On trouve que $\mathbf{E}(X) = \frac{n+1}{k+1}$ en utilisant les $\mathbf{P}(X \geqslant i)$ et la relation

$$\sum_{i=k}^{n} \binom{i}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

10

Utiliser des fonctions indicatrices.

11

Exploiter l'indépendance des U_i pour calculer $\mathbf{E}\big(e^{tV_n}\big)$.

12

Pour $i \neq 0$, on a $(Z = i) = \bigsqcup_{k=0}^{n-i} \big((X = i+k) \cap (Y = k)\big) \sqcup \bigsqcup_{k=0}^{n-i} \big((Y = i+k) \cap (X = k)\big)$.

13

La variable X suit la loi binomiale de paramètres $\binom{n}{2}$ et p.

14

Pour l'implication non triviale, se ramener à système linéaire (dont la matrice est de Vandermonde) d'inconnues $\mathbf{P}(X = x_i)$ pour $i \in [\![0, n]\!]$ ou bien utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.

15

On trouve $A = \begin{pmatrix} 1-a & a \\ b & 1-b \end{pmatrix}$.

16

Appliquer la formule des probabilités totales au 1.

17

On a $X_n = 2S_n - n$ et S_n suit la loi $\mathscr{B}(n, p)$. À l'avant dernière question ; on remarquera que

$$(X_n \leqslant 0) \subset \left(\left|\frac{X_n}{n} - (2p-1)\right| \geqslant 2p-1\right)$$

18

C'est une application de la formule du transfert et de l'inégalité de convexité usuelle.

19

On trouve $n \geqslant 1000$ en appliquant l'inégalité de Tchebychev par la variable aléatoire égale au nombre de *face*.

20

In the 1., remark that $\mathbf{P}(X > 0) = \mathbf{P}(X \geqslant 1)$. For the 2., show that $X \leqslant X \mathbb{1}_{\{X>0\}}$.

21

Remarquer que $(|X-u| \leqslant a, |Y-v| \leqslant b) \subset (|X+Y-u-v| \leqslant a+b)$.

22

Au 4, on pourra simplement étudier une fonction.

23

Au 1., on pourra se ramener à étudier une fonction de la variable y/x. Au 2., on remarquera que, lorsque cela a un sens,

$$\frac{X}{\mathbf{E}(X^p)^{1/p}} \frac{Y}{\mathbf{E}(Y^q)^{1/q}} \leqslant \frac{X^p}{p\mathbf{E}(X^p)} + \frac{Y^q}{q\mathbf{E}(Y^q)}$$

24

Minimiser le majorant du 1. Cette inégalité est plus fine que celle de Tchebychev dans le cas où $\varepsilon < \sigma$.

25

Au 3, remarquer que t^X et t^Y sont indépendantes pour tout $t \in \mathbb{R}$.

26

Utiliser un argument d'algèbre linéaire au 1.

27

Raisonner par l'absurde. On pourra par exemple utiliser les fonctions génératrices.

28

Les trois premières questions du I. se résolvent en appliquant la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements $((Y_n = k))_{k \in [\![1,n]\!]}$.

29

Au IV.3., on utilisera le résultat fin sur l'inégalité triangulaire obtenu au I.

30

La partie IV. est très difficile dans l'ensemble.