

La géométrie est l'art de raisonner juste sur des figures fausses.

René Descartes



Racines d'arbres, Van Gogh

11 Polynômes	1
I Généralités	2
II Racines	3
III Relations coefficients-racines	4
IV Familles de polynômes	4
V Équations	5
VI Aspects linéaires	6
VII Problèmes	8
VIII Indications	9

I. Généralités

1 ? _____ Avis de recherche _____

Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $X^2 + 2$ divise $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$.

2 ? _____ Un calcul de reste *f* _____

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le reste de la division euclidienne de $\prod_{k=1}^n \left(\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)X + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \right)$ par $X^2 + 1$.

3 ? _____ Coefficients d'un produit *f* _____

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les coefficients de $P = (1 + X + \dots + X^n)^2$.

4 ? _____ X PC-2008 *ff* _____

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré n . Si $a \in \mathbb{R}$, on pose $Q_a(X) = P(X + a)$.

Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $a \geq r$, Q_a a tous ses coefficients positifs.

5 ? _____ Polynômes divisibles par leur dérivée *fff* _____

Déterminer les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ divisibles par leur polynôme dérivé P' .

6 ? _____ Polynômes à valeurs prescrites *fff* _____

Pour tout polynôme P , on note $\bar{P}$ le polynôme dont les coefficients sont les conjugués de ceux de P .

1. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{C}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

2. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

a. Démontrer que $\forall z \in \mathbb{U}, P(z) z^d \bar{P}\left(\frac{1}{z}\right) = z^d$ où $d := \deg P$.

b. En déduire que P est un monôme.

c. Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{U}) \subset \mathbb{U}$.

7 ? _____ Polynômes réels à valeurs positives – X PC-2012 *fff* _____

1. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}[X]^4$. Montrer que $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2)$ est la somme de deux carrés de $\mathbb{R}[X]$.

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ non constant tel que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$. Montrer que $\exists (A, B) \in \mathbb{R}[X]^2, P = A^2 + B^2$.

II. Racines

8 ? _____ Racines simples _____

Soit $n \in \mathbb{N}$. Le polynôme $P_n = \sum_{k=0}^n \frac{X^k}{k!}$ possède-t-il une racine multiple ?

9 ? _____ Une décomposition remarquable f _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Décomposer $P_n := 1 + \frac{X}{1!} + \dots + \frac{X(X+1) \cdots (X+n-1)}{n!}$ en produit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$.

10 ? _____ Un peu d'arithmétique f _____

Soit $P(X) = X^5 - X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que le polynôme $P(X)$ admet une unique racine réelle et que celle-ci est irrationnelle.
2. Montrer que le polynôme $Q(X) = 2X^3 - X^2 - X - 3$ a une racine rationnelle que l'on calculera. En déduire sa décomposition en produit de facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.

11 ? _____ Calcul d'un produit f _____

Soit $P := X^{100} + 2X + 3$ et $z_1, \dots, z_{100}$ les racines complexes de P .

1. Factoriser $X^3 + 1$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}$.

2. En déduire que $\prod_{k=1}^{100} (1 + z_k^3) = 26$.

12 ? _____ Racines n -ème de l'unité f _____

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Rappeler sans démonstration la décomposition de $X^n - 1$ en produit d'irréductibles sur $\mathbb{C}$.

2. En déduire une simplification de $\prod_{k=0}^{n-1} \left(a - b e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$ pour $(a, b) \in \mathbb{C}^2$.

13 ? _____ En quête d'une racine double f _____

Pour tout a dans $\mathbb{C}$, on pose $P_a = X^4 + 8(1-i)X + a$.

1. Soit $a \in \mathbb{C}$. Calculer le reste R_a dans la division euclidienne de P_a par P'_a .
2. Déterminer les a dans $\mathbb{C}$ tels que P_a admette une racine double.

14 ?

Localisation des racines ff

Montrer que $P := 2X^3 - X^2 + 1$ admet une racine réelle α et deux racines non réelles β et $\bar{\beta}$, toutes trois de module strictement inférieur à un..

III. Relations coefficients-racines

15 ?

Relations coefficients-racines f

Déterminer les racines de $P := X^4 - 5X^3 + 9X^2 - 15X + 18$ sachant que le produit de deux d'entre elles vaut 6.

16 ?

Relations coefficients-racines ff

Soit $P = X^3 + 6X^2 + 2X + 1$. Trouver $Q \in \mathbb{R}[X]$ dont les racines sont les carrés de celles de P .

17 ?

Calcul de $\zeta(2)$ fff

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}, \frac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1}x} = P_n(\cotan^2 x)$.
2. Déterminer les racines de P_n puis calculer leur somme.
3. Prouver que $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[, \sin x < x < \tan x$.
4. En déduire que $\frac{n(2n-1)}{3} < \sum_{k=1}^n \left(\frac{2n+1}{k\pi}\right)^2 < \frac{n(2n+2)}{3}$.
5. Montrer que $\sum \frac{1}{k^2}$ converge et que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

IV. Familles de polynômes

18 ?

Étude d'une suite de polynômes

Considérons la suite de polynômes définie par récurrence de la façon suivante

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall k \in \mathbb{N}, P_{k+1} = (1 + X^2)P'_k - (2k+1)XP_k$$

Calculer le degré et le coefficient dominant du polynôme P_k .

19 ?*Back to Tchebychev f*

Soit $(T_n)_{n \geq 0}$ la suite de polynômes réels définie par $T_0 = 1$, $T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$.

1. Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la parité, le degré et le coefficient dominant de T_n .
2. Montrer que, $\forall n \geq 0$, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos nt = T_n(\cos t)$.

20 ?*Polynômes d'Euler ff*

Soit ϕ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$ définie par $\forall P \in \mathbb{R}[X]$, $\phi(P) := \frac{P(X+1) + P(X)}{2}$.

1. Démontrer que ϕ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note U_n l'unique polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $\phi(U_n) = \frac{X^n}{n!}$.
 - a. Démontrer que $U_0 = 1$ et, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $U_n(0) + U_n(1) = 0$ et $U'_n = U_{n-1}$.
 - b. Établir que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n(1-X) = (-1)^n U_n(X)$.

21 ?*Les polynômes de Tchebychev fff*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer qu'il existe un unique polynôme réel T_n tel que, $\forall t \in \mathbb{R}$, $\cos nt = T_n(\cos t)$.
2. Expliciter T_k pour $k \leq 3$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, trouver une relation entre T_{n+1} , T_n et T_{n-1} .
4. Préciser, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la parité, le degré et le coefficient dominant de T_n .
5. Déterminer les racines de T_n . On précisera les ordres de multiplicité.
6. Établir que, pour tout $n \geq 2$, $(X^2 - 1)T''_n + XT'_n - n^2 T_n = 0$.
7. On pose $T_n = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Dédurre de ce qui précède une relation entre a_{k+2} et a_k .
8. Prouver que $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $2k \leq n$, $a_{n-2k} = (-1)^k n 2^{n-1-2k} \frac{(n-k-1)!}{k!(n-2k)!}$.

V. Équations

22 ?*La conjugaison est-elle polynomiale ? f*

Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = \bar{z}$?

23 ? *Polynômes de valeur absolue constante f*

Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $\forall x \in [0, 1], |P(x)| = 1$.

24 ? *Polynômes et racine carrée f*

Démontrer qu'il n'existe aucun polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(k) = \sqrt{k^2 + 1}$.

25 ? *Quelques équations ff*

Résoudre les équations d'inconnue $P \in \mathbb{R}[X]$ suivantes :

1. $(X+3)P(X) = XP(X+1)$;
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$;
3. $(P')^2 = 4P$;
4. $P(X^2+1) = P(X)^2+1$ et $P(0) = 0$;
5. $P \circ P = P$;
6. $Q(X+a) + Q(X-a) = 2Q(X)$ où $a \in \mathbb{R}^*$.

26 ? *Mines PC-2019 ff*

On note E l'équation $P(X^2) = P(X)P(X+1)$ d'inconnue $P \in \mathbb{C}[X]$. Dans les quatre premières questions, on considère une solution P non nulle de E.

1. Montrer que P est unitaire.
2. Démontrer que l'ensemble des racines de P est stable par l'application $\rho : z \mapsto z^2$.
3. Soit λ une racine non nulle de P. Montrer que $|\lambda| = 1$.
4. Déterminer l'ensemble $\{z \in \mathbb{C}; |z| = |z-1| = 1\}$.
5. Résoudre l'équation E.

VI. Aspects linéaires

27 ? *Interpolation avec condition sur la dérivée f*

On considère $x_0, \dots, x_n$ des nombres complexes deux à deux distincts et $y_0, y'_0, \dots, y_n, y'_n$ dans $\mathbb{C}$.

Montrer que $\exists! H \in \mathbb{C}_{2n+1}[X]$ vérifiant $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, H(x_k) = y_k$ et $H'(x_k) = y'_k$.

28 ? *Calcul d'une dimension f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X]; \sum_{k=0}^n P^{(k)}(1) = 0 \right\}$.

1. Montrer que A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$. Déterminer sa dimension.

2. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Déterminer $A \cap \text{Vect}(1, (X-1)^k)$.
3. En déduire une base de A .

29 ?*Mines PC-2019 f*

Pour $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}[X]$, on note ϕ l'endomorphisme de $\mathbb{C}[X]$ défini par

$$\phi(P) = \sum_{k=0}^n a_k P(X+k)$$

Déterminer une CNS sur $(a_0, \dots, a_n)$ pour que ϕ soit un isomorphisme.

30 ?*Mines PC-2019 ff*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et ϕ_n l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\phi_n(P) = P - P'$.

1. Montrer que ϕ_n est bijectif.
2. Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. Montrer l'existence et l'unicité de $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $R - R' = Q$.
3. On reprend les notations de la question précédente.
 - a. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, Q(x) \geq 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, R(x) \geq 0$.
 - b. On suppose que R est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$. Montrer qu'il en est de même pour Q .

31 ?*Une base ff*

Soit $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $P_k := (X+k)^n$. On considère $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$\lambda_0 P_0 + \dots + \lambda_n P_n = 0$$

1. Démontrer que $\forall m \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n \lambda_k (X+k)^m = 0$ puis $\sum_{k=0}^n \lambda_k k^m = 0$.
2. En déduire que $\forall Q \in \mathbb{R}_n[X], \sum_{k=0}^n \lambda_k Q(k) = 0$.
3. Établir que $(P_0, \dots, P_n)$ est libre.

VII. Problèmes

32 ?

Quelques applications des polynômes de Tchebychev

Ce problème porte sur la famille des polynômes de Tchebychev $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, définie par la relation de récurrence suivante :

$$T_0 := 1, T_1 := X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, T_{n+2} := 2XT_{n+1} - T_n$$

Après une étude spécifique, nous en donnerons deux applications classiques à la trigonométrie (théorème de Niven) et à l'analyse (minimum de la norme infinie sur $[-1, 1]$ pour P unitaire de degré n).

La partie II sur le théorème de Niven étant sensiblement plus délicate, IL EST CONSEILLÉ DE NE L'ABORDER QUE SI TOUT LE RESTE DU DEVOIR A ÉTÉ INTÉGRALEMENT TRAITÉ. La partie III est indépendante du II.

Partie I – Propriétés usuelles des polynômes de Tchebychev

1. Calculer T_2, T_3 et T_4 .
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Démontrer les propriétés suivantes :
 - a. T_n est de degré n ;
 - b. T_n est de coefficient dominant 2^{n-1} ;
 - c. $T_n(-X) = (-1)^n T_n(X)$;
 - d. Tous les coefficients de T_n sont dans $\mathbb{Z}$;
 - e. $T_n(1) = 1$.
3. Montrer que, pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$ tel que $m \leq n$, $2T_n T_m = T_{n+m} + T_{n-m}$.
4. En déduire que $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$, $T_m \circ T_n = T_{mn}$.
5. Prouver que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n(\cos \alpha) = \cos(n\alpha)$.
6. Prouver que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$.
7. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, T_n est scindé sur $\mathbb{R}$, à racines simples dans $] -1, 1[$.

Partie II – Application au théorème de Niven

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\frac{\theta}{\pi} \in \mathbb{Q}$ et $\cos \theta \in \mathbb{Q}$.

On considère (p, q) et (r, s) dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$, couples d'entiers premiers entre eux, tels que $\theta = \pi \frac{p}{q}$ et $\cos \theta = \frac{r}{s}$.

1. En calculant $T_{2q}(\cos \theta)$, justifier qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $s = 2^k$.
2. On suppose dans cette question que $k \in \mathbb{N}^*$. Justifier que $\cos(2\theta)$ est rationnel, et que l'écriture irréductible de $\cos(2\theta)$ possède 2^{2k-1} comme dénominateur.

3. Après avoir montré que $\{\cos(p\theta); p \in \mathbb{N}\}$ est fini, établir que $k \leq 1$, puis que $\cos \theta \in \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$.

Autrement dit, parmi les angles multiples rationnels de π , les seuls dont le cosinus est rationnel sont les solutions évidentes $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \pi$ et tous ceux qui leur sont congrus modulo π .

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 3$, $\frac{1}{\pi} \operatorname{Arccos} \frac{1}{n}$ est irrationnel.

Partie III – Application au calcul de $\inf_{P \in \mathcal{U}_n} \|P\|_\infty$

Pour $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\|P\|_\infty := \max\{|P(t)|; t \in [-1, 1]\}$.

Dans cette partie, on fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer $\|T_n\|_\infty$.

2. Pour $k \in [0, n]$, on note $x_k := \cos \frac{k\pi}{n}$. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$, de degré n , de coefficient dominant λ .

Le but de cette question est de prouver que $\|P\|_\infty \geq \frac{|\lambda|}{2^{n-1}}$.

Quitte à considérer $-P$, on peut imposer sans perte de généralité que $\lambda > 0$.

On raisonne par l'absurde en supposant que $\|P\|_\infty < \frac{\lambda}{2^{n-1}}$, et on pose $Q := 2^{n-1}P - \lambda T_n$.

a. Pour tout $k \in [0, n]$, déterminer $T_n(x_k)$.

b. Justifier que $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, et pour $k \in [0, n]$, déterminer le signe de $Q(x_k)$.

c. Conclure.

3. On note $\mathcal{U}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n de $\mathbb{R}[X]$. Déterminer $\inf_{P \in \mathcal{U}_n} \|P\|_\infty$.

33 ?

Introduction au calcul ombraal dans $\mathbb{R}_n[X]$

Dans tout ce problème, on fixe n dans $\mathbb{N}$.

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on considère les applications d'évaluation en a et de translation selon a :

$$\begin{array}{ccc} e_a : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R} & \text{et} & \tau_a : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(a) \qquad \qquad P \longmapsto P(X+a) \end{array}$$

On note également $D : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ l'application de dérivation usuelle.

Ces applications sont linéaires, on ne demande pas de le vérifier.

Partie I – L'algèbre ombrale $\mathcal{F}_n$

Pour tout $u := (u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on définit l'application $f_u := \sum_{k=0}^n u_k D^k$ et on note $\mathcal{F}_n := \{f_u; u \in \mathbb{R}^{n+1}\}$.

Par exemple, pour $n := 3$ et $u := (1, -2, 1, 3)$, on a $f_u(P) = P - 2P' + P'' + 3P^{(3)}$ pour tout P dans $\mathbb{R}_3[X]$.

1. Montrer que, pour tout $u \in \mathbb{R}^{n+1}$, l'application f_u est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $u := (u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Calculer, pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $(e_0 \circ f_u)(X^k)$.
3. Établir que l'application suivante est linéaire et injective :

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]) \\ u &\longmapsto f_u \end{aligned}$$

4. Justifier que $\mathcal{F}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$. Quelle est sa dimension ?
5. Justifier que $\mathcal{F}_n$ est une sous-algèbre de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$, i.e. est stable par la composition et contient $\text{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$.
6. Soit $u = (u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ non nul. On note $i := \min\{k \in \llbracket 0, n \rrbracket; u_k \neq 0\}$. Montrer que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \deg f_u(P) = \begin{cases} \deg P - i & \text{si } i \leq \deg P \\ -\infty & \text{si } i > \deg P \end{cases}$$

On dira que i est l'ordre de l'opérateur f_u .

7. On suppose dans cette question que n est non nul. Expliciter un endomorphisme ψ de $\mathbb{R}_n[X]$ qui n'appartient pas à la sous-algèbre $\mathcal{F}_n$.

Partie II – Application aux formes linéaires sur $\mathbb{R}_n[X]$ et au commutant de l'ensemble des translations

1. Détermination de $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$.
 - a. Démontrer que l'application suivante est bien définie et linéaire :

$$\begin{aligned} \theta : \mathbb{R}^{n+1} &\longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) \\ u &\longmapsto e_0 \circ f_u \end{aligned}$$

- b. Établir que $\mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R}) = \{e_0 \circ f; f \in \mathcal{F}_n\}$.

2. Endomorphismes de $\mathbb{R}_n[X]$ commutant avec les translations. On note

$$\mathcal{C}_n := \{\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X]); \forall a \in \mathbb{R}, \phi \circ \tau_a = \tau_a \circ \phi\}$$

L'objectif de cette question est d'établir que $\mathcal{C}_n = \mathcal{F}_n$.

- a. Montrer $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{C}_n$. Dans les deux prochaines questions, on fixe $\phi \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_n[X])$.
- b. Montrer qu'il existe $f \in \mathcal{F}_n$ tel que $e_0 \circ f = e_0 \circ \phi$.
- c. On suppose dans cette question que $\phi \in \mathcal{C}_n$. Montrer $f = \phi$ puis conclure.

INDICATION : On pourra remarquer que, pour tout réel a , $e_0 \circ \tau_a = e_a$.

Partie III – Formules de Taylor et de Newton généralisées

Dans cette partie, on suppose que $n \in \mathbb{N}^*$ et l'on fixe un élément $f \in \mathcal{F}_n$ d'ordre 1.

1. Déterminer une base et la dimension de $\text{Ker } e_0$.
2. Déterminer les sous-espaces vectoriels $\text{Im } f$ et $\text{Ker } f$. INDICATION : Se souvenir que f est d'ordre 1.
3. En déduire que f induit un isomorphisme de $\text{Ker } e_0$ sur $\mathbb{R}_{n-1}[X]$. On le notera $\hat{f}$.
4. En déduire qu'il existe une unique famille $(Q_0, \dots, Q_n)$ de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que
 - i) $Q_0 = 1$;
 - ii) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, Q_k(0) = 0$;
 - iii) $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, f(Q_k) = kQ_{k-1}$.

et montrer que cette famille est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

5. Montrer la formule de Taylor généralisée :

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \frac{e_0(f^k(P))}{k!} Q_k$$

6. Montrer la formule de Newton généralisée :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, Q_k(x+y) = \sum_{\ell=0}^k \binom{k}{\ell} Q_\ell(x) Q_{k-\ell}(y)$$

INDICATION : On pourra appliquer la question précédente à $\tau_y(Q_k)$ où $y \in \mathbb{R}$.

VIII. Indications

1 ↪ _____

Calculer le reste dans la division euclidienne de $X^4 + X^3 + aX^2 + bX + 2$ par $X^2 + 2$.

2 ↪ _____

Exploiter les racines de $X^2 + 1$.

3 ↪ _____

Appliquer la formule du cours.

4 ↪ _____

Formule de Taylor en a : les coefficients sont des dérivées en a .

5 ↪ _____

On peut procéder à une analyse. En supposant que $P = QP'$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\deg P \geq 1$, on a $\deg Q = 1$ donc Q a une racine réelle a . Intéressez-vous (par exemple) à la multiplicité de a dans P .

6 ↪ _____

Utiliser les polynômes de Lagrange au 1. et le théorème de D'Alembert-Gauss au 2.

7 ↪ _____

Au 1., on pourra utiliser le fait que $a^2 + b^2 = |a + ib|^2$ pour trouver la relation. Décomposer P en produit d'irréductibles sur $\mathbb{R}$ au 2.

8 ↪ _____

Une racine de P_n dont la multiplicité est supérieure à 2 est aussi une racine de P'_n .

9 ↪ _____

On commencera par P_1 , P_2 , etc.

10 ↪ _____

Raisonner par l'absurde au 1.

11 ↪ _____

Le produit vaut $P(-1)P(-j)P(-j^2)$.

12 ↻

On a $X^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} \left(X - e^{\frac{2ik\pi}{n}} \right)$.

13 ↻

Faire le lien entre les racines multiples de P_a et l'unique racine de R_a .

14 ↻

Encadrer α en utilisant des théorèmes d'analyse puis s'aider du produit des racines de P pour majorer $|\beta|$.

15 ↻

Exploiter les relations coefficients-racines. On trouve $2, 3, \pm i\sqrt{3}$.

16 ↻

Exprimer les coefficients de $Q(X) = (X - a^2)(X - b^2)(X - c^2)$ en fonction de a, b et c .

17 ↻

Exploiter les relations coefficients-racines.

18 ↻

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, P_k est de degré k et de coefficient dominant $(-1)^k k!$.

19 ↻

T_n a la parité de n , son coefficient dominant vaut 2^{n-1} pour $n \in \mathbb{N}^*$ et il est de degré n . Raisonner par récurrence au 2.

20 ↻

Au 1., on pourra remarquer que ϕ induit un endomorphisme sur $\mathbb{R}_n[X]$ pour tout entier naturel n .

21 ↻

Raisonner par récurrence au a. On trouve $T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}$. Ne pas raisonner par récurrence au f.

22 ↻

La réponse est négative : raisonner par l'absurde.

23 ↻

On remarquera que P^2 est un polynôme.

24

Raisonner par l'absurde en considérant P^2 .

25

Rechercher le degré d'une éventuelle solution non nulle.

26

Remarquer que si z est une racine de P , alors z^2 aussi, donc z^4 aussi, etc. De plus, si P est non nul, P admet un nombre fini de racines.

27

Reformuler la proposition à démontrer en terme de bijectivité.

28

Remarquer que A est le noyau d'une forme linéaire.

29

Que dire de l'application ϕ si elle conserve le degré ?

30

Au 3.a. et 3.b., on pourra considérer $x \mapsto e^{-x}R(x)$.

31

Au 3., on pourra utiliser les polynômes d'interpolation de Lagrange.

32**33**