Exercices 12 | Séries numériques

Un mathématicien n'a pas parfaitement compris ses propres travaux tant qu'il ne les a pas clarifiés au point de pouvoir aller dans la rue les expliquer à la première personne venue.

Joseph-Louis Lagrange

36 vues du mont Fuji, Hokusai

I. Natures

1 — *Des puissances*

Étudier la convergence la série de terme général $u_n := \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$.

2 — *Une série à paramètre f*

Étudier la nature de $\sum u_n$ où $u_n := \left(1+\dfrac{1}{n+1}\right)^{2n} - \left(1+\dfrac{2}{n+\alpha}\right)^{n}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$.

3 — *Fonctions circulaires réciproques f*

1. Montrer que $\arccos x \underset{x\to 1-}{\sim} \sqrt{2(1-x)}$.
2. En déduire la nature de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \arccos\left(\frac{2}{\pi}\arctan\left(n^2\right)\right)$.

4 — *Mines-Ponts PC-2012 f*

Soit $(a_n) \in (\mathbb{R}^+)^{\mathbb{N}}$.

1. On suppose que la série $\sum a_n$ converge. Montrer que la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.
2. Donner un exemple de suite (a_n) telle que la série $\sum a_n$ diverge et la série $\sum \sqrt{a_n a_{n+1}}$ converge.

5 — *Quelques natures f*

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les cas suivants :

1. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{(-1)^n n^\alpha + n^{2\alpha}}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}^*$;
2. $u_n = \dfrac{1}{n^{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}}$;
3. $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^{\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{n}\right)}}$;
4. $u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$ où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$;
5. $u_n = \arccos\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}\right) - \dfrac{\pi}{6}$ où $\alpha > 0$;
6. $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\left(\dfrac{\ln(n+1)}{\ln(n)}\right)^n - 1\right)$.

6 — *Autour de la série harmonique f*

Soit $a > 0$. Pour tout n dans $\mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{H}_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Démontrer l'existence de $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{H}_n = \ln n + \gamma + o(1)$.

2. Étudier la nature de la série de terme général $u_n = a^{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$.

7 — *Suite définie par récurrence ff*

Soit $(a_n)_{n\geqslant 1} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}^*}$. On pose $s_1 = 1$ et, pour tout entier naturel n non nul,

$$s_{n+1} = \frac{s_n + \sqrt{a_n + s_n^2}}{2}$$

Montrer que $\sum a_n$ converge *si et seulement si* $(s_n)_{n\geqslant 1}$ converge.

8 — *Quelques natures ff*

Déterminer la nature de la série $\sum u_n$ dans les deux cas suivants :

1. $u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$ au moyen d'un DAS.

2. $u_n = \sin\left(\pi\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right)$ en remarquant que $\forall n \in \mathbb{N},\ \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n \in \mathbb{Z}$.

.

II. Calculs de sommes

9 — *Un premier exemple*

Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $u_n := \sqrt[3]{n} + a\sqrt[3]{n+1} + b\sqrt[3]{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de convergence de $\sum u_n$.

2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ en cas de convergence.

10 — *La fonction ζ de Riemann f*

On admet que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}\cdot$ Existence et calcul de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}\cdot$

11 — *Sommes en vrac ff*

Convergence et calcul des sommes suivantes :

1. $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+3n}$; **2.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \arctan\left(\frac{1}{n^2+n+1}\right)$; **3.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{2^n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(1+a^{2^k}\right)}$ où $a \geqslant 0$; **4.** $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^3}{n!}$.

12 — *Une transformation ff*

Soit (u_n) une suite positive décroissante qui tend vers 0 telle que $\sum u_n$ converge.

1. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k(u_k - u_{k+1}) = \sum_{k=1}^{n} u_k - n u_{n+1}$.

2. Montrer que la série $\sum_{n \geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ converge et qu'elle a la même somme que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$.

3. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Prouver la convergence et calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)}$.

13 — *Mines PSI 2016 ff*

1. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$.

2. Montrer l'existence de $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} = \frac{\ln^2 n}{2} + \delta + o(1)$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln 2}{k} - \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{\ln k}{k}$.

4. En déduire que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k} = \left(\gamma - \frac{\ln 2}{2}\right)\ln 2$.

III. Sommes partielles et restes

14 — *Asymptotique des restes des séries de Riemann f*

Pour tout $\alpha > 1$, on pose $\displaystyle \mathrm{R}_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

1. Trouver un équivalent de R_n.

2. Donner une CNS de convergence de $\sum \mathrm{R}_n$.

15 — *Comparaison des sommes partielles et des restes ff*

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ deux séries à termes strictement positifs. On note $\mathrm{S}_n(u)$ (resp. $\mathrm{R}_n(u)$) la somme partielle d'ordre n (le reste d'ordre n sous réserve de convergence) de la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

1. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ converge.
   a. On suppose que $u_n = o(v_n)$. Montrer que $\mathrm{R}_n(u) = o\left(\mathrm{R}_n(v)\right)$.
   b. On suppose que $u_n \sim v_n$. Déduire de la question précédente que $\mathrm{R}_n(u) \sim \mathrm{R}_n(v)$.
2. On suppose que $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ divergente.
   a. On suppose que $u_n = o(v_n)$. Montrer que $\mathrm{S}_n(u) = o\left(\mathrm{S}_n(v)\right)$.
   b. On suppose que $u_n \sim v_n$. Déduire de la question précédente que $\mathrm{S}_n(u) \sim \mathrm{S}_n(v)$.
   c. Retrouver le théorème de Césaro comme cas particulier des deux résultats précédents.
3. *Autour du critère de D'Alembert*. On suppose que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \overline{\mathbb{R}}$.
   a. On suppose que $\ell = 0$. Démontrer que $\mathrm{R}_n(u) \sim u_{n+1}$.
   b. On suppose que $\ell \in]0,1[$. Déterminer un équivalent de $\mathrm{R}_n(u)$.
   c. On suppose que $\ell \in]1,+\infty[$. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}_n(u)$.
   d. On suppose que $\ell = +\infty$. Déterminer un équivalent de $\mathrm{S}_n(u)$.
4. *Une application à l'irrationalité de e*. On pose $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{n!}\cdot$
   a. Démontrer que $\mathrm{R}_n(u) \sim \dfrac{1}{(n+1)!}\cdot$
   b. Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N},\ n!\,q\,e = n!\,q\,\mathrm{S}_n(u) + n!\,q\,\mathrm{R}_n(u)$.
   c. En déduire que e est irrationnel.
5. *Détermination de deux équivalents.*
   a. Établir que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}\cdot$
   b. Déterminer un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$.

16 — *Théorème d'associativité restreinte (sommation par paquets)* ff

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série à termes réels et $\phi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ strictement croissante vérifiant $\phi(0) = 0$. Posons

$$\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = \sum_{k=\phi(n)}^{\phi(n+1)-1} u_k$$

1. On suppose que $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+)^{\mathbb{N}}$. Montrer que les séries $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} v_n$ sont de même nature et, qu'en cas de convergence, on a
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$$
2. Justifier que le résultat précédent est encore valable si $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ converge absolument.
3. On revient au cas général et on suppose remplies les trois conditions suivantes :

- $\Rightarrow$ $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$;
- $\Rightarrow$ $\exists \mathrm{M} > 0,\ \forall m \geqslant 0,\ \varphi(m+1) - \varphi(m) \leqslant \mathrm{M}$;
- $\Rightarrow$ $\sum\limits_{m\geqslant 0} v_m$ converge.

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est convergente et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \sum\limits_{m=0}^{+\infty} v_m$.

4. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n-(-1)^n}$.

5. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ peut diverger sous les seules hypothèses $u_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\sum\limits_{m\geqslant 0} v_m$ converge.

17 — *Commutative convergence, d'après X-PC 2012 ff*

Soit $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série réelle absolument convergente et σ une permutation de $\mathbb{N}$. Montrer que $\sum_{n\geqslant 0} u_{\sigma(n)}$ est convergente et de même somme que $\sum_{n\geqslant 0} u_n$.

IV. Critères de convergence

18 — *Critère de Cauchy f*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ une suite à termes positifs telle que $u_n^{1/n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

1. On suppose que $\ell \in [0,1[$. Montrer que $\sum u_n$ converge.

2. On suppose que $\ell \in]1,+\infty[\cup \{+\infty\}$. Montrer que $\sum u_n$ diverge.

3. Peut-on conclure dans le cas où $\ell = 1$?

19 — *Règle de Gauss et application à des séries hypergéométriques ff*

Soit $\sum u_n$ une série à termes strictement positifs. On suppose qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ et $k > 1$ tels que

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\beta}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^k}\right)$$

1. Établir l'existence de $\mathrm{C} > 0$ tel que $u_n \sim \dfrac{\mathrm{C}}{n^\beta}$. En déduire la nature de $\sum u_n$.

2. Dans cette question, on suppose l'existence de $(a,b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+a}{n+b}$.

a. Donner une cns de convergence de $\sum u_n$.

b. Calculer $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$ en cas de convergence. INDICATION : $(n+1)u_{n+1} - nu_n = au_n + (1-b)u_{n+1}$.

c. Application à la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\binom{n+p}{n}}$ pour $p \in \mathbb{N}$ tel que $p \geqslant 2$.

20 — *Introduction aux espaces ℓ^p ff*

Pour tout $p \in \mathbb{R}_+^*$, on note $\ell^p(\mathbb{R}) := \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\,;\, \sum |u_n|^p \text{ converge}\right\}$.

1. Soient (u_n) et (v_n) dans $\ell^2(\mathbb{R})$. Montrer que $(u_n v_n) \in \ell^1(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$, muni des opérations usuelles sur les suites, a une structure de $\mathbb{R}$-ev.
3. L'espace $\ell^2(\mathbb{R})$ est-il de dimension finie ?
4. Justifier que $\ell^1(\mathbb{R})$ est un sev de $\ell^2(\mathbb{R})$.

21 — *Critère de la loupe ff*

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive décroissante.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Vérifier que $nu_{2n} \leqslant u_{n+1} + \cdots + u_{2n} \leqslant nu_n$.
2. En déduire que $\sum u_n$ et $\sum 2^n u_{2^n}$ sont de même nature.
3. Discuter en fonction de $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+)^2$ la nature de $\displaystyle\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$.

22 — *Transformation d'Abel et application à une série trigonométrique ff*

Soit $\sum_{n\geqslant 0} a_n$ et $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ deux séries à valeurs réelles. Pour tout entier naturel n, on note respectivement A_n et B_n leurs sommes partielles d'ordre n.

1. Établir que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.
2. On suppose que la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers 0 en décroissant et que $(B_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée.

   Démontrer que $\sum_{n\geqslant 0} a_n b_n$ converge.
3. Justifier que le résultat précédent généralise le critère spécial des séries alternées.
4. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \dfrac{\cos n\theta}{n}$.
   - **a.** Démontrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.
   - **b.** En utilisant l'inégalité $|\cos x| \geqslant \cos^2 x$ pour $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\sum_{n\geqslant 1} |u_n|$ diverge.

23 — *De l'existence d'une plus petite série divergente à termes strictement positifs ff*

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}$, $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} u_k$.

1. On suppose que $\sum u_n$ converge. Déterminer les natures des séries $\sum \frac{u_n}{S_n}$ et $\sum \frac{u_n}{S_n^2}$.

2. Vérifier que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln S_n - \ln S_{n-1} \leqslant \frac{u_n}{S_{n-1}}$.

3. Reprendre la question 1. en supposant cette fois-ci que la série $\sum u_n$ diverge.

4. Existe-t-il $(u_n)_{n\geqslant 0} \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum u_n$ diverge et $\forall (v_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}_+^{\mathbb{N}},\ v_n = o(u_n) \implies \sum v_n$ converge ?

V. Applications des séries

24 — *X-PC 2008* *ff*

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $a_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}\right)$.

1. Montrer que $a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $a_n \sim \frac{C}{\sqrt{n}}$.

VI. Indications

1

Déterminer un équivalent de u_n.

2

Faire de l'asymptotique.

3

Remarquer que $\arccos x \sim \sin \arccos x$ au voisinage de 1.

4

Utiliser l'inégalité AG pour majorer $\sqrt{a_n a_{n+1}}$. Au 2., on pourra définir a_n selon la parité de n.

5

1. Effectuer un DL.
2. La série diverge. Trouver un équivalent.
3. La série converge. Effectuer un DL.
4. Mettre n en facteur dans les deux derniers logarithmes.
5. Utiliser un DL.
6. Rechercher un équivalent.

6

Le 1. a été traité dans le cours. On peut déduire du 1. un équivalent de u_n.

7

Vérifier que $\forall n \geqslant 1,\ 0 < s_{n+1} - s_n \leqslant \dfrac{a_n}{2}$.

8

Les deux séries convergent.

9

Factoriser par $\sqrt[3]{n}$ puis développer afin de trouver un équivalent.

10

Séparer les termes selon la parité de l'indice dans $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k^2}$.

11 ↺

1. Décomposer la fraction en éléments simples, on trouve $11/18$ après télescopage.
2. Télescopage (écrire l'expression comme une différence d'arctangentes), on trouve $\pi/2$.
3. Faire apparaître un télescopage. On trouve :
   - si $a = 1$, $\dfrac{2}{1+a}$;
   - si $a \neq 1$, $\dfrac{a+3}{a+1}$.
4. Décomposer X^3 dans la base $(1, X, X(X-1), X(X-1)(X-2))$ de $\mathbb{R}_3[X]$. On trouve $5e$. NB : on généralise sans peine au cas de la série de terme général $n^p/n!$.

12 ↺

Au 2., on prouvera par exemple que $\sum_{n\geqslant 0} n(u_n - u_{n+1})$ converge puis que $(nu_{n+1})_{n\geqslant 0}$ converge.

13 ↺

Au 1., on peut démontrer la convergence de la suite de terme général

$$a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln k}{k} - \frac{\ln^2 n}{2}$$

en étudiant celle de la série $\sum a_n$..

14 ↺

Appliquer la méthode des rectangles.

15 ↺

Au a., montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, $R_n^u \leqslant \varepsilon R_n^v$ APCR. Raisonner par l'absurde au d.

16 ↺

Au 1., utiliser des suites extraites.

17 ↺

Se ramener à des termes positifs. Vérifier que $\sum a_{\sigma(n)}$ converge puis que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_{\sigma(n)} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

18 ↺

Au 1., on pourra majorer u_n par une suite géométrique.

19 ↺

Poser $v_n := \ln\left(n^{\beta} u_n\right)$ et étudier la convergence de (v_n) en passant par la série $\sum(v_{n+1} - v_n)$.

20 ↺

On peut utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz au 1. ou l'inégalité classique

$$\forall (x, y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2,\ 2\sqrt{xy} \leqslant x^2 + y^2$$

Montrer que $\ell^2(\mathbb{R})$ est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ au 2.

21 ↺

Commencer par remarquer que $2^n u_{2^{n+1}} \leqslant u_{2^n+1} + \cdots + u_{2^{n+1}} \leqslant 2^n u_{2^n}$. Conclure en exploitant la monotonie des sommes partielles.

22 ↺

Au b., la série $\sum_{k\geqslant 1}(a_k - a_{k+1})\mathrm{B}_k$ converge absolument. Linéariser pour conclure au d.ii.

23 ↺

Mettre sous forme intégrale la différence des logarithmes au 1. Au 2., adapter l'inégalité démontrée au 1. à $\sum \frac{u_n}{\mathrm{S}_n^2}$ pour conclure.

24 ↺

Prouver que $\ln(a_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$ au moyen d'une série. Au b), intéressez-vous à la convergence de la suite $\left(\ln\left(\sqrt{n}a_n\right)\right)$ en utilisant une série. On peut également appliquer la sommation des relations de comparaison au b).