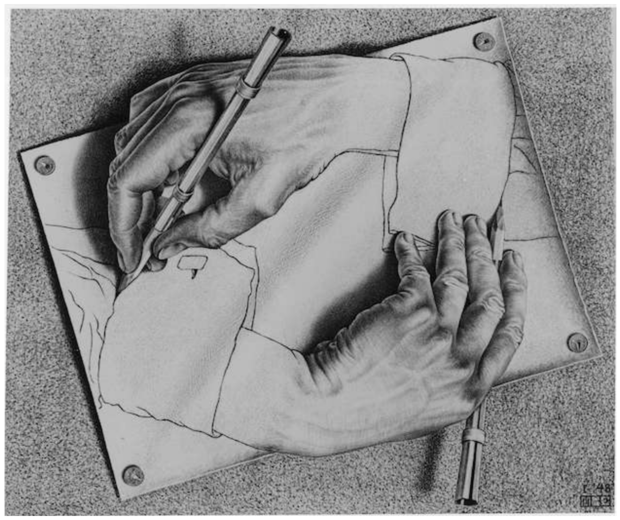
ALG 2 | Théorie des ensembles

« Les mathématiques ne sont pas une moindre immensité que la mer. »

Victor Hugo



Mains dessinant, Escher

I. Ensembles

1 — *Quelques relations*

Soit X, Y et Z des ensembles. Montrer que :

1. $X \setminus (Y \cup Z) = (X \setminus Y) \cap (X \setminus Z)$;
2. $X \setminus (Y \setminus Z) = (X \setminus Y) \cup (X \cap Z)$;
3. $X \setminus (Y \cap Z) = (X \setminus Y) \cup (X \setminus Z)$;
4. $(X \setminus Y) \setminus Z = X \setminus (Y \cup Z)$.

2 — *Egalité d'ensembles*

Soit X, Y et Z trois sous-ensembles d'un ensemble E. Montrer que $(X \cup Z) \cap (Y \cup \overline{Z}) = (X \cap \overline{Z}) \cup (Y \cap Z)$.

3 — *Petit recouvrement*

Soit A, B, C, D des ensembles. Montrer que si $A \subset C$, $B \subset D$, $C \cap D = \varnothing$ et $A \cup B = C \cup D$, alors $A = C$ et $B = D$.

4 — *Ensemble des parties*

Soit X et Y deux ensembles. Déterminer une *cns* sur (X, Y) pour que $\mathscr{P}(X) \subset \mathscr{P}(Y)$.

5 — *Trois ensembles*

Soit A, B et C trois ensembles. Donner une *cns* pour que $A \cup B = B \cap C$.

6 — *Autour des produits cartésiens* *f*

Soit Ω un ensemble et $E, F \in \mathscr{P}(\Omega)$ tels que $E \times F \subset (F \times \Omega) \cup (\Omega \times E)$. Montrer que $E \subset F$ ou $F \subset E$.

7 — *Inclusion de* $A \times B$ *dans* $B \times C$ *f*

Soit A, B et C trois ensembles non vides tels que $A \times B \subset B \times C$. Montrer que $A \subset C$.

8 — *Deux simplifications ensemblistes* *f*

Soit E un ensemble, et A, B, C des parties de E. Simplifier les expressions suivantes :

1. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap \overline{B})$;
2. $A \cup (\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B} \cap C)$.

9 — *Équations élémentaires* f

Soit E un ensemble, A et B des parties de E.

1. Discuter et résoudre l'équation $X \cap A = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

2. Idem avec l'équation $X \cup A = B$.

10 — *Une équation* f

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E. Discuter et résoudre $(A \cap X) \cup \left(B \cap \overline{X}\right) = \varnothing$.

11 — *X MP-2007* f

Soit A, B et C trois ensembles. Comparer $X = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$ et $Y = (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A)$.

12 — *Opérations ensemblistes* ff

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites d'ensembles.

1. Comparer pour la relation d'inclusion les ensembles

$$(A_0 \cup A_1) \cap (B_0 \cup B_1) \quad \text{et} \quad (A_0 \cap B_0) \cup (A_1 \cap B_1)$$

Y-a-t-il égalité en général ?

2. Justifier que $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} (A_p \cap B_q)$.

3. Donner sans démonstration une formule analogue pour $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right)$.

4. Les relations suivantes sont-elles vraies ?

$$\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cap B_n) \quad \text{et} \quad \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n\right) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (A_n \cup B_n)$$

13 — *Dévissage d'une réunion croissante en réunion disjointe* ff

Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ensembles croissante pour l'inclusion, ie telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n \subset A_{n+1}$. Construire une suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles deux à deux disjoints telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ A_n = \bigsqcup_{i=0}^{n} B_i$.

14 — *Dévissage d'une réunion fff*

Soit E un ensemble.

1. Soit A, B et C des parties de E. Montrer que $A \cup B \cup C = (A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C)$.

2. Soit n un entier au moins égal à 2, et $A_1, \dots, A_n$ des parties de E. Montrer que

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = (A_1 \setminus A_2) \cup (A_2 \setminus A_3) \cup \cdots \cup (A_{n-1} \setminus A_n) \cup (A_n \setminus A_1) \cup (A_1 \cap \cdots \cap A_n)$$

II. Injectivité, surjectivité et bijectivité

15

Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f_a(x) := \begin{cases} x + a & \text{si } x \geqslant 0 \\ x - a & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Déterminer les réels a pour lesquels f_a est injective. Même question pour surjective.

16 — *Autour de l'anneau $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$*

Étudier l'injectivité de $\phi : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(n, m) := n + m\sqrt{2}$.

17 — *Variations sur les opérations du cours f*

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On note $h = g \circ f$. Démontrer que :

1. Si h est surjective et g est injective, alors f est surjective.

2. Si h est injective et f est surjective, alors g est injective.

18 — *Une inéquation fonctionnelle f*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ injective, telle que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \leqslant n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = n$.

19 — *Dans $\mathscr{P}(E)$ f*

Pour E non vide, A et B dans $\mathscr{P}(E)$, montrer que l'application suivante n'est pas surjective :

$$f: \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathrm{E}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathrm{E}) \times \mathscr{P}(\mathrm{E}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & (\mathrm{X} \cup \mathrm{A}, \mathrm{X} \cup \mathrm{B}) \end{array}$$

20 — *Injectivité sur une réunion croissante f*

Soit E et F des ensembles, $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application et $(\mathrm{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties de E.

1. On suppose que f est injective sur deux parties A et B de E ; f est-elle injective sur $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$?
2. On suppose que $\mathrm{E} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{A}_n$. Montrer que si $\forall n \in \mathbb{N}$, $f|_{\mathrm{A}_n}$ est injective, alors f est injective sur E.

21 — *Fonctions à valeurs et variable entières f*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f(n) = 1 - n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. La fonction f est-elle injective ? surjective ?
2. Existe-t-il $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$?
3. Existe-t-il $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ telle que $h \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$?

22 — *Étude d'une application f*

On note $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels pairs et

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ \mathrm{X} & \longmapsto & 2\mathbb{N} \cap \mathrm{X} \end{array}$$

1. L'application ϕ est-elle injective ?
2. L'application est-elle surjective ? Déterminer son image, i.e. $\phi\langle \mathscr{P}(\mathbb{N}) \rangle$.

23 — *Variations sur les opérations du cours f*

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ et $g : \mathrm{F} \to \mathrm{G}$ deux applications. On note $h = g \circ f$. Démontrer que :

1. Si h est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Si h est injective et f est surjective, alors g est injective.

24 — *Composées ff*

Soit E un ensemble, $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_1, \ldots, f_n$ des applications de E dans E. Montrer que si $f_1 \circ f_2 \circ \cdots \circ f_n$ est injective et $f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1$ surjective, alors $f_1, \ldots, f_n$ sont bijectives.

25 — *Une surjection ff*

Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une surjection vérifiant $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) \geqslant n$. Démontrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

26 — *Composées bijectives ff*

Soit $f : A \to B$, $g : B \to C$, $h : C \to D$. Montrer que si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont des bijections, alors f, g et h sont toutes trois des bijections.

27 — *Fonctions sur les parties ff*

Soit E un ensemble, $A \in \mathscr{P}(E)$ et $\phi_A : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ définie par $\phi_A(X) = X \cap A$ pour tout $X \subset E$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante d'injectivité de ϕ_A.

2. Idem avec « *surjectivité* ».

28 — *Quelques constructions autour de l'équipotence fff*

Soit E et F des ensembles non vides tels qu'il existe $f : E \to F$ bijective. On se donne également un ensemble X non vide. Démontrer les propriétés suivantes :

1. $\exists g : E^2 \to F^2$ bijective ;

2. $\exists \phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(F)$ bijective ;

3. $\exists h : E^X \to F^X$ bijective ;

4. $\exists \ell : X^E \to X^F$ bijective ;

5. $\exists \psi : \mathbb{N} \to E$ bijective $\iff$ $\exists \phi : \mathbb{N} \to F$ bijective.

29 — *Dans $\mathscr{P}(E)$, suite et fin fff*

Soit A et B deux parties d'un ensemble E et $f : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(A) \times \mathscr{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B) \end{array}$

Donner des *cns* sur A et B pour que f soit injective. Idem avec surjective puis bijective. Donner f^{-1} le cas échéant.

30 — *un lemme utile pour la dénombrabilité fff*

Soit A un ensemble tel qu'il existe une bijection $\theta : A \to A^2$. Montrer qu'il existe une bijection de A sur A^3.

31 — *Une équation fonctionnelle fff*

Déterminer les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) + f\big(f(n)\big) = 2n$. Montrer que $f = \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$.

III. Images directes et images réciproques

32 — Images réciproques et opérations *f*

Soit des ensembles E, F, et $f \in \mathscr{F}(\mathrm{E},\mathrm{F})$. Montrer que pour tous sous-ensembles Y, Y_1 et Y_2 de F :

1. $\mathrm{Y}_1 \subset \mathrm{Y}_2 \implies f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1\rangle \subset f^{-1}\langle \mathrm{Y}_2\rangle$;
2. $f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \cap \mathrm{Y}_2\rangle = f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1\rangle \cap f^{-1}\langle \mathrm{Y}_2\rangle$;
3. $f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \cup \mathrm{Y}_2\rangle = f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1\rangle \cup f^{-1}\langle \mathrm{Y}_2\rangle$;
4. $f\left(f^{-1}\langle \mathrm{Y}\rangle\right) = \mathrm{Y} \cap f\langle \mathrm{E}\rangle$;
5. $f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1 \setminus \mathrm{Y}_2\rangle = f^{-1}\langle \mathrm{Y}_1\rangle \setminus f^{-1}\langle \mathrm{Y}_2\rangle$.

33 — Images directes et opérations *ff*

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application, A et B deux parties de E.

1. Prouver que $f\langle \mathrm{A} \cup \mathrm{B}\rangle = f\langle \mathrm{A}\rangle \cup f\langle \mathrm{B}\rangle$.
2. Montrer que $f\langle \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\rangle \subset f\langle \mathrm{A}\rangle \cap f\langle \mathrm{B}\rangle$. Y-a-t-il égalité en général ? Illustrer votre réponse par des exemples.
3. Prouver que $\forall \mathrm{A}, \mathrm{B} \subset \mathrm{E},\ f\langle \mathrm{A} \cap \mathrm{B}\rangle = f\langle \mathrm{A}\rangle \cap f\langle \mathrm{B}\rangle$ *si et seulement si* f est injective.

34 — Caractérisations de l'injectivité et de la surjectivité *ff*

Soit $f : \mathrm{E} \to \mathrm{F}$ une application.

1. Soit $\mathrm{A} \subset \mathrm{E}$. Prouver que $\mathrm{A} \subset f^{-1}\left\langle f\langle \mathrm{A}\rangle\right\rangle$.
2. Prouver que f est injective *si et seulement si* pour toute partie A de E, $\mathrm{A} = f^{-1}\left\langle f\langle \mathrm{A}\rangle\right\rangle$.
3. Soit $\mathrm{B} \subset \mathrm{F}$. Prouver que $f\left\langle f^{-1}\langle \mathrm{B}\rangle\right\rangle \subset \mathrm{B}$.
4. Prouver que f est surjective *si et seulement si* pour toute partie B de F, $f\left\langle f^{-1}\langle \mathrm{B}\rangle\right\rangle = \mathrm{B}$.

IV. Relations binaires

35 — L'ordre lexicographique *f*

On définit une relation binaire sur $\mathbb{N}^2$:

$$\text{pour tous } x = (x_1, y_1) \text{ et } y = (y_1, y_2) \text{ dans } \mathbb{N}^2, \text{ on dit que } x \preccurlyeq y \text{ si } \begin{cases} x_1 < y_1 \\ \text{ou} \\ x_1 = y_1 \text{ et } x_2 \leqslant y_2 \end{cases}$$

1. Prouver que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^2$. L'ordre est-il total ?

2. On pose $A = \{(p,p)\,;\, p \in \mathbb{N}\}$ et $B = \{(2,10^p)\,;\, p \in \mathbb{N}\}$. Les parties A et B de $(\mathbb{N}^2, \preccurlyeq)$ sont-elles majorées ? Possèdent-elles un plus grand élément ? Une borne supérieure ?

36 — *La relation d'inclusion* f

Soit E un ensemble.

1. Montrer que la relation d'inclusion notée $\subset$ est un ordre sur $\mathscr{P}(E)$. L'ordre est-il total ?

2. On pose, pour tout $(A,B) \in \mathscr{P}(E)^2$, $\sup(A,B) := \sup\{A,B\}$ et $\inf(A,B) := \inf\{A,B\}$.

a. Justifier ces définitions. On exprimera $\sup(A,B)$ et $\inf(A,B)$ en fonction des sous-ensembles A et B à l'aide de $\cup$ et $\cap$.

b. Montrer plus généralement que toute partie non vide $\mathscr{F}$ de $(\mathscr{P}(E), \subset)$ admet une borne inférieure et une borne supérieure que l'on explicitera à l'aide de $\mathscr{F}$ en utilisant $\cap$ et $\cup$.

37 — *Conjugaison sur* $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ ff

Deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ sont dites *conjuguées* si $\exists \phi \in \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ bijective telle que $f = \phi^{-1} \circ g \circ \phi$.

1. Montrer que la conjugaison est une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

2. Déterminer la classe d'équivalence de $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$.

3. Soit f une fonction constante. Déterminer la classe d'équivalence de f.

4. Les fonctions définies par $f(x) = x^2$ et $g(x) = ax^2$ où $a \in \mathbb{R}^*$, sont-elles conjuguées ?

5. Les fonctions sin et cos sont-elles conjuguées ?

V. Problèmes

38 — *Étude d'une application* f – ff

Soit E un ensemble, A et B deux parties de E et l'application f définie par

$$f : \begin{array}{ccc} \mathscr{P}(E) & \longrightarrow & \mathscr{P}(E) \\ X & \longmapsto & (X \cap A) \cup B \end{array}$$

1. **a.** Calculer $f(\varnothing)$, $f(A)$, $f(B)$ et $f(E)$.

b. Montrer que f est croissante pour l'inclusion, ie $\forall (X_1, X_2) \in \mathscr{P}(E)^2,\ X_1 \subset X_2 \implies f(X_1) \subset f(X_2)$.

c. Soit $Y \in \mathscr{P}(E)$. Montrer l'équivalence des trois propriétés suivantes :

i. Y admet au moins un antécédent par f ; **ii.** $B \subset Y \subset A \cup B$; **iii.** $f(Y) = Y$.

d. En déduire que $f \circ f = f$.

2. **a.** Démontrer que f est injective *si et seulement si* $(A, B) = (E, \varnothing)$.

   b. Déterminer une condition nécessaire et suffisante de surjectivité de f.

3. **a.** Résoudre l'équation $f(X) = A$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

   b. Résoudre l'équation $f(X) = B$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur (A, B) pour que f soit constante.

39 — *Théorème de Cantor-Bernstein et dénombrabilité* *fff*

Deux ensembles sont dits équipotents s'il existe une bijection de l'un dans l'autre.

L'objectif de cet exercice est de démontrer le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder :

> *Soit* E *et* F *deux ensembles. S'il existe des injections de* E *dans* F *et de* F *dans* E*, alors* E *et* F *sont équipotents.*

1. Soit E un ensemble et $\phi : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E)$ croissante, ie $\forall (A, B) \in \mathscr{P}(E)^2,\ A \subset B \implies \phi(A) \subset \phi(B)$.

   On pose $\mathscr{D} := \{A \in \mathscr{P}(E)\,;\, A \subset \phi(A)\}$.

   a. Vérifier que $\mathscr{D}$ est non vide.

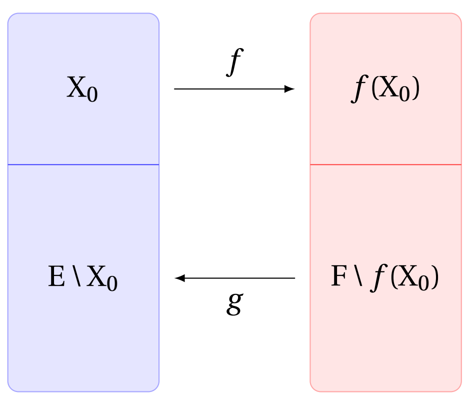
   b. On pose $X_0 := \bigcup_{A \in \mathscr{D}} A$. Montrer que $X_0 \in \mathscr{D}$.

   c. Établir que X_0 est un point fixe de ϕ.

2. Soit E et F des ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to E$ des injections.

   a. Montrer que l'application $X \mapsto E \setminus g\big(F \setminus f(X)\big)$ de $\mathscr{P}(E)$ dans lui-même est croissante pour l'inclusion.

   b. Établir l'existence d'une bijection de E sur F. INDICATION : On méditera la figure ci-dessous :



3. Un ensemble est dit *dénombrable* s'il est équipotent à $\mathbb{N}$. Le théorème de Cantor-Bernstein-Schröder permet de prouver qu'un ensemble E est dénombrable en se contentant de trouver des injections de E dans $\mathbb{N}$ et de $\mathbb{N}$ dans E.

   a. Montrer que $\mathbb{Z}$ est dénombrable et en déduire que $\mathbb{N}^2$ et $\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ sont équipotents.

b. Établir que $(n,m) \mapsto 2^n 3^m$, définie de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$, est injective. En déduire que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

c. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.

40 — *Filtres et ultra-filtres fff*

Dans tout ce problème, E désigne un ensemble non vide.

Une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est appelée un filtre sur E si elle vérifie les quatre propriétés suivantes :

- $(\mathscr{P}_1)$: $\mathscr{F} \neq \varnothing$;
- $(\mathscr{P}_2)$: $\forall (\mathrm{X},\mathrm{Y}) \in \mathscr{F}^2$, $\mathrm{X} \cap \mathrm{Y} \in \mathscr{F}$;
- $(\mathscr{P}_3)$: $\forall \mathrm{X} \in \mathscr{F}$, $\forall \mathrm{Y} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$, $(\mathrm{X} \subset \mathrm{Y} \implies \mathrm{Y} \in \mathscr{F})$;
- $(\mathscr{P}_4)$: $\varnothing \notin \mathscr{F}$.

Partie I – Exemples et généralités

1. Dans cette question, et dans cette question seulement, on suppose que E est formé de trois éléments distincts : $\mathrm{E} = \{a,b,c\}$.

a. Expliciter $\mathscr{P}(\mathrm{E})$.

b. Déterminer si les parties suivantes sont ou non des filtres sur E, en justifiant votre réponse.

i. $\mathscr{F}_1 = \varnothing$;

ii. $\mathscr{F}_3 = \mathscr{P}(\mathrm{E})$;

iii. $\mathscr{F}_5 = \big\{\{a\},\{b,c\}\big\}$;

iv. $\mathscr{F}_2 = \{\mathrm{E}\}$;

v. $\mathscr{F}_4 = \big\{\{a\},\{a,c\}\big\}$;

vi. $\mathscr{F}_6 = \big\{\{a\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,b,c\}\big\}$.

c. Déterminer, en justifiant votre réponse, tous les filtres sur E.

INDICATION : On pourra commencer par rechercher les filtres contenant au moins un singleton.

2. On revient désormais au cas général. L'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ est-il un filtre sur E ?

3. À quelle condition sur E l'ensemble $\mathscr{P}(\mathrm{E}) \setminus \{\varnothing\}$ est-il un filtre sur E ?

4. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E. Montrer que $\mathrm{E} \in \mathscr{F}$.

5. Que dire d'une partie $\mathscr{F}$ de $\mathscr{P}(\mathrm{E})$ qui vérifie $(\mathscr{P}_3)$ mais pas $(\mathscr{P}_4)$?

6. Soit A une partie non vide de E. On note $\mathscr{F}_\mathrm{A} = \{\mathrm{X} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})\,;\, \mathrm{A} \subset \mathrm{X}\}$.

a. Montrer que $\mathscr{F}_\mathrm{A}$ est un filtre sur E, appelé filtre principal engendré par A. Un filtre $\mathscr{F}$ sur E est dit principal s'il existe une partie A de E, non vide, telle que $\mathscr{F} = \mathscr{F}_\mathrm{A}$.

b. Soient A et B deux parties non vides de E. Montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{B} \iff \mathscr{F}_\mathrm{A} = \mathscr{F}_\mathrm{B}$.

7. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{F}^x = \big\{\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathbb{R})\,;\, \exists \varepsilon > 0,\ ]x-\varepsilon, x+\varepsilon[\subset \mathrm{A}\big\}$ ($\mathscr{F}^x$ est l'ensemble des voisinages de x).

a. Montrer que $\mathscr{F}^x$ est un filtre sur $\mathbb{R}$.

b. Prouver que $\mathscr{F}^x$ n'est pas un filtre principal.

8. On note $\mathscr{N}$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$ dont le complémentaire dans $\mathbb{N}$ est un ensemble fini.

a. Montrer que $\mathscr{N}$ est un filtre sur $\mathbb{N}$. Il est appelé filtre de Fréchet.

b. Déterminer si $\mathscr{N}$ est ou non un filtre principal.

9. Si E est un ensemble fini, montrer que tout filtre sur E est un filtre principal.

Partie II – Ultrafiltres

Un filtre $\mathscr{F}$ sur E est appelé un ultrafiltre si pour tout filtre $\mathscr{G}$ sur E, $\mathscr{F} \subset \mathscr{G} \implies \mathscr{F} = \mathscr{G}$.

1. **a.** Montrer que, pour toutes parties A et B non vides de E, $\mathrm{B} \subset \mathrm{A} \iff \mathscr{F}_{\mathrm{A}} \subset \mathscr{F}_{\mathrm{B}}$.

b. Soit A une partie non vide de E. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur A pour que $\mathscr{F}_{\mathrm{A}}$ soit un ultrafiltre sur E.

2. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E, et soit $\mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})$ telle que $\mathrm{A} \notin \mathscr{F}$.

a. Prouver que $\mathscr{G} = \left\{\mathrm{X} \in \mathscr{P}(\mathrm{E})\,;\, \mathrm{A} \cup \mathrm{X} \in \mathscr{F}\right\}$ est un filtre sur E tel que $\mathscr{F} \subset \mathscr{G}$ et $\overline{\mathrm{A}} \in \mathscr{G}$.

b. Soit $\mathscr{F}$ un filtre sur E. En utilisant la question précédente, démontrer que

$$\mathscr{F} \text{ est un ultrafiltre } \iff \forall \mathrm{A} \in \mathscr{P}(\mathrm{E}),\ \left(\mathrm{A} \in \mathscr{F} \text{ ou } \overline{\mathrm{A}} \in \mathscr{F}\right)$$

c. Les filtres $\mathscr{F}^x$ et $\mathscr{N}$ de la partie I sont-ils des ultrafiltres ?

VI. Indications

1

Raisonner par double inclusion, ou bien utiliser les opérations ensemblistes $A \setminus B = A \cap \overline{B}$, ou bien revenir aux opérateurs logiques.

2

Vous pouvez utiliser les fonctions indicatrices ou raisonnez directement sur les ensembles.

3

Prouver que $C \subset A$ en considérant $x \in C$.

4

La *cns* recherchée est $X \subset Y$.

5

Dessiner des patates.

6

On pourra, par exemple, raisonner par l'absurde.

7

Pour montrer qu'un élément a de A appartient à C, on pourra d'aider d'un élément b_0 de B.

8

On trouve respectivement E et $A \cup B \cup C$.

9

Analyse-synthèse : il faut discuter sur A et B.

10

L'équation est équivalente à $B \subset X \subset \overline{A}$.

11

On a $X = Y$.

12

Les deux relations du c. sont fausses en général. La formule de distributivité du 2. permet de le comprendre et aide à la construction d'un contre-exemple.

13

Dessiner !

14

Raisonner par double inclusion.

15

Il faut dessiner le graphe de f_a pour conjecturer le résultat.

16

Exploiter l'irrationnalité de $\sqrt{2}$.

17

Pour le 1., on pourra considérer $y \in \mathrm{F}$ et remarquer que $g(y) \in \mathrm{G}$ puis considérer $x \in \mathrm{E}$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$ (dont l'existence est assurée par surjectivité de h).

18

Raisonner par récurrence forte.

19

Intéressez-vous à $(\varnothing, \varnothing)$.

20

Réponse négative au 1., trouver un contre-exemple.

21

La réponse à la question 3. est positive.

22

La fonction n'est ni injective, ni surjective.

23

Pour le 1., on pourra considérer $y \in \mathrm{F}$ et remarquer que $g(y) \in \mathrm{G}$ puis considérer $x \in \mathrm{E}$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$ (dont l'existence est assurée par surjectivité de h).

24

Se souvenir que si $u \circ v$ est injective (resp. surjective) alors v l'est aussi (resp. u est surjective).

25

Montrer que $f(n) = n$ par récurrence forte.

26

Prouver *en premier* que g est bijective.

27

En dessinant des « patates », on devine facilement les conditions demandées.

28

On pourra à chaque fois définir une fonction qui convient en utilisant f.

29

Il faut dessiner de patates afin de se forger une intuition : on devine ainsi que $A \cup B = E$ est une *cns* d'injectivité.

30

Afin de construire une bijection de A sur A^3, on pourra considérer $(a, u, v) \in A^3$ puis $b \in A$ tel que $(u, v) = \theta(b)$.

31

Commencer par calculer $f(0)$, $f(1)$. Vérifier que f est injective.

32

Doubles inclusions ou raisonnement directs sont possibles.

33

Pour prouver l'injectivité du 2., on partira de l'égalité $f(x) = f(x')$ et on utilisera $A = \{x\}$ et $B = \{x'\}$.

34

Remarquez que, pour $x \in E$, $f^{-1}\langle\{f(x)\}\rangle$ est l'ensemble des antécédents de $f(x)$ par f.

35

L'ordre est total.

36

L'ordre n'est pas total.

37

Raisonner par l'absurde au 5.

38

Au 1.c., on pourra démontrer i. $\implies$ ii, ii $\implies$ iii puis iii $\implies$ i.

39

Au 2.b., on pourra poser $h(x) := f(x)$ si $x \in \mathrm{X}_0$ et $h(x) := \widetilde{g}^{-1}(x)$ sinon.

40

Passer du temps sur les exemples initiaux qui vous permettrons de vous familiariser avec la définition d'un filtre.