

INTERROGATION N° 0

Samedi 13 septembre 2025 (8h – 10h)

- ⇒ L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.
- ⇒ Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- ⇒ Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.
- ⇒ Le candidat laissera libre la première page de sa copie.
- ⇒ Des points de présentation seront enlevés à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :

souligner les justifications essentielles

et

encadrer les résultats importants

1

Négations

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^*$. Écrire sous forme symbolique les propositions suivantes ainsi que leur négation :

- a.** f n'est pas de signe constant; **b.** f est majorée.

2

Un encadrement de la factorielle

Démontrer que, pour tout entier naturel $n \geq 4$, $2^n \leq n! \leq n^n$.

3

Inégalités sur l'axe réel

Soit a et b deux nombres réels. On considère les deux propositions suivantes :

$$\mathcal{P}_1 : \forall x \in \mathbb{R}, (x < a \Rightarrow x \leq b) \quad ; \quad \mathcal{P}_2 : a \leq b$$

Les assertions suivantes sont-elles vraies $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_1 \Leftrightarrow \mathcal{P}_2$?

4*Un contre-exemple f*

Pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$, on considère les propositions suivantes :

$$\mathcal{M}_1 : \forall x \in \mathbb{R}_+ , \exists \alpha > 0 , f(x) > \alpha ; \quad \mathcal{M}_2 : \exists \alpha > 0 , \forall x \in \mathbb{R}_+ , f(x) > \alpha$$

1. Caractériser les fonctions $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant $\mathcal{M}_1$.
2. Déterminer un exemple de fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ vérifiant la propriété $\mathcal{M}_1$ mais pas la propriété $\mathcal{M}_2$.

5*Une racine carrée f*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\sqrt{n^2 + 4}$ n'est pas un entier.

6*Inégalités et monotonie f*

Soit E l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$, on considère les formules suivantes :

$$\mathcal{P}_1(f, x) : f(x) = x ; \quad \mathcal{P}_2(f, x) : (f \circ f)(x) = x ; \quad \mathcal{P}_3(f, x) : f(x) < x ; \quad \mathcal{P}_4(f, x) : f(x) > x$$

On rappelle que $(f \circ f)(x) = f(f(x))$.

1. Les propositions suivantes sont-elles vraies ?

$$\text{i. } \forall f \in E , \exists x \in \mathbb{R} , \mathcal{P}_1(f, x) \quad \text{ii. } \forall x \in \mathbb{R} , \exists f \in E , \mathcal{P}_1(f, x)$$

2. Soit $(f, x) \in E \times \mathbb{R}$. Quelle est la négation de la proposition « $\mathcal{P}_3(f, x)$ ou $\mathcal{P}_4(f, x)$ » ?
3. Dans cette question, on fixe une fonction $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ strictement croissante. Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R} , \left(\mathcal{P}_2(f_0, x) \implies \mathcal{P}_1(f_0, x) \right)$$

4. Écrire la négation de la proposition

$$\forall f \in E , \forall x \in \mathbb{R} , \left(\mathcal{P}_2(f, x) \implies \mathcal{P}_1(f, x) \right)$$

La proposition ci-dessus est-elle vraie ?

7*Un pas vers Tchebychev ff*

Soit $x \in \mathbb{R}^*$ tel que $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N} , x^n + \frac{1}{x^n} \in \mathbb{Z}$.

INDICATION : On pourra calculer $\left(x^n + \frac{1}{x^n}\right)\left(x + \frac{1}{x}\right)$.

8*Une équation fonctionnelle ff*

L'objectif de l'exercice est de déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, x f(x) + y^2 + f(xy) = f(x+y)^2 - f(x)f(y) \quad (\mathbf{E})$$

On procède par Analyse-synthèse.

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant (E).
 - a. Déterminer $f(0)$.
 - b. Montrer que $\forall y \in \mathbb{R}, f(y)^2 = y^2$. Que peut-on en déduire sur f ?
 - c. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x$.
2. Conclure.

9*Une équation fonctionnelle fff*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction vérifiant

$$\forall (t, x) \in \mathbb{R}^2, f(t^2 + x) = t f(t) + f(x)$$

1. En donnant une valeur numérique bien choisie à (t, x) , démontrer que $f(0) = 0$.
2. Établir que f est impaire.
3. Démontrer que $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a^2 + b^2) = f(a^2) + f(b^2)$ puis en déduire que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, f(u + v) = f(u) + f(v)$$

4. En considérant $f((t+1)^2)$ pour $t \in \mathbb{R}$, démontrer que $\exists \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall t \in \mathbb{R}, f(t) = \lambda t$.

10*Variations additives fff*

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que

$$\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2, f(m + n) = f(m) + f(n) + mn$$

Corrigé

1 ↻

1. La proposition s'écrit $\exists(a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a)f(b) < 0$ et sa négation est $\forall(a, b) \in \mathbb{R}^2, f(a)f(b) \geq 0$.
2. La proposition s'écrit $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) \leq M$ et sa négation est $\forall M \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) > M$.

2 ↻

On procède par récurrence. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $HR(n)$ la propriété au rang n .

⇒ Comme $4! = 24$, $4^4 = 2^8 = 256$ et $2^4 = 16$, $HR(4)$ est vraie.

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 4$. Supposons $HR(n)$ vraie. On a

$$(n+1)! = (n+1) \times n! \geq 2 \times 2^n \quad \text{et} \quad (n+1)! = (n+1) \times n! \leq (n+1) \times n^n \leq (n+1) \times (n+1)^n$$

car $n+1 \geq 2$ et $n^n \leq (n+1)^n$. Ainsi $HR(n+1)$ est vraie.

3 ↻

On va démontrer que les deux propositions sont équivalentes.

⇒ Supposons $a \leq b$. Pour $x \in \mathbb{R}$ tel que $x < a$, on a $x < b$. Ainsi $\mathcal{P}_2 \Rightarrow \mathcal{P}_1$.

⇒ Montrons la réciproque par contraposition. Supposons $a > b$. Le réel $m := \frac{a+b}{2}$ vérifie $m < a$ et $m > b$. Ainsi $\mathcal{P}_1$ est faux. On en déduit que $\mathcal{P}_1 \Rightarrow \mathcal{P}_2$.

4 ↻

1. La propriété $\mathcal{M}_1$ équivaut clairement à $f > 0$.

2. Considérons la fonction $f : x \mapsto e^{-x}$.

⇒ Pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a $f(x) > \frac{f(x)}{2} > 0$. $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists \alpha > 0, f(x) > \alpha$

⇒ Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{-x} > \alpha$.

Pour $x := \ln(\alpha + 1) - \ln \alpha > 0$, on aurait donc

$$e^{-x} = \frac{\alpha}{\alpha + 1} > \alpha$$

ce qui est absurde.

Commentaire

L'idée est bien-sûr de trouver une fonction strictement positive que se rapproche indéfiniment de 0 en $+\infty$, ie de limite nulle en $+\infty$.

5 ↺

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $k \in \mathbb{N}$ tel que $\sqrt{n^2 + 4} = k$. On aurait alors $k^2 - n^2 = 4$, i.e. $(k - n)(k + n) = 4$. Comme $k - n$ et $k + n$ appartiennent à $\mathbb{N}$ et $k - n < k + n$, on en déduit que $k - n = 1$ et $k + n = 4$. Ainsi $2n = 3$ ce qui est absurde.

Variante

On peut aussi remarquer que, pour $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on a

$$n < \sqrt{n^2 + 4} < n + 1$$

car $n^2 < n^2 + 4 < n^2 + 2n + 1$. On en déduit que $\sqrt{n^2 + 4} \notin \mathbb{N}$. On termine la démonstration avec le cas $n = 1$ en remarquant que $\sqrt{5} \notin \mathbb{N}$ puisque $2 < \sqrt{5} < 3$.

6 ↺

1. **a.** Cette proposition est fausse comme l'illustre le contre-exemple $f : t \mapsto t + 1$.
b. Cette proposition est vraie comme le montre l'exemple $f : t \mapsto t$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Raisonnons par contraposition. Supposons que $f_0(x) \neq x$.
 $\Rightarrow$ Cas 1 : $f_0(x) > x$. On a alors $(f_0 \circ f_0)(x) > f_0(x)$ par stricte croissance de f . Ainsi $(f_0 \circ f_0)(x) > x$.
 $\Rightarrow$ Cas 2 : $f_0(x) < x$. On a alors $(f_0 \circ f_0)(x) < f_0(x)$ par stricte croissance de f . Ainsi $(f_0 \circ f_0)(x) < x$.
 Dans tous les cas $(f_0 \circ f_0)(x) \neq x$.
3. La négation de « $f(x) < x$ ou $f(x) > x$ » et la proposition $f(x) = x$, i.e. $\mathcal{P}_1(f, x)$.
4. La négation de cette proposition est

$$\exists f \in E, \exists x \in \mathbb{R}, \mathcal{P}_2(f, x) \text{ et } \neg \mathcal{P}_1(f, x)$$

La proposition initiale est fausse. Considérons par exemple $f : t \mapsto 1 - t$. Comme $f \circ f : t \mapsto t$, $\mathcal{P}_2(f, 0)$ et $\neg \mathcal{P}_1(f, 0)$ sont vraies.

7 ↺

On procède par récurrence double. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $\text{HR}(n)$ la propriété au rang n .

$\Rightarrow$ Comme $x^0 + \frac{1}{x^0} = 2$ et $x + \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}$, $\text{HR}(0)$ et $\text{HR}(1)$ sont vraies.

$\Rightarrow$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\text{HR}(n)$ et $\text{HR}(n - 1)$ vraies. On a

$$x^{n+1} + \frac{1}{x^{n+1}} = \left(x^n + \frac{1}{x^n}\right) \left(x + \frac{1}{x}\right) - \left(x^{n-1} + \frac{1}{x^{n-1}}\right) \in \mathbb{Z}$$

car $\mathbb{Z}$ est stable par addition et multiplication. Ainsi $\text{HR}(n + 1)$ est vraie.

L'hérédité dicte l'initialisation

Comme on utilise l'hypothèse aux rangs n et $n-1$, il faut supposer $n \geq 1$ dans la preuve de l'hérédité. Il faut donc initialiser aux deux rangs 0 et 1.

8



1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une solution de **E**.

a. En choisissant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = f(0)^2 - f(0)^2 = 0$.

b. Soit $y \in \mathbb{R}$. En choisissant $x = 0$, on obtient $f(y)^2 = y^2$.

c. Soit $x \in \mathbb{R}^*$. Raisonnons par l'absurde en supposant $f(x) = -x$. En choisissant $y = x$, on obtient :

$$f(x^2) = f(2x)^2 - f(x)^2 - x^2 - xf(x) = 4x^2 - x^2 - x^2 + x^2 = 3x^2$$

Ainsi $f(x^2)^2 = 9x^4$ ce qui est absurde car $x \neq 0$ et $f(x^2)^2 = x^4$. Ainsi $f = \text{id}_{\mathbb{R}}$.

2. Il est clair que $\text{id}_{\mathbb{R}}$ est solution de **E**. L'ensemble des solutions de **E** est donc $\{\text{id}_{\mathbb{R}}\}$.

9



1. Pour $(t, x) = (1, 0)$, on obtient $f(1) = f(1) + f(0)$ d'où $f(0) = 0$.

2. Soit $t \in \mathbb{R}^*$. On a

$$f(t^2 + x) = tf(t) + f(x) \quad \text{et} \quad f(t^2 + x) = -tf(-t) + f(x)$$

d'où $tf(t) = -tf(-t)$ puis $f(-t) = -f(t)$. Comme $f(0) = 0$, on en déduit l'imparité de f .

Attention aux simplifications!

C'est un point de rigueur essentiel. On peut déduire $f(t) = -f(-t)$ à partir de $tf(t) = -tf(-t)$ en simplifiant par t lorsque $t \neq 0$. Il reste alors à justifier que $f(t) = -f(-t)$ en $t = 0$, i.e. $f(0) = 0$.

3. $\Rightarrow$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On a $f(a^2) = af(a) + f(0) = af(a)$, d'où

$$f(a^2 + b^2) = af(a) + f(b^2) = f(a^2) + f(b^2)$$

$\Rightarrow$ Soit $(u, v) \in \mathbb{R}^2$.

☞ Supposons u et v de même signe. On alors $u = \varepsilon|u|$ et $v = \varepsilon|v|$ où $\varepsilon \in \{-1, 1\}$. On a donc par imparité de f :

$$f(u + v) = \varepsilon f(|u| + |v|) = \varepsilon (f(\sqrt{u^2}) + f(\sqrt{v^2})) = f(u) + f(v)$$

☞ Supposons u et v de signe différents. Quitte à permuter u et v , supposons que $u \geq 0$. On a alors $v = -|v|$ d'où

$$f(u + v) = f(u - |v|) = f(u) + f(-|v|) = f(\sqrt{u^2}) - f(\sqrt{v^2}) = f(u) - f(|v|) = f(u) - f(v)$$

par imparité de f .

4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Par la question précédente, on a

$$f((t+1)^2) = f(t^2 + 2t + 1) = f(t^2) + f(2t + 1) = f(t^2) + f(2t) + f(1) = tf(t) + 2f(t) + f(1)$$

car $f(2t) = f(t + t) = f(t) + f(t) = 2f(t)$. D'autre part,

$$f((t+1)^2) = (t+1)f(t+1) = (t+1)(f(t) + f(1)) = tf(t) + tf(1) + f(t) + f(1)$$

On en conclut que $f(t) = f(1)t$.

10



Procédons par analyse-synthèse.

⇒ Soit f une solution. On a alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f(k+1) = f(k) + f(1) + k$ d'où

$$f(n) - f(0) = \sum_{k=0}^{n-1} (f(k+1) - f(k)) = f(1)n + \frac{n(n-1)}{2}$$

⇒ Soit $\lambda \in \mathbb{N}$ et $f: n \mapsto \lambda n + \frac{n(n-1)}{2}$. Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^2$, on a

$$\begin{aligned} f(m+n) &= \lambda(m+n) + \frac{(m+n)(m+n-1)}{2} = \lambda m + \lambda n + \frac{n(n-1) + m(m-1) + 2mn}{2} \\ &= f(m) + f(n) + mn \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions est donc $\left\{ n \mapsto \lambda n + \frac{n(n-1)}{2}; \lambda \in \mathbb{N} \right\}$.