

INTERROGATION FANTÔME

Compilation

1 _____ Une homographie _____

Soit f l'application de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{x+1}{1-x}$.

1. f est-elle injective? f est-elle surjective?
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{\lambda\}$, où λ est un réel que l'on précisera, et donner la bijection inverse.

2 _____ Un théorème de factorisation _____

Soit E , F et G trois ensembles non vides, $f : E \rightarrow F$ et $g : E \rightarrow G$. Montrer que

$$(\exists h : F \rightarrow G \text{ telle que } g = h \circ f) \iff \forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \implies g(x) = g(x'))$$

3 _____

L'application $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $(x, y) \mapsto (x, xy - y^3)$ est-elle injective ? surjective ?

4 _____ Opérations sur les ensembles _____

On suppose que $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$. Montrer que $B = C$.

5 _____ Variations sur les opérations du cours f _____

Soit $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$ deux applications. On note $h = g \circ f$. Démontrer que :

1. Si h est surjective et g est injective, alors f est surjective.
2. Si h est injective et f est surjective, alors g est injective.

CORRIGÉ

1 ↷

1. $\Rightarrow$ Soient x_1 et $x_2 \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On vérifie aisément que $f(x_1) = f(x_2) \iff (1+x_1)(1-x_2) = (1+x_2)(1-x_1) \iff 2x_2 = 2x_1 \iff x_1 = x_2$, donc f est injective.

$\Rightarrow$ Soit $y \in \mathbb{R}$. On résout l'équation $y = f(x)$, d'inconnue $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$. On a $y = \frac{x+1}{1-x} \iff x(1+y) = y-1$. Si $y = -1$, $x(1+y) = 0$ et $y-1 = -2 \neq 0$, donc l'équation n'a pas de solution. Ainsi -1 n'a pas d'antécédent, et f n'est pas surjective.

2. En reprenant les calculs précédents, on voit que pour tout $y \neq -1$, l'équation $y = f(x)$ admet l'unique solution $x = \frac{y-1}{1+y} \neq 1$ (car $-1 \neq 1$!). On en conclut que f est une bijection de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, et que sa bijection réciproque, qu'on note f^{-1} par commodité, est la fonction de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ définie par

$$f^{-1}(y) = \frac{y-1}{y+1}.$$

2 ↷

$\Rightarrow$ Supposons que $\exists h : F \rightarrow G$ telle que $g = h \circ f$.

Soit $(x, x') \in E^2$ tel que $f(x) = f(x')$. On a alors $g(x) = h(f(x)) = h(f(x')) = g(x')$.

$\Rightarrow$ Supposons que $\forall (x, x') \in E^2, (f(x) = f(x') \implies g(x) = g(x'))$.

Soit $\gamma \in G$ et $y \in F$.

☞ Cas 1 : $y \in f(E)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On pose $h(y) := g(x)$. On remarque $h(y)$ est indépendant du choix de $x \in E$ tel que $y = f(x)$ par hypothèse.

☞ Cas 2 : $y \notin f(E)$. On pose $h(y) := \gamma$.

Ceci définit bien une fonction $h : F \rightarrow G$ vérifiant $g = h \circ f$.

3 ↷

$\Rightarrow$ Comme $(1, 0) = f(1, 0) = f(1, 1)$, f n'est pas injective.

$\Rightarrow$ Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Soit (x, y) . L'équation $f(x, y) = (a, b)$ équivaut à $x = a$ et $ay - y^3 = b$. L'application $y \mapsto ay - y^3$ étant continue car polynomiale de limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $-\infty$ (resp. $+\infty$), on déduit du théorème des valeurs intermédiaires qu'elle prend la valeur b . Ainsi f est surjective.

4 ↷

Soit $x \in B$.

$\Rightarrow$ Cas 1 : $x \in A$. On a alors $x \in A \cap B$ donc $x \in A \cap C$ d'où $x \in C$.

$\Rightarrow$ Cas 2 : $x \notin A$. Comme $x \in A \cup B$, on a $x \in A \cup C$ d'où $x \in C$ (on rappelle que $x \notin A$).

On en déduit que $B \subset C$. On a donc par symétrie $C \subset B$.

1. Supposons h surjective et g est injective. Soit $y \in F$. On a $g(y) \in G$ donc $\exists x \in E$ tel que $g(y) = g \circ f(x)$ par surjectivité de h . Ainsi, $y = f(x)$ par injectivité de g . L'application f est donc surjective.
2. Supposons h injective et f surjective. Soit $(y, y') \in F^2$ tel que $g(y) = g(y')$. Par surjectivité de f , il existe $(x, x') \in E^2$ tel que $y = f(x)$ et $y' = f(x')$. On a donc $h(x) = h(x')$ d'où $x = x'$ par injectivité de h et finalement $y = y'$. Ainsi g est injective.