

INTERROGATION N° 3

Lundi 13 octobre 2025 (13h – 14h)

- ⇒ L'usage de la calculatrice est interdit durant l'épreuve.
- ⇒ Le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction.
- ⇒ Si le candidat découvre ce qu'il pense être une erreur d'énoncé, il le précisera dans sa copie.
- ⇒ Le candidat laissera libre la première page de sa copie.
- ⇒ Des points de présentation seront enlevés à tout candidat ne respectant pas les consignes suivantes :

souligner les justifications essentielles et encadrer les résultats importants

1 _____ Minoration d'un produit de factorielles _____

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n$.

2 _____ Une inégalité grossière _____

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^3 \right| \leq n^4$.

3 _____ Une somme double _____

Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier la somme $\sigma_n := \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j}$.

4 _____ Sommation par paquets _____

Calculer $\sum_{k=0}^{2n} k^{2+(-1)^k}$ pour n dans $\mathbb{N}$.

5*Ceci n'est pas une somme double*

Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter en fonction de n la somme $S_n := \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \\ i+j=n}} i j$.

6*Linéarisation*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $T_n := \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n}\right)$.

1. Calculer T_n au moyen d'une linéarisation.
2. Retrouver l'expression obtenue en utilisant le changement de variable $j = n - k$.

7*Une somme binomiale*

Soit $n \in \mathbb{N}$.

1. Expliciter $\cos \frac{\pi}{8}$ au moyen de la formule de duplication.
2. En déduire une expression simplifiée de $S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} i^k$.

8*Produit de convolution sur $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$*

On conviendra de noter u_n le terme général d'une suite u . Pour tous éléments u et v de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, on pose $u \star v := w$ où

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$$

1. Démontrer que, pour toutes suites u , v et w , on a $u \star v = v \star u$ et $u \star (v \star w) = (u \star v) \star w$.
2. Soit $\varepsilon := (\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $\varepsilon_0 = 1$ et $\varepsilon_n = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Vérifier que, pour toute suite u , $u = u \star \varepsilon = \varepsilon \star u$.

3. Soit $\rho \in \mathbb{R}$ et $u := (\rho^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Démontrer l'existence d'une suite v telle que $u \star v = \varepsilon$.

CORRIGÉ

1 ↻

On raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

⇒ Comme $\prod_{k=1}^1 (2k)! = 2$ et $((1+1)!)^1 = 2$, l'inégalité est vraie au rang 1.

⇒ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\prod_{k=1}^n (2k)! \geq ((n+1)!)^n$. On a

$$\prod_{k=1}^{n+1} (2k)! \geq ((n+1)!)^n \times (2n+2)!$$

Comme

$$\frac{((n+1)!)^n \times (2n+2)!}{((n+2)!)^{n+1}} = \left(\frac{(n+1)!}{(n+2)!} \right)^n \times \frac{(2n+2)!}{(n+2)!} = \frac{(n+2+1) \times (n+2+2) \cdots (n+2+n)}{(n+2)^n} \geq \frac{(n+2)^n}{(n+2)^n} = 1$$

on a bien $\prod_{k=1}^{n+1} (2k)! \geq ((n+2)!)^{n+1}$.

2 ↻

Soit $n \in \mathbb{N}$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\left| \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^3 \right| \leq \sum_{k=1}^n k^3 \leq \underbrace{n \times n^3}_{=n^4}$$

car chacun des k^3 est majoré par n^3

3 ↻

On a

$$\sigma_n = \sum_{0 \leq i, j \leq n} 2^{2i-j} = \left(\sum_{i=0}^n 4^i \right) \left(\sum_{j=0}^n 2^{-j} \right) = \frac{4^{n+1} - 1}{3} \times \frac{2^{-n-1} - 1}{-1/2} = \frac{2}{3} (4^{n+1} - 1) (1 - 2^{-n-1})$$

4 ↻

Notons σ_n la somme de l'énoncé. On a

$$\sigma_n = \sum_{\ell=0}^n (2\ell)^3 + \sum_{\ell=1}^n (2\ell-1) = 2n^2(n+1)^2 + n^2$$

5 ↻

On a $S_n = \sum_{i=0}^n i(n-i) = \frac{n^2(n+1)}{2} - \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{6}$.

6 ↻

1. On a

$$T_n = \sum_{k=0}^n \frac{1 + \cos \frac{k\pi}{n}}{2} = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left(\sum_{k=0}^n \left(e^{\frac{i\pi}{n}} \right)^k \right)$$

Comme

$$\sum_{k=0}^n \left(e^{\frac{i\pi}{n}} \right)^k = \frac{e^{\frac{i\pi(n+1)}{n}} - 1}{e^{\frac{i\pi}{n}} - 1} = -\frac{e^{\frac{i\pi}{n}} + 1}{e^{\frac{i\pi}{n}} - 1} = -i \frac{\cos \frac{k\pi}{2n}}{\sin \frac{k\pi}{2n}} \in \mathbb{R}i$$

On en déduit que $T_n = \frac{n+1}{2}$.

2. Posons $j := n - k$. On obtient

$$T_n = \sum_{j=0}^n \cos^2 \left(\frac{(n-j)\pi}{2n} \right) = \sum_{j=0}^n \cos^2 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{j\pi}{2n} \right) = \sum_{k=0}^n \sin^2 \left(\frac{k\pi}{2n} \right)$$

Ainsi $2T_n = \sum_{k=0}^n 1 = (n+1)$ d'où $T_n = \frac{n+1}{2}$.

7 ↻

1. Puisque $\cos \frac{\pi}{8} > 0$, on a

$$\cos \frac{\pi}{8} = \sqrt{\frac{\cos \frac{\pi}{4} + 1}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2} + 2}{4}}$$

2. On a classiquement

$$S_n = \sum_{k=0}^n \binom{2n}{2k} \left(e^{\frac{i\pi}{4}} \right)^{2k} = \frac{(1 + e^{\frac{i\pi}{4}})^{2n} + (1 - e^{\frac{i\pi}{4}})^{2n}}{2}$$

On a $1 + e^{\frac{i\pi}{4}} = 2e^{\frac{i\pi}{8}} \cos \frac{\pi}{8}$ et $1 - e^{\frac{i\pi}{4}} = -2ie^{\frac{i\pi}{8}} \sin \frac{\pi}{8}$ d'où

$$S_n = \left((2 + \sqrt{2})^n + (-1)^n (2 - \sqrt{2})^n \right) e^{\frac{in\pi}{8}}$$

car $\sin \frac{\pi}{8} = \sqrt{1 - \cos^2 \frac{\pi}{8}} = \sqrt{\frac{2 - \sqrt{2}}{4}}$.

8 ↻

1. Soit u , v et w , trois suites.

⇒ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k} = \sum_{i=0}^n u_{n-i} v_i = \sum_{k=0}^n v_k u_{n-k} = (v \star u)_n$$

par le changement de variable $i := n - k$. Ainsi $u \star v = v \star u$.

⇒ Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned} (u \star (v \star w))_n &= (u \star (w \star v))_n = \sum_{k=0}^n u_k \left(\sum_{\ell=0}^{n-k} w_\ell v_{n-k-\ell} \right) = \sum_{k=0}^n \sum_{\ell=0}^{n-k} u_k w_\ell v_{n-k-\ell} = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq \ell \leq n-k}} u_k w_\ell v_{n-k-\ell} \\ &= \sum_{\substack{0 \leq \ell \leq n \\ 0 \leq k \leq n-\ell}} u_k w_\ell v_{n-k-\ell} = \sum_{\ell=0}^n w_\ell \left(\sum_{k=0}^{n-\ell} u_k v_{n-\ell-k} \right) = (w \star (u \star v))_n = ((u \star v) \star w)_n \end{aligned}$$

Ainsi $u \star (v \star w) = (u \star v) \star w$.

2. Soit u une suite et $n \in \mathbb{N}$. On a $(u \star \varepsilon)_n = \sum_{k=0}^n u_k \varepsilon_{n-k} = u_n$. Ainsi $u \star \varepsilon = u$ puis $u \star \varepsilon = u$ par la question précédente.
3. Soit v la suite définie par $v_0 := 1$, $v_1 := -\rho$ et $v_n = 0$ pour tout $n \geq 2$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$(u \star v)_n = \sum_{k=0}^n \rho^k v_{n-k} = \begin{cases} 1 \times 1 & \text{si } n = 0 \\ 1 \times -\rho + \rho \times 1 & \text{si } n \geq 1 \end{cases}$$

Ainsi $u \star v = \varepsilon$.