



Ce n'est qu'en s'attaquant à des problèmes qui dépassent ses capacités que le mathématicien peut apprendre à utiliser ses capacités dans toute leur étendue.

Nobert Wiener



La baie de Langland, Sisley

13 Fonctions de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}	3
1 Quiz	4
2 Exercices élémentaires	4
3 Exercices classiques plus techniques	5
4 Indications	6
5 Solutions	7

1. Quizz

1   _____ *Vrai ou faux ?* _____

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

1. Si $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont continues en 0, alors f est continue en $(0, 0)$.
2. Si f est continue en $(0, 0)$, alors $x \mapsto f(x, 0)$ et $y \mapsto f(0, y)$ sont continues en 0.
3. La fonction $g : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 + x^3$ admet un minimum local en $(0, 0)$.
4. Si $\nabla f(X_0) = 0$, alors f admet un extremum en X_0 .
5. Si $f(x, y) = f(y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$.
6. Si f est \mathcal{C}^1 , alors la dérivée de $t \mapsto f(t, t)$ est $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(t, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(t, t)$.
7. Si f est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ alors f est constante.
8. Si f est de classe \mathcal{C}^1 et vérifie $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$ alors f est constante.

2. Exercices élémentaires

2   _____ *Une étude d'extremum* _____

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : (x, y) \mapsto x^2(1 + y)^3 + y^4$.

1. Montrer que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .
2. Montrer que la fonction f admet un unique point critique sur \mathbb{R}^2 .
3. Montrer que f admet un minimum local mais pas global en ce point critique.

3   _____ *Une étude* _____

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$(x, y) \neq (0, 0) \mapsto \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \quad \text{et} \quad f(0, 0) := (0, 0)$$

1. La fonction f est-elle continue sur \mathbb{R}^2 ?
2. A-t-on $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$?

4 ?

La règle de la chaîne

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$. Calculer les dérivées ou dérivées partielles des fonctions suivantes en fonction des dérivées partielles de f :

1. $f(y, x)$;
2. $f(x, x)$;
3. $f(y, f(x, x))$;
4. $f(x, f(x, x))$.

5 ?

Une EDP

Déterminer les fonctions $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ vérifiant $\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0$.

3. Exercices classiques plus techniques

6 ?

Une étude subtile f

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := x^3 + y^3 - 3xy$.

1. Déterminer les points critiques de f .
2. Justifier l'existence de points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$ tels que $f(x, y) < 0$.
Démontrer de même l'existence de points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ arbitrairement proches de $(0, 0)$ tels que $f(x, y) > 0$.
3. La fonction f admet-elle en $(0, 0)$ un maximum local, un minimum local, aucun des deux ?
4. Soit $\tilde{f} : (u, v) \mapsto f(1 + u, 1 + v) - f(1, 1)$.
 - a. Calculer, pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(u, v)$, puis, pour tout $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, $g(r \cos \theta, r \sin \theta)$.
 - b. Prouver que, $\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$, on a $g(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq 3r^2 \left(\frac{1}{2} - 2r\right)$. Qu'en conclure ?
5. La fonction f possède-t-elle un ou des extrema globaux ?

4. Indications

1 ↪ _____

Le lecteur est renvoyé au TD sur les fonctions de deux variables réelles pour une introduction aux équations aux dérivées partielles (EDP).

2 ↪ _____

Le seul point critique est l'origine. La fonction f y admet un minimum local mais pas global.

3 ↪ _____

La fonction est continue mais pas \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

4 ↪ _____

Utiliser à chaque fois une composée et la règle de la chaîne.

5 ↪ _____

Effectuer un changement de variable linéaire.

6 ↪ _____

Les points critiques de f sont $(0,0)$ et $(1,1)$.

5. Solutions

1 ↻

1. Faux. Cex : $f : (x, y) \neq (0, 0) \mapsto \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0, 0) := 0$. Cf. le cours pour les justifications.
2. Vrai. Par exemple, $x \mapsto f(x, 0)$ est la composée des fonctions f et $x \mapsto (x, 0)$ respectivement continues en $(0, 0)$ et 0 .
3. Vrai. Pour $(x, y) \in]-1, 1[^2$, on a $g(x, y) = x^2(1+x) + y^2 \geq g(0, 0) = 0$.
4. C'est faux. Par exemple, la fonction $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ est de gradient nul à l'origine et admet un point selle en $(0, 0)$.
5. C'est faux. Par exemple, pour $f : (x, y) \mapsto xy$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} : (x, y) \mapsto y \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} : (x, y) \mapsto x$$

6. Vrai par la règle de la chaîne.
7. C'est vrai. Comme $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, il existe $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 telle que $f : (x, y) \mapsto h(y)$. Comme $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$, h est de dérivée nulle sur l'intervalle \mathbb{R} donc est constante.
8. C'est faux. Cex $f : (x, y) \mapsto x + y$.

2 ↻

1. La fonction f est polynomiale donc de classe \mathcal{C}^1 .
2. On trouve

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2x(1+y)^3 \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2(1+y)^2 + 4y^3$$

⇒ Les points critiques (x, y) vérifient $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$.

⇒ La première condition équivaut à $x = 0$ ou $y = -1$. La seconde condition permet de conclure que $y \neq -1$. On a donc $x = 0$ puis $y = 0$. Le seul point critique est l'origine.

3. On a $f(0, 0) = 0$ et pour $y \geq -1$, $f(x, y) \geq 0$. Ceci montre que f admet bien un minimum local en $(0, 0)$. Mais $f(y, y) \underset{y \rightarrow -\infty}{\sim} y^5$ donc $f(y, y) \xrightarrow{y \rightarrow -\infty} -\infty$. f prend donc des valeurs strictement négatives et f n'admet pas de minimum global en $(0, 0)$.

3 ↻

On notera $\| \cdot \|$ la norme euclidienne.

1. Puisque $(x, y) \mapsto x^3 - y^3$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont polynomiales, elles sont continues sur \mathbb{R}^2 . De plus, $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ ne s'annule qu'en $(0, 0)$ donc f est continue sur \mathbb{R}^2 privé de l'origine. De plus,

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |x^3 - y^3| \leq |x^3| + |y^3| \leq (|x| + |y|)(x^2 + y^2)$$

donc

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}, |f(X)| \leq \sqrt{2}\|X\|$$

Ainsi f est bien continue en $(0, 0)$.

2. \Rightarrow Les applications polynomiales $(x, y) \mapsto x^3 - y^3$ et $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ sont de classe \mathcal{C}^1 donc f est de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ et pour tout (x, y) distinct de l'origine

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{x^4 + 3x^2y^2 + 2xy^3}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\frac{y^4 + 3x^2y^2 + 2x^3y}{(x^2 + y^2)^2}$$

\Rightarrow De plus, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(x, 0) = x$ donc $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1$.

\Rightarrow De même, $\forall y \in \mathbb{R}^*$, $f(0, y) = -y$ donc $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -1$.

\Rightarrow On remarque que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, y) \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0 \neq \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$$

donc $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0, 0)$. Ainsi f n'est pas de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

4



On notera à chaque fois ϕ la fonction étudiée.

1. Par la règle de la chaîne, on obtient :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, x) \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial x}(y, x)$$

2. En utilisant une composition par l'application $x \mapsto (x, x)$, on trouve :

$$\phi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x)$$

3. En utilisant une composition par $(x, y) \mapsto (y, f(x, x))$, on trouve :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y, f(x, x)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \right) \quad \frac{\partial \phi}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(y, f(x, x))$$

4. En utilisant une composition par $x \mapsto (x, f(x, x))$, on trouve :

$$\phi'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, f(x, x)) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, f(x, x)) \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, x) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, x) \right)$$

5



\Rightarrow Soit f une solution. Notons $g : (u, v) \mapsto f(au + bv, cu + dv)$ où $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$. On a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = a \frac{\partial f}{\partial x}(au + bv, cu + dv) + c \frac{\partial f}{\partial y}(au + bv, cu + dv)$$

Choisissons alors $(a, b, c, d) := (1, -1, -1, 2)$. On a alors $\frac{\partial g}{\partial u} = 0$. On en déduit l'existence de $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ tel que $g(u, v) = h(v)$ pour tout $(u, v) \in \mathbb{R}^2$. Comme

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \text{ donc } \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + y \\ x + y \end{pmatrix}$$

on en déduit que $f : (x, y) \mapsto h(x + y)$.

⇒ Réciproquement, toute fonction de la forme $(x, y) \mapsto h(x + y)$ où $h \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ convient clairement.

6



1. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 &\iff 3x^2 - 3y = 3y^2 - 3x = 0 \\ &\iff y = x^2 \text{ et } x = y^2 \\ &\iff y = x^2 \text{ et } x = x^4 \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \text{ ou } (x, y) = (1, 1) \end{aligned}$$

Les points critiques de f sont donc $(0, 0)$ et $(1, 1)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Alors $f(\varepsilon, 0) = \varepsilon^3 > 0$ et $f(-\varepsilon, 0) = -\varepsilon^3 < 0$.

3. Comme $(\varepsilon, 0)$ et $(-\varepsilon, 0)$ sont arbitrairement proches de $(0, 0)$, f prend des valeurs strictement positives et strictement négatives dans tout voisinage de $(0, 0)$. Ainsi f n'admet pas d'extremum local en $(0, 0)$.

4. a. On a $\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$, $\tilde{f}(u, v) = 3u^2 + 3v^2 - 3uv + u^3 + v^3$ puis

$$\begin{aligned} \forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}, \tilde{f}(r \cos \theta, r \sin \theta) &= 3r^2 - 3r^2 \cos \theta \sin \theta + r^3 (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \\ &= 3r^2 \left(1 - \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \frac{r}{3} (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \right) \end{aligned}$$

b. ⇒ Soit $(r, \theta) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$. Comme \sin et \cos sont à valeurs dans $[-1, 1]$, on a $1 - \frac{1}{2} \sin(2\theta) \geq \frac{1}{2}$ et

$$\frac{1}{3} (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \geq -\frac{2}{3} \geq -2$$

Puisque $r \geq 0$, on en déduit que

$$1 - \frac{1}{2} \sin(2\theta) + \frac{r}{3} (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) \geq \frac{1}{2} - 2r$$

puis $g(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq 3r^2 \left(\frac{1}{2} - 2r \right)$.

⇒ Notamment pour $r \leq \frac{1}{4}$, $g(r \cos \theta, r \sin \theta) \geq 0$. On en déduit que pour tout (x, y) dans le disque de centre $(1, 1)$ et de rayon $\frac{1}{4}$ (pour la norme euclidienne), $f(x, y) \geq f(1, 1)$. Autrement dit, f admet un minimum local en $(1, 1)$.

5. Remarquons que $f(x, x) = 2x^3 - 3x^2$. Notamment, $f(x, x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty$ et $f(x, x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$. La fonction f ne possède pas de minimum global puisqu'elle n'est pas minorée et elle ne possède pas non plus de maximum global puisqu'elle n'est pas majorée.