

L'arithmétique entière est le cadre idéal pour progresser en Mathématiques : chacun possède une bonne intuition de la notion de nombre entier et la théorie offre une belle variété de techniques de démonstration.



L'addition, Joan Miro

7	Arithmétique	1
1	Quizz	2
2	Exercices élémentaires	2
3	Exercices classiques plus techniques	4
4	Indications	5
5	Solutions.....	7

1. Quizz

1 ? 

Vrai ou faux ?

1. Pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, $a \mid b \iff a\mathbb{Z} \subset b\mathbb{Z}$.
2. S'il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $au + bv = 3$, alors $a \wedge b = 3$.
3. Si a ne divise pas b , alors $a \wedge b = 1$.
4. Si c divise ab , alors c divise a ou c divise b .
5. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, a et $a + 1$ sont premiers entre eux.
6. Pour tout $a \in \mathbb{N}$, a et $a + 2$ sont premiers entre eux.
7. L'entier 111 est premier.
8. Si $a = 0 [2]$, alors $a + 1 = 0 [3]$.
9. On a $1515 \wedge 1789 = 1$.
10. Si $a = 1 [35]$, alors a est impair.
11. Si $4a = 4b [7]$, alors $a = b [7]$.
12. Si $4a = 4b [6]$, alors $a = b [6]$.
13. Si a et b divisent c , alors ab divise c .
14. Le réel $\frac{\ln 3}{\ln 2}$ est rationnel.
15. Si a^2 divise b^2 , alors a divise b .
16. Le nombre de diviseurs positifs de 12 est 6.
17. Un nombre est pair $\iff$ la somme de ses chiffres en base 3 l'est aussi.
18. Le PGCD de a et b est nul *si et seulement si* $a = b = 0$.

2. Exercices élémentaires

2 ? 

Algorithme d'Euclide étendu

Calculer $1234 \wedge 4321$, et donnez une identité de Bézout.

3 ? 

Une équation diophantienne

1. Déterminer une relation de Bezout entre 23 et 21.
2. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $23x + 21y = 11$.

4*Un multiple de douze universel*

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'entier $n^4 - n^2$ est un multiple de 12.

5*Majoration d'un reste*

On considère, dans $\mathbb{N}$, deux nombres a et b tels que $0 < b \leq a$. En notant r le reste de la division euclidienne de a par b , montrer que $a > 2r$.

6*Une division qui tombe juste*

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.

7*Un irrationnel*

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$. Justifier que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)}$ est irrationnel.

8*La somme des carrés des chiffres en base dix*

Soit $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'application qui associe à $n \in \mathbb{N}$ la somme des carrés de ses chiffres en base 10. L'application f est-elle croissante ? Est-elle injective ? Est-elle surjective ?

9*Une équation diophantienne sans solution*

En travaillant modulo 5, démontrer que $15x^2 - 7y^2 = 9$ n'admet aucune solution dans $\mathbb{Z}^2$.

10*MP-Mines-Ponts 2010 f*

Donner le reste dans la division euclidienne de 2010^{2010} par 13.

11*Calcul d'un reste et d'un quotient f*

Soit a, b deux entiers avec $a \geq 3$ et $b \geq 2$. On note q et r le quotient et le reste dans la division euclidienne de $a-1$ par b . Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer le quotient et le reste dans la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

3. Exercices classiques plus techniques

12



D'après X-MP 2013 *f*

1. Trouver un entier $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $10^m - 1 = 0 [23]$.
2. Montrer qu'il existe un multiple de 23 dont l'écriture décimale ne comporte que des chiffres 1.

13



Couples réalisant un produit *f*

Combien l'équation $ab = 10!$ a-t-elle de solutions (a, b) dans $\mathbb{N}^2$?

INDICATION : Décomposer l'entier $10!$ en produit de nombres premiers et en déduire son nombre de diviseurs positifs.

14



Les carrés-cubes *f*

Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $n = x^2$ et $n = y^3$.

Montrer qu'il existe $z \in \mathbb{N}$ tel que $n = z^6$.

15



Mines-MP 2012 *ff*

Pour $n \geq 1$, soit p_n le n -ième nombre premier. Montrer que $p_n + p_{n+1}$ n'est pas le produit de deux nombres premiers.

16



Mines-MP 2007 *ff*

Parmi les nombres qui s'écrivent $\underline{aabb}_{10}$ en base 10, déterminer les carrés parfaits.

4. Indications

1 ↪ _____

Il n'y a aucune subtilité : il suffit de revenir aux définitions.

2 ↪ _____

S'inspirer du calcul fait en cours.

3 ↪ _____

Appliquer la méthode du cours : rechercher une solution particulière en utilisant le calcul du 1. puis se ramener à l'équation homogène.

4 ↪ _____

Factoriser le polynôme $X^4 - X^2$.

5 ↪ _____

Vérifier que le quotient q dans la division euclidienne de a par b n'est pas nul, donc est supérieur ou égal à 1.

6 ↪ _____

Appliquer la formule du binôme.

7 ↪ _____

Raisonner par l'absurde et faites de l'arithmétique.

8 ↪ _____

Calculer $f(i)$ pour quelques valeurs afin de vous forger une idée.

9 ↪ _____

Si (x, y) est solution, alors $3y^2 \equiv 4 \pmod{5}$. Conclure en examinant les différentes valeurs de y modulo 5.

10 ↪ _____

Reprendre la technique mise en œuvre dans le cours : trouver $r \in \mathbb{N}^*$ tel que $2010^r = 1 \pmod{13}$. On trouve que le reste dans la division euclidienne de 2010^{2010} par 13 est égal à 12.

11 ↪ _____

Écrire la division euclidienne de $a - 1$ par b : $a - 1 = bq + r$ avec $0 \leq r < b$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $ab^n - b^n = b^{n+1}q + rb^n$. En déduire la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} .

12

Commencer par étudier les valeurs des 10^i modulo 23.

13

Commencer par dénombrer les diviseurs de $10!$ en le décomposant en produit de facteurs premiers.

14

INDICATION : On pourra s'intéresser aux valuations p -adiques de n .

15

Quelle est la parité de $p_n + p_{n+1}$?

16

Effectuer une Analyse-Synthèse.

5. Solutions

1 ↻

1. Faux; cex : $(a, b) = (1, 2)$.
2. Faux; cex : $(a, b) = (1, 2)$ et $5a - b = 3$.
3. Faux; cex : $(a, b) = (4, 6)$.
4. Faux; cex : $(a, b, c) = (2, 2, 4)$.
5. Vrai, car $a + 1 - a = 1$ (Th. de Bezout).
6. Faux; cex : $a = 2$.
7. Faux car $3 \nmid 111$.
8. Faux; cex : $a = 6$.
9. Vrai (par l'algorithme d'Euclide).
10. Faux; cex : $a = 36$.
11. Vrai car $7 \wedge 4 = 1$ en utilisant le lemme de Gauss.
12. Faux; cex : $(a, b) = (3, 6)$.
13. Faux; cex : $(a, b, c) = (2, 2, 2)$.
14. Faux. Supposons que $q \ln 3 = p \ln 2$ avec $(p, q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$. On a $3^q = 2^p$, d'où $p = q = 0$ par unicité de la décomposition en produit de facteurs premiers, ce qui est absurde.
15. Vrai. Une preuve est possible via les valuations p -adiques.
16. Vrai car $12 = 3^1 \times 2^2$.
17. Vrai car $n = \underline{a_{m-1} \cdots a_0}_3 = a_{m-1} + \cdots + a_0 [2]$ car $3^k = 1 [2]$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
18. Vrai.

2 ↻

On applique l'algorithme d'Euclide étendu en notant $(a, b) := (4321, 1234)$:

$$\begin{array}{ll}
 a = 3b + 619 & 615 = -a + 4b \\
 b = 619 \times 1 + 615 & 4 = 2a - 7b \\
 619 = 615 \times 1 + 4 & 3 = -a + 4b - 153 \times (2a - 7b) = -307a + 1075b \\
 615 = 4 \times 153 + 3 & 1 = 309a - 1082b \\
 4 = 3 \times 1 + 1 \quad 619 = a - 3b &
 \end{array}$$

Ainsi $a \wedge b = 1$ et $1 = 309a - 1082b$.

3 ↻

1. On a $23 = 21 + 2$ et $21 = 2 \times 10 + 1$ d'où $1 = 21 - (23 - 21) \times 10$, i.e. $1 = 11 \times 21 - 10 \times 23$.
2. $\Rightarrow$ On en déduit du a. que $(x_0, y_0) := (-110, 121)$ est une solution de l'équation $23x + 21y = 11$.

⇒ Un couple (x, y) d'entiers est solution *si et seulement si* $23(x - x_0) = 21(y_0 - y)$, comme $23 \wedge 21 = 1$, ceci équivaut à l'existence de $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x - x_0 = 21k$ et $y_0 - y = 23k$.

L'ensemble des solutions est donc $\{(-110 + 21k, 121 - 23k); k \in \mathbb{Z}\}$.

4

Soit $n \in \mathbb{N}$. Comme $N := n^4 - n^2 = n \times n(n-1)(n+1)$, N est divisible par 3 (l'un des trois nombres consécutifs $n-1$, n et $n+1$ étant un multiple de 3). De plus N est divisible par 4 (car 4 divise n^2 si n est pair et 4 divise $(n-1)(n+1)$ si n est impair). Comme $4 \wedge 3 = 1$, N est divisible par $3 \times 4 = 12$.

5

Notons q le quotient de a par b . On a $a = bq + r$.

Comme $a \geq b$, on a $q \geq 1$ d'où $a - 2r = bq - r \geq b - r > 0$.

6

On utilise la formule du binôme $(n+1)^n - 1 = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} n^k$. Dès que $k \geq 2$, n^2 divise n^k . De plus, $\binom{n}{1} = n$ donc n^2 divise tous les termes de la somme précédente et donc divise $(n+1)^n - 1$.

7

Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de $(p, q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\frac{\ln(n+1)}{\ln(n)} = \frac{p}{q}$. On aurait alors $(n+1)^q = n^p$. Comme $(n+1) \wedge n = 1$, on aurait $n = 1$ d'où $2^q = 1$ ce qui est absurde car $q > 0$.

8

⇒ L'application f n'est pas croissante car $f(10) < f(9)$.

⇒ L'application f n'est pas injective car $f(12) = f(21)$.

⇒ L'application f est surjective car $f(\underbrace{1 \cdots 1}_{10}) = n$ (n fois 1) pour tout $n \in \mathbb{N}$.

9

Raisonnons par l'absurde en considérant $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tel que $15x^2 - 7y^2 = 9$. Comme $15x^2 - 7y^2 \equiv 3y^2 [5]$ et $9 \equiv 4 [5]$, on en déduit que $3y^2 \equiv 4 [5]$.

⇒ Cas 1 : $y \equiv 0 [5]$. On a alors une absurdité car $3y^2 \equiv 0 [5]$.

⇒ Cas 2 : $y \equiv \pm 1 [5]$. On a alors une absurdité car $3y^2 \equiv 3 [5]$.

⇒ Cas 3 : $y \equiv \pm 2 [5]$. On a alors une absurdité car $3y^2 \equiv 12 \equiv 2 [5]$.

Il y a donc une absurdité.

10

On a successivement $2010 \equiv 8 [13]$, $2010^2 \equiv 64 \equiv -1 [13]$ et $2010^4 \equiv 1 [13]$. La division euclidienne de 2010 par 4 s'écrivant $2010 = 4 \times 502 + 2$, on a

$$2010^{2010} = (2010^4)^{502} \times 2010^2 = 1^{502} \times 2010^2 [13] = 2010^2 [13] = -1 = 12 [13]$$

Le reste dans la division euclidienne de 2010^{2010} par 13 est donc égal à 12.

11 ↪

On écrit la division euclidienne de $a-1$ par b : $a-1 = bq + r$ avec $0 \leq r \leq b-1$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on a donc $ab^n - b^n = b^{n+1}q + rb^n$. Par conséquent, $ab^n - 1 = b^{n+1}q + (r+1)b^n - 1$. Par ailleurs, $0 \leq r \leq b-1$ donc $1 \leq r+1 \leq b$ et donc $0 \leq (r+1)b^n - 1 \leq b^{n+1} - 1$. Ceci prouve que le quotient de la division euclidienne de $ab^n - 1$ par b^{n+1} est q .

12 ↪

- Comme $10^2 = 8 [23]$, on a $10^4 = 64 = -5 [23]$, puis $10^8 = 25 = 2 [23]$ d'où $10^{16} = 4 [23]$, ainsi $10^{20} = -20 = 3 [23]$ et finalement $10^{22} = 24 = 1 [23]$.

Commentaire

Le lecteur savant peut aussi appliquer le petit théorème de Fermat : 23 étant premier et $23 \nmid 10 = 1$, on a $10^{22} = 1 [23]$

- Posons $n = 10^{21} + 10^{20} + \dots + 10 + 1$. On déduit de la formule de la série géométrique que $9n = 10^{22} - 1$ et donc que $23 | 9n$. Comme $23 \nmid 9 = 1$, on déduit du lemme de Gauss que $23 | n$.

13 ↪

On a $10! = 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times 2 \times 5 = 2^8 3^4 5^2 7^1$. Ainsi $10!$ admet $9 \times 5 \times 3 \times 2$ diviseurs dans $\mathbb{N}^2$. On en déduit $9 \times 5 \times 3$ solutions dans $\mathbb{N}^2$ car $10!$ n'est pas un carré parfait.

14 ↪

Le résultat est clair si $n = 0$. Supposons désormais n non nul. Soit p premier. On a

$$v_p(n) = 2v_p \quad \text{et} \quad v_p(n) = v_p(y^3) = 3v_p(y)$$

Ainsi l'entier v_p est multiple de 2 et de 3. Comme $2 \wedge 3 = 1$, il est aussi multiple de 6. On déduit l'existence de $z \in \mathbb{N}$ tel que $n = z^6$.

15 ↪

Le nombre $p_1 + p_2 = 5$ n'est pas le produit de deux nombres premiers. Soit $n \geq 2$. Comme p_n et p_{n+1} sont impairs, $p_n + p_{n+1}$ est pair. Raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de p premier tel que $p_n + p_{n+1} = 2p$. On aurait alors $p_n < p < p_{n+1}$ ce qui est absurde.

16 ↪

Pour $(a, b) \in \llbracket 0, 9 \rrbracket^2$, posons $n := \underline{aabb}_{10} = 1100a + 11b$.

- ⇒ *Analyse*. Supposons que n soit un carré parfait m^2 . Comme 11 est premier et divise $n = m^2$, on a $11 \mid m$ et donc $11^2 \mid n$. On a $11^2 = 121$ et $1100 = 11 [121]$, on a $n = 11(a+b) [121]$. Ainsi nécessairement $11 \mid a+b$. On en déduit que $a+b = 11$ ou $a+b = 0$. On en déduit que $a = b = 0$ ou il existe k dans $\llbracket 2, 9 \rrbracket$ tel que $(a, b) = (k, 11 - k)$.
- ⇒ *Synthèse*. Soit $k \in \llbracket 2, 9 \rrbracket$ et $n := 1100k + 11(11 - k) = k(1100 - 11) + 11^2 = 9k \times 11^2 + 11^2$ d'où le quotient de n par 11^2 vaut $9k + 1$ et c'est un carré *si et seulement si* $k = 7$.

Les seules solutions sont donc 0 et 7744.