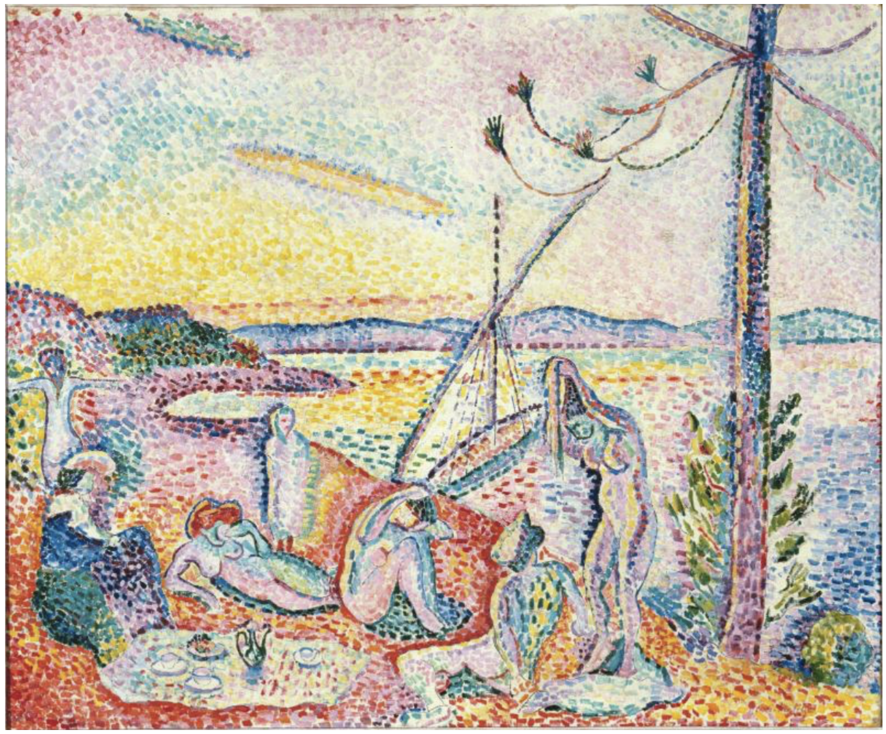
ALG 5 | Calcul matriciel

Introduction à l'algèbre linéaire par les systèmes linéaires et le calcul matriciel.



Luxe, calme et volupté, Matisse

1. Quizz

1 — *Vrai ou faux ?*

1. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^3$. Si $\mathrm{AB} = \mathrm{CB}$ et $\mathrm{B} \neq 0$, alors $\mathrm{A} = \mathrm{C}$.
2. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$. Si A et B sont inversibles, alors $\mathrm{A}+\mathrm{B}$ aussi.
3. Une matrice carrée est diagonale *si et seulement si* elle est triangulaire supérieure et inférieure.
4. Si A est inversible et symétrique, alors son inverse l'est aussi.
5. Le produit de deux matrices de $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$ appartient à $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{R})$.
6. La diagonale d'une matrice antisymétrique est nulle.
7. Pour tout $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, la matrice $\mathrm{A}^\top \mathrm{A}$ est symétrique.
8. La somme de deux matrices symétriques est symétrique.
9. Le produit de deux matrices symétriques est symétrique.
10. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\exists p \in \mathbb{N}^*,\ \mathrm{A}^p = 0$, alors $\mathrm{A} = 0$.
11. Il existe deux matrices A et B de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $\mathrm{AB} = 0$ et $\mathrm{BA} \neq 0$.
12. Si $\mathrm{A} \in \mathrm{GL}_n(\mathrm{K})$ et B commute avec A, alors B commute avec A^{-1}.
13. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et A^2 est inversible, alors A est inversible.
14. Multiplier A à droite par une matrice élémentaire fait agir l'opération correspondante sur ses colonnes.
15. Si $\mathrm{X} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathrm{X}^2 = \mathrm{I}_2$, alors $\mathrm{X} = \pm \mathrm{I}_2$.
16. Si $\mathrm{A} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$ n'a aucun zéro sur la diagonale, alors A est inversible.
17. Si $\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} + \mathrm{I}_n = 0$, alors A est inversible.

2 — *QCM sur le calcul matriciel*

1. Soit $\mathrm{J} \in \mathscr{M}_n(\mathrm{K})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
   On note $\sigma := \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \mathrm{M}_{i,j}$ et $\sigma_i := \sum_{j=1}^{n} \mathrm{M}_{i,j}$ pour tout $i \in [\![1,n]\!]$. Pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a :

   a. $\mathrm{JM} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$; **b.** $\mathrm{MJ} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_1 \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_n & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$; **c.** $\mathrm{JMJ} = \sigma \mathrm{J}$; **d.** $\mathrm{JM} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \dots & \sigma_n \\ \vdots & & \vdots \\ \sigma_1 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$.

2. Soit a, b et c, trois réels tels que $a^2+b^2+c^2 = 1$ et $\mathrm{M} := \begin{pmatrix} a^2 & ba & ca \\ ab & b^2 & cb \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$, $\mathrm{N} = \mathrm{I}_3 - \mathrm{M}$, et $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

   a. $\mathrm{M}^2 = \mathrm{M}$;
   b. $\mathrm{MN} = 0$;
   c. M et N commutent ;
   d. $\mathrm{N}^2 = 0$;
   e. $(u\mathrm{M} + v\mathrm{N})^n = u^n \mathrm{A}^n + v^n \mathrm{N}^n$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

a. $X^2 = \mathrm{tr}(X)X + \det(X)I_2$;

b. $\det(X) = \dfrac{(\mathrm{tr}\, X)^2 - \mathrm{tr}(X^2)}{2}$;

c. $X^2 = 0 \iff \mathrm{tr}(X) = \mathrm{tr}(X^2) = 0$.

4. Soit $p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = 0$. Pour tout réel t, on pose $E(t) := I_p + tA + \dfrac{t^2}{2}A^2$.

a. $\forall (t,s) \in \mathbb{R}^2,\ E(t)E(s) = E(s-t)$;

b. $E(t)^n = E(nt)$ pour tout $(t,n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}$;

c. $\exists t \in \mathbb{R},\ E(t) \notin GL_p(\mathbb{R})$;

d. Pour tout $(s,t) \in \mathbb{R}^2$, $E(t)$ et $E(s)$ commutent.

5. Soit A et B dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

a. Si $AB = 0$, alors $A = B = 0$;

b. Si $A \neq 0$, alors A est inversible ;

c. Si $A^2 = 0$, alors A n'est pas inversible ;

d. Si $A^2 = 2A + I_3$, alors A est inversible ;

e. Si A est inversible, alors A^2 est inversible.

6. Soit $J := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $E := \left\{ xI_2 + yJ\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \right\}$.

a. E ne contient que deux éléments inversibles ;

b. E est stable par le produit ;

c. L'équation $X^2 = X$ n'admet que deux solutions.

2. Exercices élémentaires

3 — *Utilisation d'un polynôme annulateur*

Soit $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $A^3 - A$ puis en déduire que A est inversible puis déterminer A^{-1}.

4 — *Algorithme du pivot*

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & = & 2 \\ x & - & 8y & - & z & = & -1 \end{array} \right.$

5 — *Un système linéaire à paramètres*

Résoudre selon les valeurs des paramètres réels a, b et c le système $\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & - & z & = & a \\ -2x & - & 3y & + & 3z & = & b \\ x & + & y & - & 2z & = & c \end{array} \right.$

6 — *Utilisation des projecteurs spectraux*

Soit $m \in \mathbb{C}^*$. On considère les matrices $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & m & m^2 \\ m^{-1} & 0 & m \\ m^{-2} & m^{-1} & 0 \end{pmatrix}$, $\mathrm{B} = \dfrac{1}{3}(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)$ et $\mathrm{C} = \dfrac{1}{3}(-\mathrm{A}+2\mathrm{I}_3)$.

1. Calculer $(\mathrm{A}+\mathrm{I}_3)(\mathrm{A}-2\mathrm{I}_3)$. En déduire que la matrice A est inversible et exprimer son inverse.
2. Calculer B^2 et C^2, puis en déduire B^n et C^n pour tout entier naturel n.
3. Calculer BC et CB. En déduire A^n pour tout entier naturel n.

7 — *Une inversion*

Justifier l'inversibilité et calculer l'inverse de la matrice $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3. Exercices classiques plus techniques

8 — *Un système d'ordre n* f

Résoudre le système linéaire $\forall k \in [\![1,n]\!],\ \displaystyle\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell = 1 - x_k$.

9 — *Une inégalité sur la trace des matrices symétriques* f

Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})^2$ et $\mathrm{M} := \mathrm{AB}-\mathrm{BA}$.

1. Démontrer que $\operatorname{tr}\left(\mathrm{M}^\top \mathrm{M}\right) = 2\left(\operatorname{tr}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\right) - \operatorname{tr}\left((\mathrm{AB})^2\right)\right)$.
2. En déduire que $\operatorname{tr}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\right) \geqslant \operatorname{tr}\left((\mathrm{AB})^2\right)$.

10 — *Les transvections et les dilations génèrent $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$* f

Montrer que toute matrice de permutation est un produit de matrices de transvection et de dilatation.

11 — *The claw matrix* f

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geqslant 3$ et $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $\mathrm{M}_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j \text{ ou } i=1 \text{ ou } j=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Démontrer l'inversibilité de M et calculer son inverse en appliquant l'algorithme du pivot.

12 — *La norme infinie matricielle* ff

On fixe $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $\mathrm{M} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$, on pose $\|\mathrm{M}\| = \displaystyle\max_{1\leqslant i,j\leqslant p} \left|\mathrm{M}_{i,j}\right|$.

1. Démontrer que, pour tout $(\mathrm{M},\mathrm{N}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2$, $\|\mathrm{M}+\mathrm{N}\| \leqslant \|\mathrm{M}\| + \|\mathrm{N}\|$ et $\|\mathrm{MN}\| \leqslant p\|\mathrm{M}\|\,\|\mathrm{N}\|$.

2. Démontrer que, pour tout m dans $\mathbb{N}^*$ et $(\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_m)$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})^m$, on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} \mathrm{M}_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|\mathrm{M}_i\| \quad \text{et} \quad \left\|\prod_{i=1}^{m} \mathrm{M}_i\right\| \leqslant p^{m-1} \prod_{i=1}^{m} \|\mathrm{M}_i\|$$

3. Soit $(\mathrm{A},\mathrm{B}) \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2$ tel que $\|\mathrm{A}\| \neq \|\mathrm{B}\|$.

a. Établir que, pour tout entier naturel n non nul, $\mathrm{A}^n - \mathrm{B}^n = \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{A}^i(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{B}^{n-1-i}$.

b. En déduire que $\dfrac{\|\mathrm{A}^n - \mathrm{B}^n\|}{\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|} \leqslant p^{n-1} \dfrac{\|\mathrm{A}\|^n - \|\mathrm{B}\|^n}{\|\mathrm{A}\| - \|\mathrm{B}\|}$.

4. Indications

1

Il sera le plus souvent suffisant de trouver des exemples ou des contre-exemples de taille deux ou trois.

2

L'inversibilité d'une matrice de taille deux est facile à étudier via son déterminant.

3

On trouve $A^3 - A = 4I_3$.

4

On trouve $\left\{\left(\dfrac{5-5z}{3}, \dfrac{1-z}{3}, z\right) ; z \in \mathbb{R}\right\}$.

5

Le système admet au moins une solution *si et seulement si* $a+b+c=0$.

6

On trouve $(A+I_3)(A-2I_3)=0$.

7

On trouve $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ par l'algorithme du pivot

8

Procéder par analyse-Synthèse.

9

Au 1., éviter d'exprimer la trace en fonction des coefficients : exploiter les propriétés de la trace (linéarité, etc.).

10

Réaliser la permutation de deux colonnes aux moyens des transvections et des dilitations.

11

Commencer par l'opération $C_1 \leftarrow \frac{C_1-(C_2+\cdots+C_n)}{2-n}$.

12

Il faut montrer que, pour tous indices i et j, on a $\left|(MN)_{i,j}\right| \leqslant p\|M\|\,\|N\|$.

5. Solutions

1 ↺

1. Faux. Contre-exemple : $E_{1,2} = E_{1,2}E_{2,2} = (E_{1,2} + E_{1,1})E_{2,2}$.
2. Faux. Cex : $I_n - I_n = 0$.
3. Vrai.
4. Vrai car si A est symétrique et inversible, alors $\left(A^{-1}\right)^\top = \left(A^\top\right)^{-1} = A^{-1}$.
5. Vrai (cf. le cours).
6. Vrai car si A est antisymétrique, alors $\forall\, i \in [\![1,n]\!]$, $A_{i,i} = -A_{i,i}$.
7. Vrai. Pour $A \in \mathscr{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, on a $\left(A^\top A\right)^\top = A^\top \left(A^\top\right)^\top = A^\top A$.
8. Vrai. Si A et B sont symétriques de même taille, on a $(A+B)^\top = A^\top + B^\top = A + B$.
9. Faux. Contre-exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
10. Faux. Contre-exemple : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = 0$.
11. Vrai. On a $E_{1,1}E_{1,2} = E_{1,2}$ et $E_{1,2}E_{1,1} = 0$ d'après le cours.
12. Vrai. On a $AB = BA$ d'où $B = A^{-1}BA$ puis $BA^{-1} = A^{-1}B$.
13. Vrai. Supposons A^2 inversible et notons B son inverse. Comme A commute avec A^2, A commute avec son inverse B. Ainsi $I_n = A(AB) = (AB)A$ donc A est inversible et $A^{-1} = AB$.
14. Vrai (cf. le cours).
15. Faux. Contre-exemple : $X = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$.
16. Faux. Contre-exemple : $A = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$ n'est pas inversible car AX est de la forme $\left(\begin{smallmatrix} u & u \\ v & v \end{smallmatrix}\right)$ pour tout $X \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.
17. Vrai. On a $I_n = A(-A - 2I_n)$. Donc A est inversible à droite donc inversible et $A^{-1} = -A - 2I_n$.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Moralité du 1. : une condition suffisante de simplification par une matrice carrée B est son inversibilité; $B \neq 0$ ne suffit pas à simplifier dans le cadre des matrices. On rappelle que $E_{i,j}$ est la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls sauf celui en position (i, j) qui vaut 1.

⇛ Moralité du 17. : pour montrer l'inversibilité d'une matrice, on peut utiliser un polynôme annulateur.

2 ↺

1. Seuls b. et c. sont vrais pour toute matrice M. Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Par définition du produit matriciel, on a

$$\begin{cases} (\mathrm{JM})_{i,j} &= \sum_{k=1}^n \mathrm{J}_{i,k}\mathrm{M}_{k,j} = \sum_{k=1}^n \mathrm{M}_{k,j} \\ (\mathrm{MJ})_{i,j} &= \sum_{k=1}^n \mathrm{M}_{i,k}\mathrm{J}_{k,j} = \sum_{k=1}^n \mathrm{M}_{i,k} = \sigma_i \\ (\mathrm{JMJ})_{i,j} &= \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \mathrm{J}_{i,k}\mathrm{M}_{k,\ell}\mathrm{J}_{\ell,j} = \sum_{1\leqslant k,\ell\leqslant n} \mathrm{M}_{k,\ell} \end{cases}$$

ainsi $\mathrm{JMJ} = \sigma\mathrm{J}$.

2. Tout est vrai sauf le d. Posons $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ de sorte que $\mathrm{M} = \mathrm{AA}^\mathrm{T}$.
On sait de plus que $\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A} = a^2+b^2+c^2 = 1$. Ainsi, par associativité du produit matriciel :

$$\mathrm{M}^2 = (\mathrm{AA}^\mathrm{T})^2 = \mathrm{A}(\mathrm{A}^\mathrm{T}\mathrm{A})\mathrm{A}^\mathrm{T} = \mathrm{M}\,,\ \mathrm{MN} = \mathrm{M}-\mathrm{M}^2 = 0\,,\ \mathrm{NM} = \mathrm{M}^2-\mathrm{M} = 0 \ \text{ et } \ \mathrm{N}^2 = \mathrm{I}_3+\mathrm{M}^2-2\mathrm{M} = \mathrm{I}_3-\mathrm{M} = \mathrm{N}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque M et N commutent, on peut appliquer la formule du binôme :

$$\mathrm{M}^n = (u\mathrm{M}+v\mathrm{N})^n = \sum_{k=0}^n u^k\mathrm{M}^k v^{n-k}\mathrm{N}^{n-k} = u^n\mathrm{M}+v^n\mathrm{N}$$

En effet :

⇛ La formule est évidente pour $n = 0$.

⇛ Supposons que $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in [\![1,n-1]\!]$, on a $\mathrm{M}^k\mathrm{N}^{n-k} = (\mathrm{MN})\mathrm{M}^{k-1}\mathrm{N}^{n-k-1} = 0$.

3. Tout est vrai sauf a.

⇛ On a $\mathrm{X}^2 - \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{X} + \det(\mathrm{X})\mathrm{I}_2 = \begin{pmatrix} a^2+bc & ac+cd \\ ab+bd & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a(a+d) & b(a+d) \\ c(a+d) & d(a+d) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = 0$.

⇛ On a $\mathrm{tr}\left(\mathrm{X}^2\right) = a^2+d^2+2bc = (a+d)^2-2(ad-bc) = (\mathrm{tr}\,\mathrm{X})^2 - 2\det(\mathrm{X})$.

⇛ ➛ Supposons $\mathrm{X}^2 = 0$. Alors $\mathrm{tr}(\mathrm{X}^2) = 0$ donc $(\mathrm{tr}(\mathrm{X}))^2 = 2\det(\mathrm{X})$. De plus, par le a., on a $\mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{X} = \det(\mathrm{X})\mathrm{I}_2$, d'où $\mathrm{tr}(\mathrm{X})\,(2\mathrm{X}-\mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{I}_2) = 0$ donc $\mathrm{tr}\,\mathrm{X} = 0$ ou $2\mathrm{X} = \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{I}_2 = 0$. Si $2\mathrm{X} = \mathrm{tr}(\mathrm{X})\mathrm{I}_2$, alors on a également $0 = 4\mathrm{X}^2 = (\mathrm{tr}\,\mathrm{X})^2\mathrm{I}_2$. Ainsi $\mathrm{tr}\,\mathrm{X} = 0$.

➛ Supposons $\mathrm{tr}(\mathrm{X}) = \mathrm{tr}(\mathrm{X}^2) = 0$. On déduit de la relation du b. que $\det(\mathrm{X}) = 0$. Ainsi $\mathrm{X}^2 = 0$ par le a.

Ainsi $\mathrm{X}^2 = 0 \iff \mathrm{tr}(\mathrm{X}) = \mathrm{tr}(\mathrm{X}^2) = 0$.

4. Seuls b et d sont vrais.

⇛ Soit t et s dans $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(t)\mathrm{E}(s) = (\mathrm{I}_p+t\mathrm{A}+t^2\mathrm{A}^2/2)(\mathrm{I}_p+s\mathrm{A}+s^2\mathrm{A}^2/2) &= \mathrm{I}_p+(t+s)\mathrm{A}+(ts+t^2/2+s^2/2)\mathrm{A}^2 \\ &= \mathrm{I}_p+(t+s)\mathrm{A}+\frac{(s+t)^2}{2}\mathrm{A}^2 = \mathrm{E}(t+s) \end{aligned}$$

car $\mathrm{A}^3 = \mathrm{A}^4 = 0$. On en déduit que $\forall (n,t) \in \mathbb{N}\times\mathbb{R},\ \mathrm{E}(t)^n = \mathrm{E}(nt)$ par une récurrence immédiate, et que $\mathrm{E}(t)$ et $\mathrm{E}(s)$ commutent.

⇛ Soit $t \in \mathbb{R}$. D'après le point précédent, on a $\mathrm{E}(-t)\mathrm{E}(t) = \mathrm{E}(t)\mathrm{E}(-t) = \mathrm{E}(t-t) = \mathrm{E}(0) = \mathrm{I}_p$. On en déduit que $\mathrm{E}(t)$ est inversible avec $\mathrm{E}(t)^{-1} = \mathrm{E}(-t)$.

5. **a.** C'est faux comme le prouve le contre-exemple $\mathrm{A} = \mathrm{B} = \begin{pmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{pmatrix}$.

b. C'est faux : même contre-exemple qu'à la question précédente.

c. Si A est inversible, alors A^2 aussi (un produit de matrices inversibles est inversible) et donc $\mathrm{A}^2 \neq 0$. La propriété est donc vraie car sa contraposée est vraie.

d. C'est vrai. Supposons que $A^2 = 2A + I_3$. On a alors $A(A - 2I_3) = (A - 2I_3)A = I_3$ et A est donc inversible.

e. C'est vrai car un produit de matrices inversibles est inversible.

6. Seuls b et c sont vrais. Pour $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, posons $M(x, y) := xI_2 + yJ = \begin{pmatrix} x+y & y \\ 0 & x+y \end{pmatrix}$.

⇛ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Comme $M(x, y)$ est triangulaire supérieure, elle est inversible *si et seulement si* aucun de ses coefficients diagonaux n'est nul, ie $x + y \neq 0$.

⇛ La stabilité par produit vient d'un calcul élémentaire en remarquant que $J^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2J - I_2 \in E$.

⇛ Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On a $M(x, y)^2 = x^2 I_2 + 2xyJ + y^2 J^2 = \begin{pmatrix} x^2+2xy+y^2 & 2xy+2y^2 \\ 0 & x^2+2xy+y^2 \end{pmatrix}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} M(x, y)^2 = M(x, y) &\iff \begin{cases} x^2 + 2xy + y^2 = x + y \\ 2xy + 2y^2 = y \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} (x + y)(x + y - 1) = 0 \\ y\big(2x + 2y - 1\big) = 0 \end{cases} \\ &\iff y = 0 \wedge x(x - 1) = 0 \\ &\iff (x, y) = (0, 0) \vee (x, y) = (1, 0) \end{aligned}$$

Les seules solutions de $X^2 = X$ dans E sont donc $M(0, 0) = 0$ et $M(1, 0) = I_2$.

Enseignements à tirer de cet exercice

⇛ Attention au 6., $X(X - I_2) = 0$ n'équivaut pas à $X = 0$ ou $X = I_2$ directement (un produit de matrices non nulles peut être nul).

3

1. Un calcul donne $A^3 - A = 4I_3$.

2. On a $A\frac{1}{4}(A^2 - I_3) = I_3$, ainsi A est inversible et $A^{-1} = \frac{1}{4}(A^2 - I_3) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

4

On échelonne puis réduit le système en appliquant l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -8 & -1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5/3 & 5/3 \\ 0 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

On en déduit l'ensemble des solutions $\left\{ \left(\frac{5 - 5z}{3}, \frac{1 - z}{3}, z \right) ; z \in \mathbb{R} \right\}$.

5

Par la méthode du pivot, le système est équivalent à $\begin{cases} x + 2y - z = a \\ \quad\;\; y + z = b+2a \\ \qquad\quad\;\; 0 = a+b+c \end{cases}$.

Il admet une solution *si et seulement si* $a+b+c=0$. Dans ce cas, on trouve l'ensemble de solutions suivant :

$$\{(2c-a+3\lambda, a-c-\lambda, \lambda)\,;\, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

6

1. On trouve $(A+I_3)(A-2I_3)=0$. Ainsi, $A^2-A=2I_3$, d'où $A\left(\dfrac{A-I_3}{2}\right)=\left(\dfrac{A-I_3}{2}\right)A=I_3$ et donc A est inversible d'inverse $A^{-1}=\dfrac{A-I_3}{2}$.
2. Puisque $A^2=A+2I_3$, on a $B^2=\dfrac{A^2+2A+I_3}{9}=\dfrac{3A+3I_3}{9}=B$ et $C^2=\dfrac{A^2-4A+4I_3}{9}=\dfrac{-3A+6I_3}{9}=C$. On en déduit que $B^n=B$ et $C^n=C$ pour tout entier naturel n non nul.
3. Comme B et C commutent, on a $CB=BC=\dfrac{(-A+2I_3)(A+I_3)}{9}=\dfrac{-A^2+A+2I_3}{9}=0$. On remarque que $A=2B-C$. Comme B et C commutent, on peut appliquer le binôme, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$:

$$\begin{aligned} A^n = (2B-C)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(2B)^k(-C)^{n-k} = 2^nB^n+(-1)^nC^n = 2^nB+(-1)^nC \\ &= \frac{2^n+2(-1)^n}{3}I_3+\frac{2^n+(-1)^{n+1}}{3}A \end{aligned}$$

car $BC=CB=0$ implique que, pour tout $0<k<n$, $B^kC^{n-k}=(BC)B^{k-1}C^{n-k-1}=0$.

7

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan :

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&1&0&0\\ 1&1&1&0&1&0\\ 1&1&2&0&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&1&0&0\\ 0&1&2&-1&1&0\\ 0&1&3&-1&0&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&-1&1&0&0\\ 0&1&2&-1&1&0\\ 0&0&1&0&-1&1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1&0&0&1&-1&1\\ 0&1&0&-1&3&-2\\ 0&0&1&0&-1&1 \end{array}\right)$$

Ainsi A est inversible et $A^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\-1&3&-2\\0&-1&1\end{pmatrix}$.

8

⇛ Analyse : si $(x_1,\dots,x_n)$ est solution, alors il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\forall i\in[\![1,n]\!]$, $x_i=\lambda$.

⇛ Synthèse : soit λ ; $(x_1,\dots,x_n)=(\lambda,\dots,\lambda)$ est solution *si et seulement si* $n\lambda=1-\lambda$, ie $\lambda=\dfrac{1}{n+1}$.

L'ensemble des solutions est $\left\{\left(\dfrac{1}{n+1},\dots,\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$.

9

1. Puisque les matrices A et B sont symétriques, on a :

$$\begin{aligned}\mathrm{M}^\top\mathrm{M} &= (\mathrm{AB}-\mathrm{BA})^\top(\mathrm{AB}-\mathrm{BA}) = \left(\mathrm{B}^\top\mathrm{A}^\top-\mathrm{A}^\top\mathrm{B}^\top\right)(\mathrm{AB}-\mathrm{BA}) = (\mathrm{BA}-\mathrm{AB})(\mathrm{AB}-\mathrm{BA})\\ &= \mathrm{BA}^2\mathrm{B}-(\mathrm{BA})^2-(\mathrm{AB})^2+\mathrm{AB}^2\mathrm{A}\end{aligned}$$

   Comme $\mathrm{tr}\left(\mathrm{BA}^2\mathrm{B}\right)=\mathrm{tr}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\right)$, $\mathrm{tr}\left(\mathrm{AB}^2\mathrm{A}\right)=\mathrm{tr}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\right)$ et $\mathrm{tr}(\mathrm{BABA})=\mathrm{tr}(\mathrm{ABAB})$, on a par linéarité de la trace :

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\right)=2\left(\mathrm{tr}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\right)-\mathrm{tr}\left((\mathrm{AB})^2\right)\right)$$

2. La matrice M étant à coefficients réels, on remarque que

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\right)=\sum_{i=1}^n\left(\mathrm{M}^\top\mathrm{M}\right)_{i,i}=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\mathrm{M}_{i,j}^2\geqslant 0$$

   D'où, par la question précédente : $\mathrm{tr}\left(\mathrm{A}^2\mathrm{B}^2\right)\geqslant\mathrm{tr}\left((\mathrm{AB})^2\right)$.

10

Soit $i\neq j$. La permutation des colonnes C_i et C_j peut s'obtenir par la séquence suivante :

$$\mathrm{C}_i\leftarrow\mathrm{C}_i+\mathrm{C}_j\ ,\ \mathrm{C}_j\leftarrow-\mathrm{C}_j\ ,\ \mathrm{C}_j\leftarrow\mathrm{C}_j+\mathrm{C}_i\ ,\ \mathrm{C}_i\leftarrow\mathrm{C}_i-\mathrm{C}_j$$

11

Par les opérations $\mathrm{C}_1\leftarrow\frac{\mathrm{C}_1-(\mathrm{C}_2+\cdots+\mathrm{C}_n)}{2-n}$, puis $\mathrm{C}_i\leftarrow\mathrm{C}_i-\mathrm{C}_1$ pour $i\in[\![2,n]\!]$ effectuées sur M, on obtient I_n. Ainsi M est inversible et son inverse s'obtient en effectuant les mêmes opérations sur I_n :

$$\mathrm{M}^{-1}=\begin{pmatrix}\lambda & -\lambda & \dots & & -\lambda\\ -\lambda & \mu & \lambda & \dots & \lambda\\ \vdots & \lambda & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \lambda\\ -\lambda & \lambda & \dots & \lambda & \mu\end{pmatrix}\quad\text{où}\quad\lambda:=\frac{1}{2-n}\quad\text{et}\quad\mu:=\frac{3-n}{2-n}$$

12

1. Soit $(\mathrm{M},\mathrm{N})\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R})^2$ et $(i,j)\in[\![1,p]\!]^2$. On a, par l'inégalité triangulaire pour la valeur absolue :

$$|\mathrm{M}_{i,j}+\mathrm{N}_{i+j}|\leqslant|\mathrm{M}_{i,j}|+|\mathrm{N}_{i,j}|\leqslant\|\mathrm{M}\|+\|\mathrm{N}\|$$

   Ainsi $\|\mathrm{M}+\mathrm{N}\|\leqslant\|\mathrm{M}\|+\|\mathrm{N}\|$. De même :

$$\left|(\mathrm{MN})_{i,j}\right|=\left|\sum_{k=1}^p\mathrm{M}_{i,k}\mathrm{N}_{k,j}\right|\leqslant\sum_{k=1}^p\left|\mathrm{M}_{i,k}\right|\left|\mathrm{N}_{k,j}\right|\leqslant\sum_{k=1}^p\|\mathrm{M}\|\,\|\mathrm{N}\|=p\|\mathrm{M}\|\,\|\mathrm{N}\|$$

   Ainsi $\|\mathrm{MN}\|\leqslant p\|\mathrm{M}\|\,\|\mathrm{N}\|$.

2. On raisonne par récurrence. Pour tout m dans $\mathbb{N}^*$, on note HR(m) la propriété : pour tout $(\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_m)$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})^m$, on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}\mathrm{M}_i\right\| \leqslant \sum_{i=1}^{m}\|\mathrm{M}_i\| \quad \text{et} \quad \left\|\prod_{i=1}^{m}\mathrm{M}_i\right\| \leqslant \prod_{i=1}^{m}\|\mathrm{M}_i\|$$

⇛ Le résultat est évident pour $m=1$ et pour $m=2$ par la question précédente.

⇛ Soit $m\in\mathbb{N}^*$. Supposons HR(m) vraie. Soit $(\mathrm{M}_1,\ldots,\mathrm{M}_{m+1})$ dans $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})^{m+1}$. Par HR(2) et HR($m$), on a

$$\left\|\sum_{i=1}^{m+1}\mathrm{M}_i\right\| \leqslant \left\|\sum_{i=1}^{m}\mathrm{M}_i\right\| + \|\mathrm{M}_{m+1}\| \leqslant \sum_{i=1}^{m+1}\|\mathrm{M}_i\|$$

De même :

$$\left\|\prod_{i=1}^{m+1}\mathrm{M}_i\right\| \leqslant p\left\|\prod_{i=1}^{m}\mathrm{M}_i\right\|\|\mathrm{M}_{m+1}\| \leqslant p^m\prod_{i=1}^{m+1}\|\mathrm{M}_i\|$$

3. **a.** On a, par distributivité puis télescopage :

$$\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{A}^i(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{B}^{n-1-i} = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\mathrm{A}^{i+1}\mathrm{B}^{n-(i+1)}-\mathrm{A}^i\mathrm{B}^{n-i}\right) = \mathrm{A}^n\mathrm{B}^0-\mathrm{A}^0\mathrm{B}^n = \mathrm{A}^n-\mathrm{B}^n$$

b. Par les questions précédentes :

$$\begin{aligned}\|\mathrm{A}^n-\mathrm{B}^n\| &\leqslant p^2\sum_{i=0}^{n-1}\left\|\mathrm{A}^i(\mathrm{A}-\mathrm{B})\mathrm{B}^{n-1-i}\right\| \leqslant p^{2+n-1-2}\sum_{i=0}^{n-1}\|\mathrm{A}\|^i\times\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|\times\|\mathrm{B}\|^{n-1-i}\\ &\leqslant p^{n-1}\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|\sum_{i=0}^{n-1}\|\mathrm{A}\|^i\times\|\mathrm{B}\|^{n-1-i} = p^{n-1}\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|\frac{\|\mathrm{A}\|^n-\|\mathrm{B}\|^n}{\|\mathrm{A}\|-\|\mathrm{B}\|}\end{aligned}$$

car $\|\mathrm{A}\|\neq\|\mathrm{B}\|$. Cette condition impose également $\mathrm{A}\neq\mathrm{B}$ donc $\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\|>0$ ($\mathrm{A}-\mathrm{B}$ a au moins un coefficient non nul). Ainsi $\dfrac{\left\|\mathrm{A}^n-\mathrm{B}^n\right\|}{\left\|\mathrm{A}-\mathrm{B}\right\|} \leqslant p^{n-1}\dfrac{\left\|\mathrm{A}\right\|^n-\left\|\mathrm{B}\right\|^n}{\left\|\mathrm{A}\right\|-\left\|\mathrm{B}\right\|}$.